

# Dynamics of skew tent maps

市村 圭子 (Keiko ICHIMURA)

伊藤 みちほ (Michiho ITO)

お茶の水女子大学大学院 理学研究科情報科学専攻

## 1. 序

実数上で定義された  $(a, b)$  をパラメータとする *skew tent maps*

$$f_{a,b} = \begin{cases} ax + 1, & x < 0 \\ -bx + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(a, b) \in D = \{(a, b); a > 0, b > 1, a + b \geq ab\}$$

の、区間  $I_{a,b} = [f_{a,b}^2(0), f_{a,b}(0)]$  上の力学系を解析する。その力学系の性質はパラメータ  $(a, b)$  に依存しているため、パラメータを変えたときに起こる力学系の変化を見るための分岐図を Fig. 1 にしめす。ここでは、 $a = \frac{1}{2}$  と固定し  $b$  の値を 1.5 から 13 まで連続的に変化させた。

[ITN79b] によって  $f_{a,b}$  の力学系的性質によるパラメータ領域  $D$  の分割が得られている:

$$D = \cup_{k=2}^{\infty} D_k, \quad D_k = D_k^A \cup D_k^B \cup D_k^*$$

ここで、

$$D_k^A = \{(a, b) \in D_k; a^{k-1}b \leq 1\},$$

$$D_k^B = \{(a, b) \in D_k; a^{k-1}b > 1, a + b \geq a^{k-2}b^2\}.$$

$D_k^B$  は繰り込み理論が適用できる領域である。特に  $k = 2$  のときは  $D_2^B = D_0$  と呼ぶ。  $D_0$  に属する  $(a, b)$  に対して  $f_{a,b}$  は 2 の冪のレベルでの繰り込みが可能であり、次のように分割される:

$$D_0 = \cup_{m=1}^{\infty} D_0^m, \quad (a, b) \in D_0^m \text{ のとき } f_{a,b} \text{ は } 2^m \text{ 個のカオス区間を持つ。}$$

$k \geq 3$  のときも繰り込み可能である。例えば、 $k = 3$  のときの繰り込みの様子は Fig. 3 のようになっている。

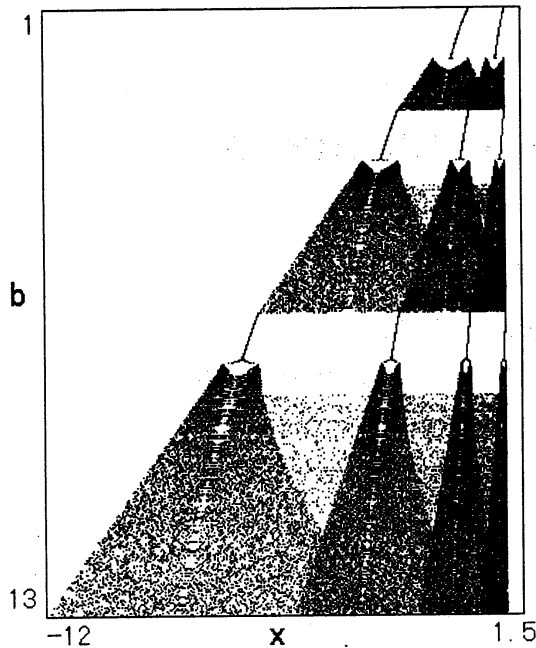


Fig. 1.  $f_{a,b}(a = \frac{1}{2}, 1 \leq b \leq 13)$  の分岐図.  $b$  の値によって、吸引的な周期軌道が現れたり吸引的な区間が現れるのが見て取れる。実は、その区間上で  $f_{a,b}$  はカオス的である。

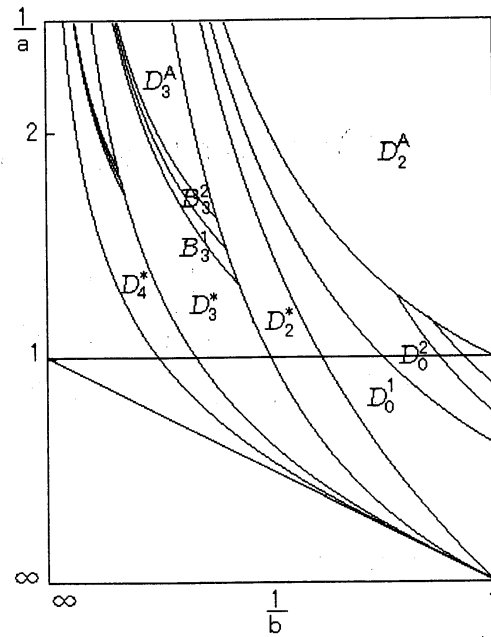


Fig. 2.  $D$  の分割図.  $D_k^A$  では  $f_{a,b}$  は吸引的な  $k$  周期点を持つ。  $D_k^*$  ではひとつのカオス区間を持つ。

繰り込み関数の力学系の性質を調べるために領域  $A_k (k \geq 3)$  を

$$A_k = \{(a, b) \in D; a > b^2, (a+b)b^{\frac{k-2}{k}} > (b+1)a^{\frac{k-1}{k}}\}$$

とおく。各  $A_k$  の繰り込み関数による引きもどしを考えることによって、 $D_k^B$  はさらに次のように分割される [IN97b]:

$$\begin{aligned} D_k^B &= B_k^2 \cup B_k^1, \\ B_k^2 &= \{(a, b) \in D_k^B; a+b \geq a^{2k-2}b^3\} \\ B_k^1 &= \{(a, b) \in D_k^B; a+b < a^{2k-2}b^3\} \end{aligned}$$

$(a, b) \in B_k^2$  のとき  $f_{a,b}$  は  $2k$  個のカオス区間を持ち、 $(a, b) \in B_k^1$  のとき  $f_{a,b}$  は  $k$  個のカオス区間を持つ。

各領域の境界は  $a$  と  $b$  の代数方程式で与えられるので、代数曲線による  $D$  の分割を行うと Fig. 2 が得られる。

2章では領域  $A_k$  の境界を表す代数方程式の結果を述べる。3章では、この関数族のエントロピーについての数値実験と、[MV92]にある結果の一部訂正を行う。

本文での力学系に関する基本的な用語の定義は、[Dev89], [CE80], [IN97a]に、特に繰り込みに関しては [IN97b] に従う。またグラフィックスおよび数値計算は、Risa/Asir, symbolic and algebraic computation system, Version 940420, FUJITSU LABORATORIES

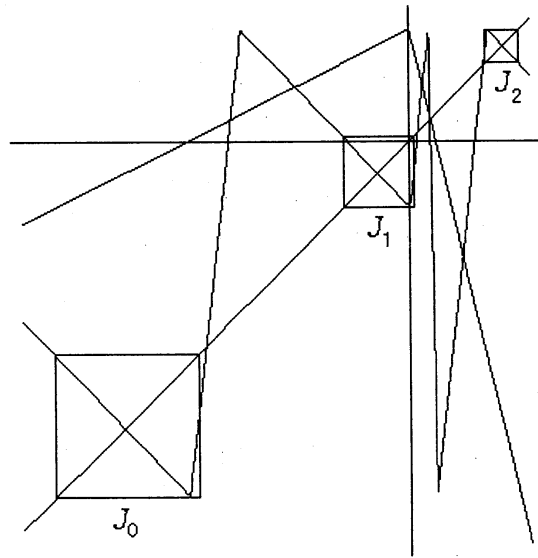


Fig. 3.  $f_{a,b}^3|_{J_i} \sim f_{ab^2, a^2b}$

LIMITED., UBASIC ver 8.88 (木田 祐司), Mathematica 3.0, Wolfram Research, Inc. による。

## 2. $A_k$ ( $k \geq 3$ ) の境界について

前節で定義した領域  $A_k$  の境界を表す代数方程式

$$(a+b)b^{\frac{k-2}{k}} = (b+1)a^{\frac{k-1}{k}}$$

について次の結果が得られた:

**命題 1**  $A_k$  の境界の代数曲線の定義方程式は  $\Gamma_k(a, b) = 0$  である。ここで、

$$\Gamma_k(a, b) = \lambda_0 a^{k-1} + \lambda_1 a^{k-2} + \cdots + \lambda_{k-2} a + \lambda_{k-1}$$

$$\lambda_j = \begin{cases} b^{k-2}, & j = 0 \\ b^{2j-2} \{ b^k + {}_k C_1 b^{k-1} + \cdots + {}_k C_j b^{k-j} - (b+1)^k \}, & j \geq 1 \end{cases}$$

**証明.**  $A_k$  の境界を決定する代数方程式は次のように因数分解される:

$$\begin{aligned} (a+b)^{\frac{k-2}{k}} - (b+1)^{\frac{k-1}{k}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (a+b)^k b^{k-2} - (b+1)^k a^{k-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-b^2) \Gamma_k(a, b) &= 0 \end{aligned}$$

$(a, b) \in A_k$  ならば  $a - b^2 > 0$  より、結果  $\Gamma_k(a, b) = 0$  が  $A_k$  の境界を決定する。  $\square$

**例.**  $k = 3, 4, 5$  のとき  $\Gamma_k(a, b)$  は以下の式になる:

$$\Gamma_3(a, b) : -b^2 + (a^2 - 3a)b - a = 0,$$

$$\begin{aligned}\Gamma_4(a, b) &: -b^4 - 4ab^3 + (a^3 - 6a^2 - a)b^2 - 4a^2b - a^2 = 0, \\ \Gamma_5(a, b) &: -b^6 - 5ab^5 + (-10a^2 - a)b^4 + (a^4 - 10a^3 - 5a^2)b^3 \\ &\quad + (-10a^3 - a^2)b^2 - 5a^3b - a^3 = 0\end{aligned}$$

さらに  $k = 3, 4, 5$  の場合について  $\Gamma_k(a, b)$  は絶対既約であることが Asir によって確かめられる ([YNT90], Appendix 参照)。一般的な  $k \geq 6$  の場合の  $\Gamma_k(a, b)$  の絶対既約性に対しては、考慮中である。

### 3. Topological entropy

ここでは、skew tent map 関数族の topological entropy について考察を行う。Kneading 列の定義及び順序の入れ方は、[Dev89][Ich] による。topological entropy の定義を行う。

**定義** ([MT88])  $f$  を skew tent map とし、ラップ (*lap*) を  $f$  がその上で単調であるような最大区間、 $l(f^n)$  を  $f^n$  のラップ数とする。このとき次式で表される  $h(f)$  を  $f$  の topological entropy と呼ぶ；

$$h(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log l(f^n)^{\frac{1}{n}}$$

極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} l(f^n)^{\frac{1}{n}}$  が存在して有限値をとることは、[MT88] によって示されている。上記のように定義された topological entropy を本論中では、以後単にエントロピーと呼び、 $h(f_{a,b}) = h(a, b)$  と書くことにする。

この関数族のエントロピーについては、主に次の2本の論によって、その単調性についての結果が示されている。ここでは、それらの結果を簡単に述べ、特に、[MV92] については一部訂正を行う。始めに、パラメータ対に対して、以下のような順序を導入する；

$$(a, b) < (a', b') \text{ if } a < a' \text{ and } b \leq b' \text{ or } a \leq a' \text{ and } b < b'. \quad (1)$$

#### 3.1. Misiurewicz と Visinescu の仕事

彼らは、 $D$  の部分領域  $\{(a, b) \in D; a \geq 1\}$  についての結果を示している。[MV91] の Theorem A において、

$$(a, b) < (a', b') \Rightarrow K(a, b) < K(a', b').$$

を得ている。また、Theorem B では skew tent map と tent map  $T_a(= f_{a,a})$  の kneading 列の以下のような関係付けも行っている：

$$K(a, b) = K(T_{a'}) \quad \text{for some } a' (1 < a' \leq 2).$$

tent map  $T_a$  のエントロピーが  $\log a$  であることは、よく知られている。従って、Theorem B の Corollary として、

$$(a, b) < (a', b') \Rightarrow h(a, b) < h(a', b'). \quad (2)$$

の結果を得られている。

### 3.2. Marcuard と Visinescu の仕事

彼らは、残りの  $D$  の部分領域  $\{(a, b) \in D; a \leq 1\}$  に対して結果を示している ([MV92])。この領域を、更に以下のように部分領域に分割している：

$$D = \bigcup_{m=1}^{\infty} R_m (= D_{m+1}) \quad \text{where} \quad R_m = A_m (= D_{m+1}^A) \cup B_m (= D_{m+1}^B) \cup C_m (= D_{m+1}^*).$$

このとき、Theorem 2 の Corollary として以下の結果を述べている：

$$\begin{aligned} \text{let } (a', b'), (a, b) \in \{(a, b) \in D; a \leq 1\} \text{ such that } (a', b') > (a, b), \\ \text{if } (a, b), (a', b') \in A_m \cup B_m \text{ then } h(a', b') = h(a, b). \end{aligned} \quad (3)$$

### 3.3. Milnor と Thurston による kneading 列理論の応用

[MT88] では、区間上の 1 次元連続関数に対し kneading 列を用いたエントロピーの計算方法を与えている。このアルゴリズムから、skew tent map のエントロピーは、kneading 列によって決まることが分かる。従って等 kneading 列曲線を描かせることによって、等エントロピー曲線を観察することができる (但し、kneading 列に大小関係がついても、エントロピーが等しくなることはある)。 (3) 式で、エントロピーが定数であると主張されている  $D_0$  と  $D_3^B$  領域について、Fig. 4 に kneading 列が周期的になるような  $a, b$  の代数曲線を描かせた。Fig. 4 を見て分かるように、 $D_0$  領域 (薄い色の部分) では、(1) の順序に対して狭義単調性の成り立つ部分領域  $\{(a, b) \in D; a \geq 1\}$  から、[MV92] の主張にある領域  $\{(a, b) \in D; a \leq 1\}$  に向かって等エントロピー曲線が延びている。この事から以下の予想を得る：

**予想**  $D_0$  の  $a \leq 1$  となる部分領域において、エントロピーは定数でない。

この予想に対し、[MT88] のアルゴリズムを用いて  $D_0$  と  $D_3^B$  のエントロピーの値の数値実験を行った。

### 3.4. エントロピー計算のアルゴリズム

$K(a, b)$  に対し  $\epsilon_i, D(t)$  を以下のように決める：

$$\epsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{if } s_i = L \text{ (i.e., } f_{a,b}^i(0) < 0) \\ -1, & \text{if } s_i = R \text{ (i.e., } f_{a,b}^i(0) > 0) \\ \epsilon_n, & \text{s.t. } \epsilon_1 \cdots \epsilon_n = 1 \text{ if } s_i = C \text{ (i.e., } f_{a,b}^i(0) = 0) \end{cases} \quad (i \geq 1),$$

$$D(t) = 1 + \epsilon_1 t + \epsilon_1 \epsilon_2 t^2 + \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 t^3 + \cdots$$

このとき、 $L(t)$  について以下が得られている：

$$\begin{aligned} L(t) &= \frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2 D(t)} \\ &= \sum \ell(f^n) t^{n-1} \end{aligned} \quad (4)$$

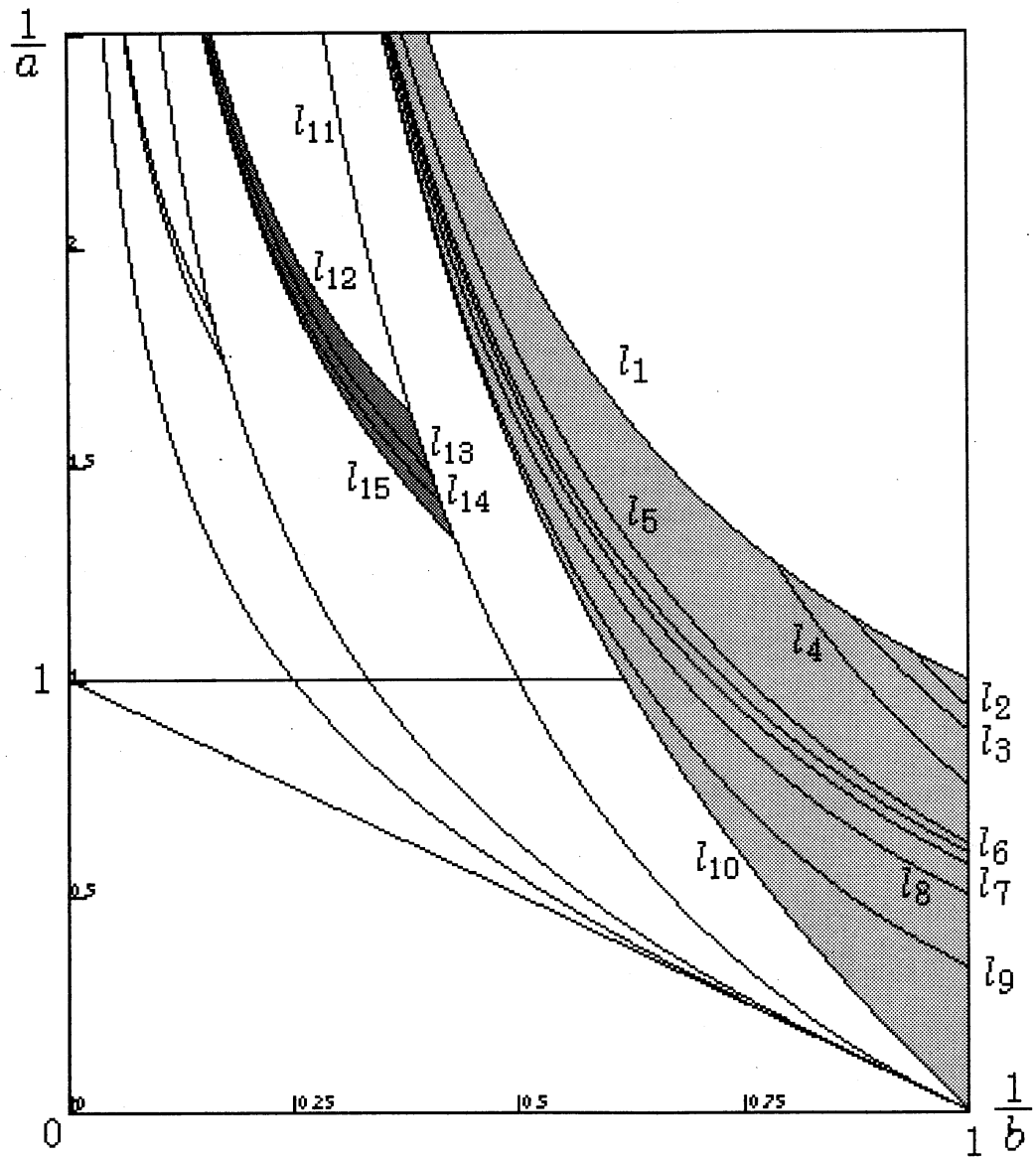


Fig. 4.  $D_0$ (薄い色の領域)と  $D_2^B$ (濃い色の領域)の等エントロピー曲線。 $a \leq 1$ の範囲では、 $D_0$ も  $D_2^B$ もエントロピーが定数であると主張されているが、 $D_0$ では、狭義単調性が成り立つ  $a \geq 1$ の範囲から  $a \leq 1$ の範囲に向かって、連続的に等エントロピー曲線が延びている様子が観察される。

### 3.5. 計算結果

3.4. 節より、(4) を級数展開したときの  $t^{n-1}$  の係数が  $f^n$  のラップ数になることが分かる。従って、級数展開の計算を UBASIC を用いることにより、エントロピーの近似値が得られる。以下にその計算結果を示した。 $l_1 \sim l_{10}$  は、 $D_0$  の境界及び内部の曲線、 $l_{11} \sim l_{15}$  は、 $D_3^B$  の境界及び内部の曲線であり、 $l(f^{3000})^{\frac{1}{3000}}$  の値を示した (kneading 列の  $\star$  を用いた表記法については [Ich] を参照)。

定義方程式	Kneading 列	$l(f^{3000})^{\frac{1}{3000}}$
$l_1 : ab = 1$	$\overline{RL}$	1.0053519603897340097
$l_2 : a + b = a^{11}b^{22}$	$R^{\star 4} \star \overline{RLR}$	1.0273913089995451009
$l_3 : a + b = a^6b^{11}$	$R^{\star 3} \star \overline{RLR}$	1.0483094742871967727
$l_4 : a + b = a^3b^6$	$\overline{RLR} \star \overline{RLR}$	1.0933323342295228112
$l_5 : a + b = a^2b^3$	$\overline{RLRRRL}$	1.1910571508688149661
$l_6 : a^6b^8 - a^5b^5 - a^4b^6 - 1 = 0$	$\overline{R} \star \overline{RLRRRRC}$	1.2122841170031945547
$l_7 : a^4b^6 - a^3b^3 - a^2b^4 - 1 = 0$	$\overline{R} \star \overline{RLRRC}$	1.2315675146534175873
$l_8 : ab^4 - ab^3 - b^3 + b^2 - b + 1 = 0$	$\overline{RLRRC}$	1.2734379972874223108
$l_9 : ab^6 - ab^5 = b^5 - b^4 + b^3 - b^2 + b - 1$	$\overline{RLRRRRC}$	1.357446419263915484
$l_{10} : a + b = ab^2$	$\overline{RLRRR}$	1.4152994280584882239
$l_{11} : ab = a + 1$	$\overline{RLC}$	1.6187525897221354592
$l_{12} : a^2b = 1$	$\overline{RLLRLC}$	1.619012264844041957
$l_{13} : a + b = a^4b^3$	$\overline{RLLRLRLL}$	1.6190760397020785577
$l_{14} : a^9b^6 - a^6b^3 - a^5b^4 - 1 = 0$	$\overline{RL} \star \overline{RLRRC}$	1.6190760893721971241
$l_{15} : a + b = a^2b^2$	$\overline{RLLRLR}$	1.6190973756923027585

### 3.6. 結果

3.5. 節の実験結果に基づき、[MT88] の理論を応用することによって、以下の命題が得られた。これは即ち、 $D_0$  全体で (2) の狭義単調性が成り立つことを意味する。

**命題 2**  $D_0$  の元  $(a, b)$  に対しては、ある  $A_2$  の元  $(a, b)$  が取れて次式を満たす；

$$h(a, b) = \frac{1}{2}h(a', b').$$

### 謝 辞

最後に、御指導くださった城西大学の西沢清子助教授、防衛大学の藤村雅代助手に深く感謝致します。

## Appendix

### A. $\Gamma_k(a, b)$ の絶対既約性

以下は  $\Gamma_k(a, b)$  の絶対既約性を、 $k = 3, 4$  の場合についてチェックしたものである。

```
[0] F3=-b^2+(a^2-3*a)*b-a;
b*a^2+(-3*b-1)*a-b^2
[1] F4=-b^4-4*a*b^3+(a^3-6*a^2-a)*b^2-4*a^2*b-a^2;
b^2*a^3+(-6*b^2-4*b-1)*a^2+(-4*b^3-b^2)*a-b^4
[2] fctr(F3);
[[1,1],[b*a^2+(-3*b-1)*a-b^2,1]]
[3] fctr(F4);
[[1,1],[b^2*a^3+(-6*b^2-4*b-1)*a^2+(-4*b^3-b^2)*a-b^4,1]]
[4] FF3=subst(F3,a,1);
-b^2-2*b-1
[5] fctr(FF3);
[[-1,1],[b+1,2]]
[6] FF3=subst(F3,a,-1);
-b^2+4*b+1
[7] fctr(res(c,subst(F3,b,b+c),subst(FF3,b,c)));
[[1,1],[(b^2+4*b-1)*a^4+(-6*b^2-26*b+2)*a^3+(-2*b^3-3*b^2+28*b+8)*a^2+(
6*b^3+38*b^2+50*b+6)*a+b^4+8*b^3+14*b^2-8*b+1,1]]
[8] FF4=subst(F4,a,-1);
-b^4+4*b^3-6*b^2-4*b-1
[9] fctr(res(c,subst(F4,b,b+c),subst(FF4,b,c)));
[[1,1],[(b^8+8*b^7+28*b^6+40*b^5+6*b^4-40*b^3+28*b^2-8*b+1)*a^12+(-24*b
^8-208*b^7-788*b^6-1320*b^5-604*b^4+800*b^3-492*b^2+152*b-12)*a^11+(-16
*b^9+68*b^8+1408*b^7+7032*b^6+14848*b^5+11782*b^4-3752*b^3+2988*b^2-744
*b+2)*a^10+(-4*b^10+248*b^9+1812*b^8+3520*b^7-10668*b^6-53800*b^5-75228
*b^4-9664*b^3-10516*b^2-600*b+164)*a^9+(168*b^10+48*b^9-8550*b^8-51120*
b^7-116904*b^6-89216*b^5+68840*b^4+40928*b^3+19376*b^2+5472*b+495)*a^8+
(48*b^11-1044*b^10-11544*b^9-42876*b^8-34800*b^7+169984*b^6+495088*b^5+
423656*b^4+208384*b^3+75784*b^2+13040*b+872)*a^7+(6*b^12-760*b^11-5156*
b^10-664*b^9+117222*b^8+524688*b^7+1063752*b^6+1069952*b^5+658828*b^4+3
13840*b^3+87384*b^2+15792*b+1052)*a^6+(-264*b^12-48*b^11+21784*b^10+169
280*b^9+612248*b^8+1249648*b^7+1491472*b^6+1170672*b^5+691144*b^4+27065
6*b^3+80792*b^2+12112*b+872)*a^5+(-48*b^13+988*b^12+17488*b^11+114920*b
^10+412656*b^9+897335*b^8+1213176*b^7+1071556*b^6+652520*b^5+278934*b^4
+106968*b^3+22396*b^2+4152*b+495)*a^4+(-4*b^14+488*b^13+7164*b^12+46624
*b^11+174060*b^10+403304*b^9+582252*b^8+504320*b^7+220020*b^6+12472*b^5
-26892*b^4-22816*b^3-9564*b^2-264*b+164)*a^3+(120*b^14+1744*b^13+11762*
b^12+46296*b^11+113612*b^10+170040*b^9+135038*b^8+18544*b^7-42304*b^6-1
4656*b^5+5198*b^4-6856*b^3+2876*b^2-72*b+2)*a^2+(16*b^15+244*b^14+1736*
b^13+7228*b^12+18656*b^11+28436*b^10+19448*b^9-6852*b^8-14448*b^7+3900*
b^6+8120*b^5-7532*b^4+3200*b^3-836*b^2+136*b-12)*a+b^16+16*b^15+120*b^1
4+528*b^13+1436*b^12+2256*b^11+1352*b^10-1328*b^9-1722*b^8+1328*b^7+135
2*b^6-2256*b^5+1436*b^4-528*b^3+120*b^2-16*b+1,1]]
```



## 参 考 文 献

- [ITN79a] S. Ito, S. Tanaka, and H. Nakada. On unimodal linear transformations and chaos I. *Tokyo J. Math.*, 2(2):221–239, 1979.
- [ITN79b] S. Ito, S. Tanaka, and H. Nakada. On unimodal linear transformations and chaos II. *Tokyo J. Math.*, 2(2):241–259, 1979.
- [NY95] H. E. Nusse and J. A. Yorke. Border-collision bifurcations for piecewise smooth one-dimensional maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 5(1):189–207, 1995.
- [CE80] P. Collet and J. P. Eckmann. *Iterated maps on the interval as dynamical systems. Progress in Physics*. Birkhauser, Boston, 1980.
- [Dev89] R. L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley, 1989.
- [MV91] J. C. Misiurewicz and E. Visinescu. Kneading sequences of skew tent maps. *Ann. Inst. Henri Poincare*, 27:125–140, 1991.
- [MV92] J. C. Marcuard and E. Visinescu. Monotonicity properties of some skew tent maps. *Ann. Inst. Henri Poincare*, 28:1–29, 1992.
- [MT88] J. Milnor and W. Thurston. *On iterated maps on the interval*. Springer LNM 1342 (1988),465–563.
- [IN97a] K. Ichimura and K. Nishizawa. Bifurcations for skew tent maps I (stair type). *RIMS Kokyuroku*, 986:41–48. Kyoto Univ., 1997.
- [IN97b] M. Ito and K. Nishizawa. Bifurcations for skew tent maps II (renormalization). *RIMS Kokyuroku*, 986:49–56. Kyoto Univ., 1997.
- [Ich] K. Ichimura. Dynamics and kneading sequences of skew tent maps. *Science Bulletin of Josai university*, Special Issue 4, to appear.
- [Ito] M. Ito. Renormalization and topological entropy of skew tent maps. *Science Bulletin of Josai university*, Special Issue 4, to appear.
- [YNT90] Yokoyama, Noro and Takeshima. On Factoring Multi-variate Polynomials over Algebraically Closed Fields. ISSAC'90 (1990). (*extended abstract*).
- [L85] Landau. Factoring polynomials over algebraic number fields. *SIAM J. Comput.*, 14:184–195, 1985.