数理解析研究所講究録
1037巻 1998年 97-106

$z^n = f(x, y)$ に対する極大イデアルサイクル

群馬大学医学部保健学科 都丸　正 (Tadashi Tomaru)

1. 序

二次元特異点を研究するさい、その特異点解消を考え、その例外集合上の種々のサイクルを考える事が重要となる。我々がここで考える極大イデアルサイクルは、内々には Wagreich[25] によって、明確な形では Yau[26] によって定義されたものである。Wagreich の研究から分かるように、極大イデアルサイクルは基本サイクルや特異点の重複度と密接な関係をもつ。基本サイクルは純粋に、例外集合から算術的にきまるものであるが、この両者の一致は、この後述べる Kodaira 特異点の理論において、Kodaira 特異点であるための必要条件として重要な意味をもつ。また、一般に特異点を考えたとき、その重複度を計算することは超曲面などの場合を除くと困難であるが、Wagreich の研究から明らかなように極大イデアルサイクル M について、$-M^2 \leqq mult(X, x)$（＝重複度）なる関係をもち、しかも十分な Blowing-up を施した特異点解消空間においては、等号が成立する。そのような意味で、極大イデアルサイクルについて研究することは意義深いものがあるように思われる。このような観点に立てば、超曲面を離れた non-Gorenstein などの特異点についてこそ、その極大イデアルサイクルの研究をすべきではあるが、とりあえず扱い易い特異点で調べてみることは意味のあることと考えられる。

本研究では $z^n = f(x, y)$ なる定義式をもつ超曲面特異点の極大イデアルサイクルについて調べるが、その結果としてこれらの超曲面特異点が Kodaira 特異点となるための２つの十分条件を求めた。ここでは、Kodaira 特異点の概念自体がこの１５年間近くほとんど議論される事がなく、忘れられた概念ともいえるので、結果を述べる前にそれに関する歴史的な流れ以下述べて置く。

1972 年 V.I.Arnold は複素（または実）係数の多項式について、modality（０以上の整数）なる概念を導入し、modality=0,1,2 の多項式を分類し、modality ＝ 0 なるものは有理２重点の定義式と一致することを示すとともに、これらの変形を計算しそれらの特異点の相互関係を示した。さらに、1974 年

に modality = 1,2 の多項式を分類している。このような特異点は、1976年に H.Laufer よって定義された最小楕円型特異点の重要なクラスをなし、その後の特異点論の発展に重要なものとなった。

1975年、Kulikov [13] は Kodaira による楕円曲線の退化族の退化ファイバーの3個以下の点を blowing-up し、その strict transform を negative-definite としたとき、これを contract してできる特異点として、上記 Arnold による modality=1,2（unimodal sing., bimodal sing. という）の特異点がすべて表せることを示した。

1980年、U.Karras [10],[11] は Kulikov にならい、代数曲線の退化族を考え、その非特異点を何回か blowing-up し、その strict transform を negative-definite とし、これを contract してできる特異点を Kodaira 特異点と名付け、その性質について調べた。とくに、Arnold の uni & bi-moular　特異点は最小楕円型特異点となるが、逆に最小楕円型特異点の中で、Kodaira 特異点はどのように特徴づけられるかについて考察し、有理特異点や最小楕円型特異点の場合については、Kodaira 特異点であるかどうかは例外集合の双対グラフ（＝既約曲線の交点数の状況で決まる）で決定できることなどを示した。さらに、彼はある条件下で、Kodaira 特異点の幾何種数、重複度、埋め込み次元についての公式を与えている。一般に二次元特異点論で、研究対象とする特異点の族を考えるとき、各種の種数の低いものでなおかつ、完全交叉や Gorenstein といった強い制約のついたものを除くと、上のような不変量は計算が困難なものである。そのようなことから、Kodaira 特異点はある特殊な族とはいえ、二次元特異点研究を行う上で、貴重な実験材料を提供しているように思われる。実際、Karras は変形理論でそのことを示している。

特異点論で、与えられた特異点の変形を調べることは重要な問題であるが、一般にそれを具体的に計算することは困難である。Karras はこのような状況にたいし、H.Laufer や O.Riemenschneider により展開された Ambient Deformation（特異点解消空間の変形）の議論を Kodaira 特異点に適用することで、ある条件下で最小特異点除去の例外集合上の基本サイクルは基本サイクルの族として、ambient deformation family 全体に拡がることを示した。よって、サイクルの適当な計算により、グラフの間の変形の計算が可能となり、実際に彼はこのような方法によって、楕円型 Kodaira 特異点について、その変形による相互の関係を示した。

Karras 以後の Kodaira 特異点に関しては、J.Stevens[20]による曲線の特異点との関係の研究、Ebeling-Wall[6]による Strange duality に関する研究な

どがある。しかしながら、どのような特異点が Kodaira 特異点となるかという調査はあまりされていない様である。我々はこのような観点から、どのような特異点が　Kodaira 特異点となるかを、$z^n = f(x,y)$ なる特異点について、Karras によって示された必要十分条件をもちいて調べる。我々の主結果は次の 2 つの定理である。

いま、(X,o) は $\{z^n = f(x,y)\}$ なる 2 次元正規超曲面特異点とする。このとき、f は $\mathbb{C}\{x,y\}$ の元で、位数が 2 以上のもの。"正規" の仮定から、f は重複する因子を持たない。このとき、次のことが言える。

定理 1． f の位数が n で割り切れるとする。Z を基本サイクルとすると、$Z^2 = -n$ となり、よって任意の特異点解消上で Z は極大イデアルサイクルと一致する。さらに、このとき (X,o) は種数 $\dfrac{(n-1)(ord(f)-2)}{2}$ の曲線族に付随する Kodaira 特異点である。

定理 2． n が十分に大とする。このとき、r を f の既約因子の個数とすると、$Z^2 = -r$ となる。さらに、極大イデアルサイクルは最小特異点解消上または、最小良特異点解消上で Z 一致する。さらに、このとき (X,o) は種数 $\dfrac{\mu - r + 1}{2}$ の曲線族に付随する Kodaira 特異点である。ただし、μ は曲線特異点 $(C,\{0\}) = \{f(x,y) = 0\}$ の Milnor 数とする。

2. 極大イデアルサイクルと Kodaira 特異点の定義と基本的結果

始めに記号の説明をしておく。例外集合 $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 上のサイクル $D = \sum_{i=1}^{n} d_i A_i$ に対して、$coeff_{A_i}(D)$ を D の A_i 上の係数とする。また、$\tilde{X}$ 上の因子 D について、$D = D_1 + D_2$ で、$supp(D_1) \subset A$ で $supp(D_2)$ は任意の i について、A_i を含まないという具合に分解するとき、D_1 を D_A と表す。また、$\tilde{X}$ 上の正則関数 f について、$v_{A_i}(f)$ は f の A_i 上での零となる位数を表すとする。

まず始めにいくつかの定義と、極大イデアルサイクルにかんする基本的結果について述べる。$\pi : (\tilde{X}, A) \longrightarrow (X,o)$ を正規 2 次元特異点の特異点解消とする。ここで、$\pi^{-1}(x) = A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ は例外集合 A の既約分解。A 上の基本サイクル Z とは、任意の A_i について、$Z \cdot A_i \leqq 0$ を満たす最小のもの。極大イデアルサイクルを定義する。f を (X,o) の局所環の極大イデアルの元とするとき、因子 $(f \circ \pi)$ について、サイクル $(f \circ \pi)_A$ をかんがえる。このようなサイクルのうち最小のものを極大イデアルサイクルという。以後、M_A を A 上の

極大イデアルサイクルと書く。ただし、A 上であることが明らかなときは、A を省略する。

定理 1.1 (**Wagreich**). (i) $0 < Z \leqq M$.

(ii) $0 < -Z^2 \leqq -M^2 \leqq mult(\mathcal{O}_{X,o})$.

(iii) 層 $\mathfrak{m}\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ が invertible なら、$\mathfrak{m}\mathcal{O}_{\tilde{X}} = \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-M)$ で、$mult(\mathcal{O}_{X,o}) = -M^2$.

重複度と$-Z^2$の値は特異点解消によらずに決まるが、$-M^2$は$-Z^2$から $mult(\mathcal{O}_{X,o})$ の間を変化する可能性がある。さらに、($\mathfrak{m}\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ の embedded points において) blowing-up を繰り返してゆく、層 $\mathfrak{m}\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ は invertible となる。

次に Karras[10]による Kodaira 特異点の定義を述べる。Sを非特異な複素曲面とし、Dを 1 次元複素平面の原点の周りの小さい半径の円板とする。$\Phi : S \to D$を surjective な正則写像とする。いまΦがについて、一般的なファイバー $S_t := \Phi^{-1}(t)$ ($t \neq 0$) が非特異曲線で種数gならば種数gの pencil という。いま、$S_o := \Phi^{-1}(o)$ において、その因子と見たときの係数が 1 のものの点達で、S_oにおいて非特異点であるものをとり、そこで、blowing-up を行い$\tilde{S}$をうる。そこにおいて、S_oの strict transform を$\tilde{S}_o$とおく。上での、blowing-up を$\tilde{S}_o$の交点行列が負定値であるようにしておき、Grauert の結果より$\tilde{S}_o$を$\tilde{S}$内で潰してできる特異点を Kodaira 特異という。いまΓ をある特異点の最小良特異点解消の例外集合からきまる重み付きグラフとする。このとき、ある Kodaira 特異点が存在し、そのの最小良特異点解消の例外集合の重み付きグラフがΓと一致するなら、Γを Kodaira グラフという。

定理 2.2 (**Karras** [10], p. 46). $Z = \sum_{i=1}^{n} c_i A_i$を A 上の基本サイクルとする。このとき、Γは Kodaira グラフである必要十分条件は $Z \cdot A_i < 0$ なる A_i について $c_i = 1$ となる。

定理 2.3 (**Karras** [11]). (X, o) を 2 次元正規特異点とする。$(\tilde{X}, A) \to (X, o)$ をその最小良特異点解消とする。このとき、(X, o) が Kodaira 特異点である必要十分条件は A が Kodaira グラフであり、かつ $M = Z$を A 上満たす事である。

A 上のサイクル $D = \sum_{i=1}^{n} d_i A_i$ $(d_i \in \mathbb{Z})$ に対して、Dの算術種数とは $p_a(D) = 1 + \frac{1}{2}(D^2 + K_{\tilde{X}} D)$, のことをいう。ただし、$K_{\tilde{X}}$ は$\tilde{X}$上の標準束の層。$p_a(Z)$ を基本種数と呼ぶ。これは、特異点解消によらず決まる特異点の不変量である。これは添加公式 : $K_{\tilde{X}} A_i = -A_i^2 + 2g(A_i) - 2 + 2\delta(A_i)$, によっ

て計算される。ただし、$g(A_i)$ は A_i の非特異モデルの種数であり、$\delta(A_i)$ は A_i のコンダクターの次数である。

定理 2.4 (Karras [11]). (X,o) を Kodaira 特異点とする。このとき、これに付随した曲線の pencil の種数は $p_f(X,o)$ の一致する。

3. $\{z^n = f(x,y)\}$ の極大イデアルサイクルの計算

(X,o) を $z^n = f(x,y)$ で定義される正規超曲面特異点とする。ただし、$f \in \mathbb{C}\{x,y\}$ で $ord(f) \geqq 2$ とする。$(C,o) = \{f(x,y)=0\} \subset \mathbb{C}^2$ とおく。このとき、$\mathbb{C}^2$ に blowing-up を繰り返してゆき、C の特異点解消 $\mathbb{C}^2 \overset{\sigma_1}{\leftarrow} V_1 \overset{\sigma_2}{\leftarrow} \dots \overset{\sigma_s}{\leftarrow} V = V_s$ を得る。ここで、C の strict transform は単純正規交叉をしている。これをもとにして、次のダイヤグラムができる。

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^3 & V \times \mathbb{C}^1 \arrow[l, "\sigma\times id"'] & & \\
\cup & \cup & & \\
X \arrow[d, "p"'] & V' \arrow[l, "\phi_1"'] \arrow[d, "\pi'"'] & V'' \arrow[l, "\phi_2"'] & \tilde{X}. \arrow[l, "\phi_3"'] \arrow[dll, "\pi"] \\
V_0 = \mathbb{C}^2 & V_1 \arrow[l, "\sigma_1"'] \cdots \overset{\sigma_s}{\leftarrow} V = V_s, & &
\end{tikzcd}
\tag{3.1}
$$

ここで、p は $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ $((x,y,z) \to (x,y))$ から得られる n 重被覆で、よって π' もそうである。ϕ_1 は双有理写像で、V' は一般に正規でない $z^n = u^a v^b$ なる形の特異点を持つ。V'' は V' の正規化で特異点としては、巡回商特異点のみをもつ。よって、これらの巡回商特異点を解消することで元の特異点 (X,o) の特異点解消をえる。しかも、これは良特異点解消となっている。$\bar{E}_i$ を σ_i による第一種例外曲線 ($\simeq \mathbb{P}^1$) の V への $\sigma_s \circ \cdots \circ \sigma_{i+1}$ による strict transform とする ($i = 1,2,\cdots,s$)。いま、$C = \bigcup_{j=1}^{r} C_j$ を既約分解とする。$\bar{C}_j$ を $\sigma = \sigma_s \circ \cdots \circ \sigma_1$ による strict transform とする ($j = 1,2,\cdots,r$)。E (resp. E_i) を $\tilde{X}$ への strict transform $\pi^{-1}(\bar{E})$ (resp. $\pi^{-1}(\bar{E}_i)$) とする。しかし、E_i がいつも既約とは限らない。さらに、F を ϕ_3 による例外集合とする。よって、$\tilde{E} := E \cup E$ が $\tilde{X}$ 上の例外集合となる。ここで、$\phi = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \phi_3$ とおく。

我々は、極大イデアルサイクルを計算するために、上記の特異点解消を具体的に計算する必要がある。よって、そのためには $\{z^n = u^a v^b\} \subset \mathbb{C}^3$ なる特異点の正規化を計算する必要がある。これが、巡回商特異点で与えられる事はよく知られている。それを計算する方法が Laufer の教科書[14]の２章にも出ているが、これは以下のような補題で簡単に計算できる（どこかに書いてあるかも知れせんが、私が質問した１０人程度の方はどなたも知りません。ご存知の

方がありましたらご教示下さい)。まず、一応巡回商特異点を表す記号をのべておく。kと qを互いに素な、$1 \leqq q < k$ を満たす自然数とする。$G_{k,q}$を行列 (e_k, e_k^q) ($:= \begin{pmatrix} e_k & 0 \\ 0 & e_k^q \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$) で生成される巡回群とする。ここで、$e_k = exp(\frac{2\pi i}{k})$ とする。このとき、$(\mathbb{C}^2/G_{k,q}, \{0\})$ なる商特異点をこのとき、$C_{k,q}$と表す。$\{z^n = u^a v^b\}$ の正規化を計算する。簡単のため $g.c.m.(n, a, b) = 1$ する。以下のように、自然数を定義する。

$$\begin{cases} r_0 = g.c.m.(a, b), r_1 = g.c.m.(n, b), r_2 = g.c.m.(n, a) \\ n_1 = \dfrac{n}{r_1 r_2}, a_1 = \dfrac{a}{r_0 r_2}, b_1 = \dfrac{b}{r_0 r_1}. \end{cases}$$

補題 3.1. 特異点 $\{z^n = u^a v^b\}$ の正規化は巡回商特異点 $C_{n_1,\mu}$、ただし $g.c.m.(n, a, b) = 1$ とし、νとμ は $a_1 \nu \equiv 1 \ (mod\ n_1)$ と$\mu + b_1 \nu \equiv 0 \ (mod\ n_1)$ で与えられる自然数。

よって $\{z^n = u^a v^b\}$ の特異点解消の例外集合は次のようになる。

$$(3.2) \quad \begin{array}{ccccc} F_1 & F_2 & \cdots & F_r \\ -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_r \end{array}, \quad \text{ただし } \frac{n_1}{\mu} = b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{b_r}}}。$$

ここで、$L_1 = \{u = 0\}$ 、$L_2 = \{v = 0\}$ なる $C_{n_1,\mu}$上の曲線を考える。このとき、L_1と L_2の strict transform はそれぞれ、F_1と F_rに交わる。いま、u, vを特異点解消空間 W 上まで引き上げ、それらの F_i上での零点の位数を考える。自然数$\lambda_0, \cdots, \lambda_r$を以下のように定義する。

$$(3.3) \qquad \lambda_0 = n_1, \lambda_1 = \mu \text{ and } \lambda_{i+1} = b_{i+1}\lambda_i + \lambda_{i-1} \ (i = 1, \cdots, r-1),$$

よって、$\lambda_r = 1$ 。さらに、帰納的に次のような数を定義する。

$$(3.4) \qquad \begin{cases} \delta_0 = r_0 a_1 \text{ and } \delta_i = \dfrac{b_1 r_0 + \delta_{i-1}\lambda_i}{\lambda_{i-1}} \\ \eta_0 = 0 \text{ and } \eta_i = \dfrac{n_1 r_2 + \eta_{i-1}\lambda_i}{\lambda_{i-1}} (i = 1, \cdots, r). \end{cases}$$

このとき、藤木による巡回商特異点解消の方法を用いて、次のことが示せる。

補題 3.2. u, v, zの引き上げの $F_i(\subset W)$ 上の零点の位数は$\lambda_i r_1$, η_i, δ_i で与えられる。$i = 1, \cdots, r$

4. $z^n = f(x,y)$ の極大イデアルサイクルの計算

いま、V上で$\bar{E}_i$と$\bar{E}_j$（または$\bar{C}_j$）が交わっているとする。その交点の近傍に(u,v)まる座標をとり、$\bar{E}_i = \{u=0\}$で$\bar{E}_j$であるようにする。（または$\bar{C}_j) = \{v=0\}$。いま$a = v_{\bar{E}_i}(f\circ\sigma)$で$b = v_{\bar{E}_j}(f\circ\sigma)$（または$b = v_{\bar{C}_j}(f\circ\sigma)$）とすると、$\pi'^{-1}(U)$は$\{z^n = u^a v^b\}$なる特異点と同型になる。

いま$\alpha x+\beta y$とzの$\tilde{X}$上への pull-back とそれらのE_i上での零点の位数を考える。ただし、α and βは$\mathbb{C}$における一般の元。

$$\bar{f}_i = v_{\bar{E}_i}(f\circ\sigma)\text{、}\bar{d}_i = v_{\bar{E}_i}((\alpha x+\beta y)\circ\sigma),$$

$$z_i = v_{E_i}(z\circ\phi)\text{、}d_i = v_{E_i}((\alpha x+\beta y)\circ\phi)$$

ただし$i = 1,2,\cdots,s$. ここで、$\bar{Z}$は$\bar{E}$上で極大イデアルサイクルに等しい。なぜなら、一般に有理特異点については Laufer によって、任意の特異点解消にたいし、この両者は等しいことが知られている。非特異点は有理特異点の一種である。

$$(4.1)\qquad \bar{Z} = \sum_{i=1}^{s} \bar{d}_i \bar{E}_i.$$

補題 4.1. $\tilde{E}$における極大イデアルサイクルMについて次がいえる。

$$z_i = \frac{\bar{f}_i}{g.c.m.(n,\bar{f}_i)},\ d_i = \frac{n\bar{d}_i}{g.c.m.(n,\bar{f}_i)},\ coeff_{E_i}M = max\{z_i, d_i\}.$$

補題 4.2（[5],[25],[26]）. $\pi : (\tilde{X}, A) \longrightarrow (X, o)$を2次元正規特異点の特異点解消とする。$D_1$と$D_2$を$A$上の2つのサイクルとする。$D_1 A_i \leqq 0$が任意の$i$についていえ、さらに$D_1 \leqq D_2$とする。このとき、$D_1^2 \geqq D_2^2$で$D_1 = D_2$であるための必要十分条件は$D_1^2 = D_2^2$。

命題 4.3. $(\tilde{X}, \tilde{E})$を$z^n = f(x,y)$の、上で構成した特異点解消。いま、$n \leqq ord(f)$とする。Mを$\tilde{E}$（$= E\cup F$）上の極大イデアルサイクルとする。このとき、$M = ((\alpha x+\beta y)\circ\phi)_{\tilde{E}}$，$M^2 = -n$,

$$M\cdot E_i = \begin{cases} -n & \text{if } i = 1 \\ 0 & \text{if } i \neq 1 \end{cases}$$

ここで、$M\cdot F_j = 0$となる。

この証明は、$\mathfrak{m}$を$\mathcal{O}_{\tilde{X}}$の極大イデアルとすると、これはx,y,zで生成される。よって、極大イデアルサイクルの計算をするには$\alpha x+\beta y$とzについて、例外集合上の零点の位数を比較すればいいが、上のような状況下ではMは$\alpha x+\beta y$とzについて、例外集合上の零点の位数の引き上げで与えられる。よって、V上での$\bar{M}$との比較が出来、上のような結果が得られる事となる。

5. 主結果について

定理 5.1. (X,o) を正規特異点 $\{z^n = f(x,y)\}$ とする。ただし、$n > 1$ かつ $f \in \mathbb{C}\{x,y\}$。$ord(f)$ は n で割り切れるとする。このとき、次がいえる。

(i) $Z^2 = -n$。よって、任意の特異点解消において極大イデアルサイクルと基本サイクルは一致する。

(ii) (X,o) は種数 $\dfrac{(n-1)(ord(f)-2)}{2}$ の pencil に付随した Kodaira 特異点である。

この証明はうえの命題 4.3 からすぐ分かる。

$\bar{C}$を Cのσによる strict transform とする。このとき、$\bar{C}$は$\sum_{i=1}^{s} \bar{f}_i \bar{E}_i$ に numerically に同値である。いま、$\hat{C}$を$\bar{C}$のπによる逆像とする。

補題 4.3 (F. Ganther [8], p 1175 and p.1193]).

(i) Vを $\mathbb{C}^2$を充分に blowing-up したものとすると、$\pi^*\bar{C} = n\hat{C}$。

(ii) $\bar{C} \cdot (\bar{C} + K_V) = -2\delta$.

上の (ii) は、Ganther が既約曲線に関したある命題を証明したさい、その証明の中に現れる。上の事実は既約でなくてもいえる。

定義 5.3. (3.1) における Cの特異点解消に関して、自然数 M_oをつぎのように定義する。

$$N_o = max\{v_{\bar{E}_i}(f \circ \sigma) | i = 1, \cdots, s\}.$$

定理 5.4. $(X,o) = \{z^n = f(x,y)\}$ について、$n \geqq N_o$と仮定する。

(i) $-Z^2 = r$ ($=f$の既約因子の個数)。さらに、最小良特異点解消または最小特異点解消において、$M = Z$がいえる。

(ii) (X,o) は種数が$\dfrac{\mu - r + 1}{2}$の、Kodaira 特異点である。ただし、μは $(C,\{0\})$ の Milnor 数。

この証明の (i) については、Mが Zの pull-back で与えられることをもちいて、定理 5.1 と同様にできる。(ii) については、上の Ganther の計算に基づいて、適当なサイクルの交点数に関する議論からできる。

上の定理は、[23]で Brieskorn 型の超曲面特異点について示された結果の一般化となっている。より強く次が言える。

系 4.6 ([23]). (X,o) を $z^n = x^a + y^b$ で定義された超曲面特異点と

する。このとき $n \geqq l.c.m(a,b)$ ならば、(X,o) は種数が$\frac{1}{2}\{(a-1)(b-1)-g.c.m.(q,b)+1\}$ の pencil に付随した Kodaira 特異点である。

REFERENCES

[1]. M. Artin, On isolated rational singularities of surfaces, Amer. J. Math. 88 (1963), 129-138.

[2]. T. Ashikaga, The signature of the Milnor fibre of complex surface singularities on cyclic coverings, preprint.

[3]. W. Barth, C. Peters and A.Van de Ven, Compact Complex Surfaces, Ergebnisse der Mathematik, Band 4, Springer-Verlag, 1984.

[4]. E. Brieskorn and H. Knörrer, Ebene Algebraiche Kurven, Birkhäuser, (1981).

[5]. D.J.Dixon, The fundamental divisor of normal double points of surfaces, Pacific J. Math., 80 (1979), 105-115.

[6]. W. Ebeling and C.T.C. Wall, Kodaira singularities and an extention of Arnolds strange duality, Compositio Math., 56 (1985), 3-77.

[7]. A. Fujiki, On resolution of cyclic quotient singularities, Publ. RIMS Kyoto Univ., 10 (1974), 293-328.

[8]. F.M. Ganther, $-P\cdot P$ for surfaces $z^n = f(x,y)$, Comm. Alg., 23 (1995), 1171-1199.

[9]. S. Iitaka, Algebraic Geometry, Springer-verlag. 1994.

[10]. U. Karras, On pencils of curves and deformations of minimally elliptic singularities, Math. Ann., 247 (1980), 43-65.

[11]. U. Karras, Über Familien komplexer Furven und Deformationen zweidimensionaler Singularitäten,

[12]. G.Kouchnirenko, Polyedres de Newton et nombres de Milnor, Invent. Math., 32 (1976), 1-31.

[13]. V.S.Kulikov., Degenerate elliptic curves and resolution of uni- and bimodal singularities, Funct. Anal. Appl. 9 (1975),69-70.

[14]. H. Laufer, Normal two-dimensional singularities, Ann. Math. Studies. 94 No 71, (1971)

[15]. H. Laufer, On minimally elliptic singularities, Amer. J. Math. 99, No6 (1977), 1257-1295.

[16]. J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces. Ann. Math. Studies. No 61, (1968)

[17]. M.Oka, On the bifurcation of the multiplicity and topology of the Newton boundary, J. Math. Soc. Japan, 31(3), (1979), 435-450.

[18]. M.Reid., Elliptic Gorenstein singularities of surfaces, Preprint (1978).

[19]. O. Riemenschneider, Familien komplexer Räume mit streng pseudokonvexer spezieller Faser, Comment. Math. Helv., 39, (1977), 216-226

[20]. J. Stevens, Elliptic Surface Singularities and Smoothings of curves, Math. Ann., 267 (1984), 239-249.

[21]. J. Stevens, Kulikov Singularities, Thesis, 1985.

[22]. M. Tomari, Maximal-ideal-adic filtration on $R^1\phi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ for normal two-dimensional singularities, Adv. Stud. in Pure Math., 8 (1986), 633-647.

[23]. T. Tomaru, On Gorenstein surface singularities with fundamental genus $p_f \geqq 2$ which satisfy some minimality conditions, Pacific J. Math., 170 (1995), 271-295.

[24]. T. Tomaru, Maximal ideal cycles for $\{z^n = f(x,y)\}$. Preprint (1997)

[25]. P. Wagreich, Elliptic singularities of surfaces, Amer. J. Math., 92 (1970), 421-454.

[26]. S.S.-T. Yau, On maximally elliptic singularities, Trans. Amer. Math. Soc., (2), 257 (1980), 269-329.

(1997.3.28)