数理解析研究所講究録
1037巻 1998年 49-62

強擬凸CR構造の変形と正規孤立特異点の変形

宮嶋公夫* (鹿児島大・理)

正規孤立特異点の変形をその境界上にあるCR構造の変形を通じて調べようという試みは次の事実に基づいている。

(>>) V' を $o \in V'$ のみに特異点を持つ局所解析空間とする。

(V' を C^N に埋め込んでおいて) $V := V' \cap B(\varepsilon)$、$M := V' \cap S_\varepsilon^{2N-1}$ をとる。 但し、$B(\varepsilon)$、S_ε^{2N-1} はそれぞれ o を中心とする半径 ε の開球と超球面を表すものとする。この時、(十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して) V は境界 M を持つ Stein 空間となり、M 上には (V の複素構造を反映した) CR構造が引き起こされる。

(<<) 一方、C^N 内の強擬凸CR構造を持つコンパクト C^∞ 多様体 M に対して、それを境界にするような正規 Stein 空間が一意に存在する。([H-L, Theorem 10.4]+normalization)

$\dim_R M \geq 5$ の場合は、コンパクト強擬凸CR多様体は必ず C^N に埋め込める([B])ので、複素3次元以上の正規孤立特異点の変形は M 上のCR構造の変形を通じて扱える事になる。 この試みは倉西([K])に始まり、赤堀([Ak2])に引き継がれた。 これまでに、$depth\mathcal{O}_V \geq 3$、$\dim_R V \geq 4$ の条件下で、解析空間芽 (V,o) の完備族が M 上のCR構造の変形を使って記述できることが示されている。([Ak2], [B-M], [M1])

* Partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (No. 08640129), the Ministry of Education and Culture of Japan

最近、J. Bland-C. Epstein（[B-E]）によって、局所既約正規 Stein 曲面 $V \subset C^N$ の場合には、M 上の（C^N に）埋め込み可能なＣＲ構造の変形と V の変形との間に、次のような関係があることが明らかにされている：

$V' \subset C^N$ を孤立特異点のみを持つ局所既約正規曲面とする。（[B-E] では、V' 内に複数個の特異点を許しているが、簡単のために）特異点は $o \in V'$ のみとする。　上と同様に、$V := V' \cap B(\varepsilon)$、$M := V' \cap S_{\varepsilon}^{2N-1}$ とする。

（１） M 上のＣＲ構造の stably embeddable な形式変形族は、C^N 内でのV の flat 形式変形族の境界構造となっている。

（２） 逆に、C^N 内での V の flat 形式変形族は、M 上のＣＲ構造の stably embeddable な形式変形族を引き起こす。（この部分は、自明なことを主張しているように見えるが、[B-E]では、考察を（ある条件で）normalize されたＣＲ構造に限っているので、その点が問題になっている。）

（３） 上に述べた対応は、V の flat 変形の無限小変形空間と M 上のＣＲ構造の stably embeddable な変形の無限小変形空間との間の同型を引き起こす。

上述の [B-E] の結果は、M 上のＣＲ構造の stably embeddable な変形が V の flat 変形のＣＲ-analogue であることを示唆していると考えられる。

このことが高次元でも肯定的であることを、変形論で最も基本的な２つのコホモロジー群（無限小変形空間と obstruction空間）の比較に限って、以下に説明したい。実際には、コホモロジーレベルに留まらず、変形族レベルでこのことは肯定的であり、複素３次元以上の V の flat 変形の完備族を M 上のＣＲ構造の stably embeddable な変形族を利用して構成することができる。（[M2]）

以下に於ては常に、$V'\subset C^N$ を $o\in V'$ のみを特異点に持つ局所既約正規解析空間、$V:=V'\cap B(\varepsilon)$、$M:=V'\cap S_\varepsilon^{2N-1}$ とする。また、V の非特異部分を $U:=V\setminus o$、自然包含写像を $\iota_M:M\to U$, $\iota_U:U\to C^N$, $f_0=\iota_U\circ\iota_M:M\to C^N$ で表すことにする。

§ 1 正規孤立特異点の flat 変形

代数幾何学の一般的な表現によれば、解析空間 V の変形族とは、flat 正則写像 $\pi:\mathcal{V}\to T$ で $\pi^{-1}(o)\cong V$ $(o\in T)$ を満たすものをいう。

いま、V' は $\overline{B(\varepsilon)}$ の近傍で、有限個の正則関数によって $h_1(w)=......=h_{m_1}(w)=0$ と定義されているとする。（$\varepsilon>0$ を十分小にとれば）$V=V'\cap B(\varepsilon)$ に対して、$\mathcal{V}$ は $B(\varepsilon)\times T$ 内の方程式 $h_1(w,t)=......=h_{m_1}(w,t)=0$ で与えられるとしてよい。このとき、flat の条件は次のように表現される（[T]）：

$h_1(w),......,h_{m_1}(w)$ の間の任意の一次関係 $p_1(w)h_1(w)+......+p_{m_1}(w)h_{m_1}(w)=0$ は、必ず、$h_1(w,t),......,h_{m_1}(w,t)$ の間の関係 $p_1(w,t)h_1(w,t)+......+p_{m_1}(w,t)h_{m_1}(w,t)=0$ に持ち上がる。

[T] では、V が正規解析空間の場合、$h_1(w,t)=......=h_{m_1}(w,t)=0$ で与えられる変形族の無限小変形は $\left(\frac{\partial}{\partial t}h_1(w,t),......,\frac{\partial}{\partial t}h_{m_1}(w,t)\right)\in Ext^1(\Omega_V^1,O_V)$ $\left(\frac{\partial}{\partial t}\in T_0T\right)$ で与えられ、$specC[t]/(t^2)$ 上の変形族

$h_1(w)+k_{1,1}(w)t=......=h_{m_1}(w)+k_{1,m_1}(w)t=0,$ $\left(k_{1,1}(w),......,k_{1,m_1}(w)\right)\in Ext^1(\Omega_V^1,O_V)$

が $specC[t]/(t^3)$ 上の変形族へ拡張する際の obstruction は $Ext^2(\Omega_V^1,O_V)$ に現われることが示されている。

$M := V' \cap \partial B(\varepsilon)$ とするとき、これらのコホモロジー群と M 上の $\bar{\partial}_b$-コホモロジー群との関係を見やすくするために、$Ext^q(\Omega_V^1, O_V)$ $(q=1,2)$ を $\Omega := V' \cap \left(B(\varepsilon) \setminus \overline{B(\varepsilon')}\right)$ $(0<\varepsilon'<\varepsilon)$ 上の $\bar{\partial}$-コホモロジー群で表現しておく： Kähler 微分の層 Ω_V^1 の定義より次の resolution を得る；

$$0 \longleftarrow \Omega_V^1 \longleftarrow \Omega_{C^N}^1 \otimes O_V \xleftarrow{d_0} O_V^{m_1} \xleftarrow{d_1} O_V^{m_1} \xleftarrow{d_2} \cdots\cdots\cdots$$

但し、$d_0\left(u_1, \ldots\ldots, u_{m_1}\right) := \sum_\sigma u_\sigma dh_\sigma$

$Ext^q(\Omega_V^1, O_V)$ は次の複体のコホモロジー群である；

$$0 \longrightarrow H^0(V, \Theta_{C^N} \otimes O_V) \xrightarrow{d_0^*} H^0(V, O_V^{m_1}) \xrightarrow{d_1^*} H^0(V, O_V^{m_2}) \xrightarrow{d_2^*} \cdots\cdots\cdots$$

V が正規解析空間であることより、それは次の複体のコホモロジー群と同型；

$$0 \longrightarrow H^0(\Omega, \Theta_{C^N|\Omega}) \xrightarrow{d_0^*} H^0(\Omega, O_\Omega^{m_1}) \xrightarrow{d_1^*} H^0(\Omega, O_\Omega^{m_2}) \xrightarrow{d_2^*} \cdots\cdots\cdots$$

さらに、long exact sequence $0 \to \Theta_\Omega \to \Theta_{C^N|\Omega} \to O_\Omega^{m_1} \to O_\Omega^{m_2} \to \cdots\cdots$ を

short exact sequences $0 \to \Theta_\Omega \to \Theta_{C^N|\Omega} \to N_{\Omega/C^N} \to 0,$

$$0 \to N_{\Omega/C^N} \to O_\Omega^{m_1} \to O_\Omega^{m_1} / N_{\Omega/C^N} \to 0,$$

....

に分解することにより、次の表示を得る。

命題1-1

(1) $Ext^0(\Omega_V^1, O_V) \cong H^0(\Omega, \Theta_\Omega)$

(2) $Ext^1(\Omega_V^1, O_V) \cong Ker\left\{H^1(\Omega, \Theta_\Omega) \to H^1(\Omega, \Theta_{C^N|\Omega})\right\}$

(3) $Ext^2(\Omega_V^1, O_V) \cong Ker\left\{H^1(\Omega, N_{\Omega/C^N}) \to H^1(\Omega, O_\Omega^{m_1})\right\}$

系1-2　$depth O_V \geq 3$ の場合

（1）$Ext^1(\Omega_V^1, O_V) \cong H^1(\Omega, \Theta_\Omega)$

（2）$Ext^2(\Omega_V^1, O_V) \cong H^1(\Omega, N_{\Omega/C^N}) \subset H^2(\Omega, \Theta_\Omega)$

$depth O_V \geq 4$ の場合

（3）$Ext^2(\Omega_V^1, O_V) \cong H^2(\Omega, \Theta_\Omega)$

証明　$depth O_V \geq r \;\; \Rightarrow \;\; H^q(\Omega, O_V) = 0 \;\; (1 \leq q \leq r-2)$ より従う。（証終）

§2 CR構造

この節では、CR構造の基本概念を、以後の議論に必要な範囲に限って思いだしておく。とくに、CR構造の変形を微分形式で表現することに主眼がある。詳細は[Ak1] を参照。

定義2-1　M 上のCR構造とは、次の3条件を満たす部分束 $\overline{S} \subset CTM$ のことを言う。

（1）$S \cap \overline{S} = \{0\}$　但し、$S := \overline{(\overline{S})}$、

（2）$rank \dfrac{CTM}{S + \overline{S}} = 1$、

（3）$[\overline{X}, \overline{Y}] \in \Gamma(M, \overline{S}) \quad for \quad \overline{X}, \overline{Y} \in \Gamma(M, \overline{S})$.

CR構造 $\overline{S}$ を持つC^∞多様体 M から複素多様体 U への写像 $f: M \to U$ が正則であるとは、$df(\overline{S}) \subset T^{0,1}U_{|M}$ が成り立つときを言う。　M が U の実超曲面のときは、$\overline{S} := T^{0,1}U_{|M} \cap CTM$ として、自然な包含写像 $\iota_M: M \to U$ が正則になるようなCR構

造が引き起こされることに注意する。

以下に於て、$U := V \setminus o$ から M 上に引き起こされるＣＲ構造を ${}^{\circ}T'' := T^{0,1}U_{|M} \cap CTM$ で表すことにし、${}^{\circ}T' := \overline{{}^{\circ}T''}$、$F := CTM/({}^{\circ}T' + {}^{\circ}T'')$ とする。

以後、（non-canonical な）可微分束としての分解

$$CTM = {}^{\circ}T' + {}^{\circ}T'' + F$$

を固定し、付随する射影をそれぞれ ρ', ρ'', ρ_F で表すことにする。 また、この分解において、$T' := {}^{\circ}T' + F$ とする。

${}^{\circ}T''$ に近いＣＲ構造 $\overline{S}$ に対しては、$\rho''_{|\overline{S}} : \overline{S} \to {}^{\circ}T''$ は同型写像になるので、そのような性質をもつＣＲ構造を「${}^{\circ}T''$ から有限距離にある」とよぶことにする。

命題２-１（[Ak1]）${}^{\circ}T''$ から有限距離にあるＣＲ構造 $\overline{S}$ に対して、

$$\overline{S} = \left\{ \overline{X} - \phi(\overline{X}) \mid \overline{X} \in {}^{\circ}T'' \right\}$$

となるような $\phi \in A_b^{0,1}(T')$ が一意に存在する。

以後、${}^{\phi}T'' = \left\{ \overline{X} - \phi(\overline{X}) \mid \overline{X} \in {}^{\circ}T'' \right\}$（$\phi \in A_b^{0,1}(T')$）と表すことにする。

命題２-２（[Ak1]）${}^{\phi}T''$ がＣＲ構造になるのは、ϕ が次の微分方程式を満たすときに限る。 $P_M(\phi) := \overline{\partial}_b \phi - R_2(\phi) + R_3(\phi) = 0$ in $A_b^{0,2}(T')$

$\overline{\partial}_b \phi$, $R_2(\phi)$, $R_3(\phi)$ $\in A_b^{0,2}(T')$ の定義については [Ak1] 参照。

注意． この notation は [Ak1] の notation とは多少異なる。$\left\{ \overline{X} - \phi(\overline{X}) \mid \overline{X} \in {}^{\circ}T'' \right\}$ は [Ak1] の notation では ${}^{-\phi}T''$ である。ここでは、複素構造を $A_U^{0,1}(T^{1,0}U)$ の元によって

表すときの従来の表記法に倣った。従って、$P_M(\phi)$ と [Ak1] の $P(\phi)$ との関係は、$P_M(\phi)=-P(-\phi)$ となっている。

§3 CR構造の変形

§2でのCR構造に関する概念をパラメータ付きの形に一般化すると次のようになる。

パラメータ空間として、解析集合芽 $(T,0)\subset(C^d,0)$ をとる。$(T,0)$ はイデアル $I_T\subset C\{t_1,\dots,t_d\}$ で定義されているとする。 以下においては、$A^{0,1}_{b,k}(T')$ で 空間 $A^{0,1}_b(T')$ の k 次 Sobolev norm に関する完備化を表す。

定義3-1 CR構造の変形族とは、次の（1）、（2）を満たすような $\phi(t)\in A^{0,1}_b(T')[[t_1,\dots,t_d]]\cap\cap_{k>>0}A^{0,1}_{b,k}(T')\{t_1,\dots,t_d\}$ のことを言う。

（1） $\phi(0)=0$、

（2） $P_M(\phi(t))\equiv 0 \mod I_T$

定義3-2 $\pi:X\to T$ を複素多様体の変形族とする。この時、C^∞ 写像の変形族 $\Phi:M\times T\to X$ が（CR構造の変形族 $\phi(t)$ に関して）正則であるとは、

$$(\bar\partial_b-\phi(t))\Phi(t)\equiv 0 \mod I_T$$

を満たすときを言う。

とくに、U の変形族 $\pi:U\to T$ への埋め込み $\Phi:M\times T\to U$ から、M 上に、Φ を正則にするような（定義3-2の方程式で特徴付けられる）CR構造の変形族が引

き起こされる。

定義3-3　CR構造の変形族 $\phi(t)$ が stably embeddable であるとは、$\Phi(0)=f_0$ を満たすような正則写像の変形族 $\Phi: M\times T\to C^N\times T$ が存在するときを言う。

§4 CR構造の stably embeddable 変形（無限小変形と obstruction）

無限小変形

$specC[t]/(t^2)$ 上のCR構造の stably embeddable 変形族を考える。定義3-4より、

$\phi(t):=\phi_1 t \quad \left(\phi_1\in A_b^{0,1}(T')\right)$ が stably embeddable 変形族

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_M(\phi(t))\equiv\bar\partial_b\phi_1 t=0 & \mathrm{mod}(t^2),\\ \exists\Phi(t):=f_0+f_1t \quad \left(f_1\in A_b^0(T^{1,0}C^N{}_{|M})\right) & \\ \qquad s.t. \quad \left(\bar\partial_b-\phi_1 t\right)\left(f_0+f_1t\right)\equiv\bar\partial_b f_1 t-\rho^{1,0}df_0\phi_1 t=0 & \mathrm{mod}(t^2).\end{cases}$$

$\phi(t):=\phi_1 t$ が trivial family $U\times specC[t]/(t^2)\to specC[t]/(t^2)$ から引き起こされる

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists G:=\iota_M+g_1t: M\times specC[t]/(t^2)\to U\times specC[t]/(t^2) \quad \left(g_1\in A_b^0(T^{1,0}U_{|M})\right) & \\ \qquad s.t. \quad \left(\bar\partial_b-\phi_1t\right)\left(\iota_M+g_1t\right)\equiv\bar\partial_b g_1t-\rho^{1,0}\phi_1t=0 & \mathrm{mod}(t^2).\end{cases}$$

従って、stably embeddable 変形の無限小変形空間は

$$Ker\left\{\rho^{1,0}\circ df_0: H_b^1(T')\to H_b^1(T^{1,0}C^N{}_{|M})\right\}$$

となる。

Obstruction

$\phi_1\in A_b^{0,1}(T'),\ \ f_1\in A_b^0(T^{1,0}C^N{}_{|M})$ が $\bar\partial_b\phi_1=0,\ \ \bar\partial_b f_1t-\rho^{1,0}df_0\phi_1t=0$ を満たすとする。

$\exists\phi(t):=\phi_1t+\phi_2t^2 \quad \left(\phi_2\in A_b^{0,1}(T')\right),\ \ \exists\Phi(t):=f_0+f_1t+f_2t^2 \quad \left(f_2\in A_b^0(T^{1,0}C^N{}_{|M})\right)$

$$s.t.\begin{cases} P_M(\phi(t))\equiv\bar\partial_b\phi_2t^2-R_2(\phi_1)t^2=0 & \mathrm{mod}(t^3)\\ \left(\bar\partial_b-\phi_1t-\phi_2t^2\right)\left(f_0+f_1t+f_2t^2\right)\equiv\bar\partial_b f_2t^2-\rho^{1,0}df_0\phi_2t^2-\phi_1f_1t^2=0 & \mathrm{mod}(t^3)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad \exists \phi_2 \in A_b^{0,1}(T'), \qquad \exists f_2 \in A_b^0(T^{1,0}C^N{}_{|M})$

$s.t. \qquad \bar{\partial}_b f_2 - \rho^{1,0} df_0 \phi_2 - \phi_1 f_1 = 0$

$(\because \bar{\partial}_b^{\phi*}(\bar{\partial}_b - \phi)f = -P_M(\phi)f$ ([Ak1, Proposition 3.2]) より)

$\Leftrightarrow \quad r(\phi_1 f_1) = 0 \text{ in } H_b^1(N_{U/C^N{}_{|M}})$.

次の命題に注意すれば、obstruction 空間は

$$Ker\{H : H_b^1(N_{U/C^N{}_{|M}}) \to \oplus^{m_1} H_b^1(1_M)\}$$

という事になる。ここで、H は束準同型 $T^{1,0}C^N{}_{|U} \ni v \to (v(h_1),......,v(h_{m_1})) \in \oplus^{m_1} 1_U$ から引き起こされる写像を表わす。(この写像は、§1で、d_0^* から引き起こされる写像 $N_{\Omega/C^N} \to O_\Omega^{m_1}$ に他ならないことに注意。)

命題 4 - 1 $\quad Hr(\phi_1 f_1) = 0 \text{ in } \oplus^{m_1} H_b^1(1_M)$.

補題 4 - 2 $\quad \exists k_1 \in \oplus^{m_1} H^0(\overline{B(\varepsilon)}, O)$ s.t. $(h_0 + k_1 t) \circ (f_0 + f_1 t) \equiv 0 \bmod (t^2)$.

証明 $\bar{\partial}_b H f_1 = H \bar{\partial}_b f_1 = H\rho^{1,0} df_0 \phi_1 = 0$ なので $Hf_1 \in \oplus^{m_1} H_b^0(1_M)$.

Generalized Bochner extension theorem ([H-L, Theorem 12.1']) により、Hf_1 は V 上の正則関数に拡張される。更に、[B-E, Theorem A.1] または [Ad] により、$-k_1 \in \oplus^{m_1} H^0(\overline{B(\varepsilon)}, O)$ へ拡張される。(証終)

命題 4 - 1 の証明

$(h_0 + k_1 t) \circ (f_0 + f_1 t) \equiv 0 \bmod (t^2)$ に $\phi_1 t$ を apply する。

$$Hr(\phi_1 f_1) + \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 h}{\partial w^\alpha \partial w^\beta} f_1^\beta (\rho^{1,0} df_0 \phi_1)^\alpha + \sum_\alpha \frac{\partial k_1}{\partial w^\alpha} (\rho^{1,0} df_0 \phi_1)^\alpha = 0.$$

ここで、

$$\rho^{1,0}df_0\phi_1=\bar{\partial}_b f_1、$$

$$H\left(\bar{\partial}_b f\right)t+\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2 h}{\partial w^\alpha \partial w^\beta}f_1^\beta\left(\rho^{1,0}df_0\phi_1\right)^\alpha t^2\equiv\bar{\partial}_b h(f_0+f_1 t)\ \mathrm{mod}\ (t^3)、$$

$$\sum_\alpha\frac{\partial k_1}{\partial w^\alpha}\left(\bar{\partial}_b f_1^\alpha\right)t^2\equiv\bar{\partial}_b k_1(f_0+f_1 t)t\ \mathrm{mod}\ (t^3)$$

が成り立つことに注意すると $Hr(\phi_1 f_1)$ が $\bar{\partial}_b$-exact であることを得る。（証終）

§5 V の flat 変形族との比較

[T] により、V の flat 変形に関して、無限小変形空間と obstruction 空間はそれぞれ $Ext^1(\Omega_V^1,O_V)$、$Ext^2(\Omega_V^1,O_V)$ である。　また、V が正規であることより

$$Ext^1(\Omega_V^1,O_V)\cong Ker\left\{H^1(\Omega,\Theta_\Omega)\to H^1(\Omega,\Theta_{C^N|\Omega})\right\}、$$

$$Ext^2(\Omega_V^1,O_V)\cong Ker\left\{H^1(\Omega,N_{\Omega/C^N})\to H^1(\Omega,\oplus^{m_1}O_\Omega)\right\}$$

が成り立っていた。（§１参照）

命題５-１

（１）$Ker\left\{H^1(\Omega,\Theta_\Omega)\to H^1(\Omega,\Theta_{C^N|\Omega})\right\}\cong Ker\left\{\rho^{1,0}\circ df_0:H_b^1(T')\to H_b^1(T^{1,0}C^N{}_{|M})\right\},$

（２）$Ker\left\{H^1(\Omega,N_{\Omega/C^N})\to H^1(\Omega,\oplus^{m_1}O_\Omega)\right\}\cong Ker\left\{H:H_b^1(N_{U/C^N|M})\to\oplus^{m_1}H_b^1(1_M)\right\}.$

証明（１）最初に、$\rho^{1,0}\circ df_0=d\iota_U\circ\rho^{1,0}$ が成り立ち、更に、$\rho^{1,0}{}_{|T'}:T'\to T^{1,0}U_{|M}$ は微分複体の同型 $\left(A_b^{0,q}(T'),\bar{\partial}_b\right)\cong\left(A_b^{0,q}(T^{1,0}U_{|M}),\bar{\partial}_b\right)$ を引き起こすから、次の同型を示せばよいことを注意しておく：

$$Ker\left\{H^1(\Omega,\Theta_\Omega)\to H^1(\Omega,\Theta_{C^N|\Omega})\right\}\cong Ker\left\{d\iota_U:H_b^1(T^{1,0}U_{|M})\to H_b^1(T^{1,0}C^N{}_{|M})\right\}.$$

次の２つの制限写像を比較する；

$$\begin{array}{c} Ker\left\{H^1(\Omega,\Theta_\Omega)\to H^1(\Omega,\Theta_{C^N|\Omega})\right\} \\ \uparrow \\ Ker\left\{H^1(\overline{\Omega},\Theta_U)\to H^1(\overline{\Omega},\Theta_{C^N|U})\right\} \\ \downarrow \\ Ker\left\{H_b^1(T^{1,0}U_{|M})\to H_b^1(T^{1,0}C^N{}_{|M})\right\} \end{array}$$

この比較の為に、正則ベクトル束の完全列　$0\to T^{1,0}U\to T^{1,0}C^N{}_{|U}\to N_{U/C^N}\to 0$

から得られる次のコホモロジー完全列の間の制限写像を比較する；

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(\Omega,T^{1,0}C^N{}_{|U}) & \to & H^0(\Omega,N_{U/C^N}) & \to & H^1(\Omega,T^{1,0}U) & \to & H^1(\Omega,T^{1,0}C^N{}_{|U}) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ (*)H^0(\overline{\Omega},T^{1,0}C^N{}_{|U}) & \to & H^0(\overline{\Omega},N_{U/C^N}) & \to & H^1(\overline{\Omega},T^{1,0}U) & \to & H^1(\overline{\Omega},T^{1,0}C^N{}_{|U}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_b^0(T^{1,0}C^N{}_{|M}) & \to & H_b^0(N_{U/C^N{}_{|M}}) & \to & H_b^1(T^{1,0}U_{|M}) & \to & H_b^1(T^{1,0}C^N{}_{|M}) \end{array}$$

まづ、Lewy extension theorem より、次の補題を得る。

補題５-２　$\Omega_\delta^\varepsilon := V'\cap\left(B(\varepsilon)\setminus\overline{B(\delta)}\right)$　$(\varepsilon'<\delta<\varepsilon)$ とおく。

$$\lim_{\substack{\to \\ \delta\to\varepsilon-0}} H^0(\overline{\Omega}_\delta^\varepsilon,T^{1,0}C^N{}_{|U})\cong H_b^0(T^{1,0}C^N{}_{|M})、$$

$$\lim_{\substack{\to \\ \delta\to\varepsilon-0}} H^0(\overline{\Omega}_\delta^\varepsilon,N_{U/C^N})\cong H_b^0(N_{U/C^N{}_{|M}}).$$

補題５-２と (*) より、

$\lim\limits_{\to\ \delta\to\varepsilon-0} Ker\left\{H^1(\overline{\Omega}_\delta^\varepsilon,\Theta_U)\to H^1(\overline{\Omega}_\delta^\varepsilon,\Theta_{C^N|U})\right\}\cong Ker\left\{H_b^1(T')\to H_b^1(T^{1,0}C^N{}_{|M})\right\}$ を得る。　更に、次に示す $Ker\left\{H^1(\overline{\Omega},\Theta_U)\to H^1(\overline{\Omega},\Theta_{C^N|U})\right\}\cong Ker\left\{H^1(\Omega,\Theta_U)\to H^1(\Omega,\Theta_{C^N|U})\right\}$ より、$Ker\left\{H^1(\overline{\Omega}_\delta^\varepsilon,\Theta_U)\to H^1(\overline{\Omega}_\delta^\varepsilon,\Theta_{C^N|U})\right\}$ は δ によらない事が分かる。

$Ker\left\{H^1(\overline{\Omega},\Theta_U)\to H^1(\overline{\Omega},\Theta_{C^N|U})\right\}\cong Ker\left\{H^1(\Omega,\Theta_U)\to H^1(\Omega,\Theta_{C^N|U})\right\}$　を示す為には、この制限写像が単射であることを示せば十分。なぜなら、命題１-１より、$Ker\left\{H^1(\Omega,\Theta_U)\to H^1(\Omega,\Theta_{C^N|U})\right\}$ は $0<\varepsilon'<\varepsilon$ の取り方によらないから、この制限写像

は全射であることが分かるから。

この制限写像が単射であることを示すために、特異点解消 $\varpi:\tilde{V}'\to V$ を取り、$X:=\varpi^{-1}(V'\cap B(\varepsilon))$、$\overline{X}:=\varpi^{-1}(V'\cap\overline{B(\varepsilon)})$ とする。

$\overline{\partial}$-closed な $\phi_1\in A^0_{\Omega}(T^{1,0}U)$ に対して、

$\exists\overline{g}_0\in A^0_{\Omega}(T^{1,0}C^N{}_{|U})$ $s.t.$ $\phi_1=\overline{\partial}\overline{g}_0=\overline{\partial}\phi_0$ on Ω $\left(\phi_0\in A^0_{\Omega}(T^{1,0}U)\right)$ と仮定する。

この時、正則関数の組 $\overline{g}_0-\phi_0$ は $V\cap\partial B(\varepsilon')$ を越えて（内側に）C^∞ に拡張可能だから、$\phi_1\in A^{0,1}_{\overline{X}}(T^{1,0}X)$, $\phi_0\in A^0_X(T^{1,0}X)$ で $\phi_1=\overline{\partial}\phi_0$ on X が成り立つと仮定してよい。

そうすると、[B-E, Lemma 3.1] より、$\exists\phi_0'\in A^0_{\overline{X}}(T^{1,0}X)$ $s.t.$ $\phi_1=\overline{\partial}\phi_0'$ on $\overline{X}$ を得る。

（２）の証明も同様：　同様な議論を完全列

$0\to N_{U/C^N}\to\oplus^{m_1}1_U\to\oplus^{m_1}1_U/N_{U/C^N}\to 0$ に対して行なうことにより、

$$\begin{array}{c} Ker\left\{H^1(\Omega,N_{U/C^N})\to H^1(\Omega,\oplus^{m_1}1_U)\right\} \\ \uparrow \end{array}$$

制限写像 $Ker\left\{H^1(\overline{\Omega},N_{U/C^N})\to H^1(\overline{\Omega},\oplus^{m_1}1_U)\right\}$ の比較ができる。

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ Ker\left\{H^1_b(N_{U/C^N{}_{|M}})\to H^1_b(\oplus^{m_1}1_M)\right\} \end{array}$$

但し、この場合は、N_{U/C^N} は X 上のベクトル束に拡張できるとは限らないので、制限写像 $Ker\left\{H^1(\overline{\Omega},N_{U/C^N})\to H^1(\overline{\Omega},\oplus^{m_1}1_U)\right\}\to Ker\left\{H^1(\Omega,N_{U/C^N})\to H^1(\Omega,\oplus^{m_1}1_U)\right\}$ が単射であることを示す部分では、N_{U/C^N} の resolution $0\to T^{1,0}U\to T^{1,0}C^N{}_{|U}\to N_{U/C^N}\to 0$ を利用する必要がある。（証終）

系５-３　$depthO_V\geq 3$ の場合

（１）$Ext^1(\Omega^1_V,O_V)\cong H^1_b(T')$

（２）$Ext^2(\Omega^1_V,O_V)\cong H^1_b(N_{\Omega/C^N{}_{|M}})\subset H^2_b(T')$

$depthO_V\geq 4$ の場合

（３）$Ext^2(\Omega^1_V,O_V)\cong H^2_b(T')$

証明　[Y, p.81~p.82] の計算により、$H^q(\Omega, O_\Omega) \cong H_b^q(1_M)$　$(1 \le q \le n-2)$ が成り立つ。

（証終）

M 上のＣＲ構造の変形に関する無限小変形空間と obstruction 空間はそれぞれ、$H_b^1(T')$　と　$H_b^2(T')$　であった（[Ak2]）ことに注意すると、ＣＲ構造の stably embeddable変形だけを考えることが flat変形のＣＲ-analogueであろうと予想される。実際、[M2] では、M 上のCR構造の stably embeddable 変形に関して次の定理が得られている。

定理５-４（[M2]）$\dim_C V' \ge 3$ とする。　この時、

（１）M 上のCR構造の stably embeddable 変形の（倉西の意味での） semi-universal 変形族が存在する。

（２）そのパラメータ空間は、解析空間芽 (V,o) の semi-universal 族のパラメータ空間と双正則になる。

注．　　　系５-３より、定理５-４は（[Ak2], [B-M], [M1]　で得られていた）$depthO_V \ge 3$、$\dim_C V' \ge 4$ の条件の下での「ＣＲ構造の変形による、複素３次元以上の正規孤立特異点の完備族の構成」を完全にしたものと言える。

References

[Ad] Adachi, K.: Continuation of holomorphic functions from subvarieties to pseudoconvex domains, Kobe J. Math. 1 1 (1994), 33-47

[Ak1] Akahori, T.: Intrinsic formula for Kuranishi's $\bar{\partial}_b^{\varphi}$, Publ. R.I.M.S., Kyoto University 14 (1978), 615-641

[Ak2] ------------ : The new estimate for the subbundles E_j and its application to the deformation of the boundaries of strongly pseudo convex domains, Inv. math. 63 (1981), 311-334

[B-E] Bland, J. and Epstein, C.L.: Embeddable CR-structures and deformations of pseudoconvex surfaces Part I: Formal deformations, J. Alg. Geom. 5 (1996), 277-368

[B] Boutet de Monvel: Integration des equations de Cauchy-Riemann induites formelles, Seminaire Goulaoic-Lions-Schwartz, Expose (1974-1975)

[B-M] Buchweitz, R. O. and Millson, J. J.: CR geometry and deformations of isolated singularities, Memoirs of A. M. S., Vol. 125, No. 597, 1997

[H-L] Harvey, F. and Lawson, H.: On the boundaries of complex analytic varieties, I, Ann. of Math. 102 (1975), 223-290

[K] Kuranishi, M.: Deformations of isolated singularities and $\bar{\partial}_b$, Preprint, Columbia University, 1973

[M1] Miyajima, K.: Deformations of a complex manifold near a strongly pseudo-convex real hypersurface and a realization of Kuranishi family of storngly pseudo-convex CR structures, Math. Z. 205 (1990), 593-602

[M2] -------------- : CR construction of the flat deformations of normal isolated singularities, Preprint

[T] Tjurina, G. N.: Locally semi-universal flat deformations of isolated singularities of complex spaces, Math. USSR, Izv. 3 (1969), 976-1000

[Y] Yau, S. S.-T.: Kohn-Rossi cohomology and its application to the complex Plateau problem I, Ann. of Math. 113 (1981), 67-110