数理解析研究所講究録
1038巻 1998年 75-84

退化放物型方程式の近似一般解の構成とその誤差評価

群馬大学 工学部　天野一男 (Kazuo Amano)
群馬大学 工学部　アドミ・シャリフ (Admi Syarif)

1. はじめに

著者たちの知る限り、退化する偏微分方程式に対する数値解析的および数式処理的な手法の研究は、あまり盛んではないように見受けられる。確率論において重要な役割を演じる、退化放物型偏微分方程式に関しても、退化性を正確に反映するような一般的な近似解法は、殆ど研究されていない。

Strook-Varadhan ([5]) は、退化放物型方程式の弱解の確率表現を与えた。しかしながら、彼らの表現から、解の値を具体的に計算することは出来ない。理論的には、Kloeden-Platen ([3]) の手法を使えば、対応する確率微分方程式を解いて、Strook-Varadhan の解を数値的に計算することが出来る。しかしながら、この方法は膨大な計算時間を必要とするので、われわれの問題に関しては実用的ではないと思われる。

本講演においてわれわれは、有界な C^∞ の係数 $a(x) \geq 0$ と $b(x)$ をもった、退化放物型偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (t > 0,\ -\infty < x < \infty) \tag{1}$$

が、任意に固定された $(t,x) \in (0,\infty)\times(-\infty,\infty)$ と任意の自然数 N に対して、

$$u(t,x) = \sum_\nu \mu_N(\nu)\,\phi(\xi_N(\nu)) + O(N^{-1}) \tag{2}$$

なる 近似一般解 をもつことを証明する。ここで、$\phi(x)$ は任意関数である。

数列 $\{\mu_N(\nu)\}$ と $\{\xi_N(\nu)\}$ の構成方法は 第3節 で与えられる。偏微分方程式 (1) が熱方程式に一致する場合には、*i.e.*, $a(x) \equiv 1$ かつ $b(x) \equiv 0$ となる場合には、

$$\mu_N(\nu) = \text{the coefficient of } x^\nu \text{ in } \Big(\frac{1}{6x} + \frac{2}{3} + \frac{x}{6}\Big)^N,$$

$$\xi_N(\nu) = x + \sqrt{\frac{6t}{N}}\,\nu$$

となることを 第4節 で証明する ($\nu = 0, \pm1, \pm2, \cdots$). さらに 第4節 において、われわれは数列 $\{\mu_N(\nu)\}$ と基本解

$$E(t,x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}$$

の間の密接な関係を明らかにする。

2. 準 備

はじめに、剰余項を積分で表現した Taylor の定理と、退化放物型方程式に対する最大値の原理を紹介する。

補題 2.1. 非負の整数 n と $\mathbf{R}^2$ で定義された C^{n+1} 級の関数 $f(x,y)$ に対して、

$$f(x+h,y+k)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!}\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^{\nu}f(x,y)$$
$$+\int_0^1\frac{(1-\theta)^n}{n!}\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^{n+1}f(x+\theta h,y+\theta k)\,d\theta$$

がなりたつ。

補題 2.1 は、関数

$$F(t)=f(x+th,y+tk)\qquad(0\le t\le 1)$$

に対する、微積分学の基本定理と部分積分から従う。

補題 2.2. 実 C^1 級の係数 $a(x)\ge 0$, $b(x)$ と初期条件 $\phi(x)$ が与えられたとする。$u(t,x)$ は、初期値問題

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}\le a(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x)\dfrac{\partial u}{\partial x} & (t>0,\ -\infty<x<\infty)\\[2ex] u(0,x)=\phi(x) & (-\infty<x<\infty)\end{cases}$$

の古典解とする。このとき、

$$u(t,x)\le\sup_{-\infty<y<\infty}\phi(y)\qquad(t>0,\ -\infty<x<\infty)\,.$$

補題 2.2 は、退化楕円ー放物型方程式に対する強最大値の原理 (*cf.* 例えば [1]) に特別な場合として含まれる。

次に、局所的な有限差分近似に関する補題を証明する。そのために、

$$\frac{h}{k^2}=\frac{1}{6}\tag{3}$$

なる、十分に小さな正の定数 h と k をとる。非負の整数 p と q に対して、$\|f\|_{C^{p,q}(D)}$ は、領域 $D\subset(0,\infty)\times\mathbf{R}$ で定義された、関数 $f(t,x)$ の $C^{p,q}$ supremum norm を表す。*i.e.*,

$$\|f\|_{C^{p,q}(D)}=\max_{\substack{0\le\nu\le p\\0\le\mu\le q}}\sup_{(t,x)\in D}\Big|\frac{\partial^{\nu+\mu}f}{\partial t^\nu x^\mu}(t,x)\Big|\,.$$

非負の整数 ℓ に対して、C_ℓ は、$a,a^{(1)},a^{(2)},\cdots,a^{(\ell)}$ と $b,b^{(1)},b^{(2)},\cdots,b^{(\ell)}$ の $\mathbf{R}$ 上での supremum norm にだけ依存する非負定数を表す。

補題 2.3. $u(t,x)$ は退化放物型方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (0 < t < T,\ -\infty < x < \infty) \tag{4}$$

の C^6 級の解とする。ここで、T は正の定数、$a(x) \geq 0$ と $b(x)$ は実数全体 $\mathbf{R}$ で定義された有界な C^4 関数とする。このとき、

$$\begin{aligned} e(t,x) = u(t,x) & \\ & -\frac{1}{6}u(t-h, x-\sqrt{a(x)}\,k) - \frac{1}{6}u(t-h, x+\sqrt{a(x)}\,k) \\ & -\frac{1}{6}u(t-h, x+b(x)\,k^2) - \frac{1}{2}u(t-h, x) \end{aligned}$$

とおけば、不等式

$$|\,e(t,x)\,| \leq C_2 hk^2 \|u\|_{C^{0,3}((0,T)\times \boldsymbol{R})} + C_4 hk^4 \|u\|_{C^{0,6}((0,T)\times \boldsymbol{R})} \tag{5}$$

がなりたつ。

証明. 補題 2.1 により、

$$\begin{aligned} & u(t-h, x-\sqrt{a(x)}\,k) + u(t-h, x+\sqrt{a(x)}\,k) \\ & = 2u(t-h,x) + k^2 a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t-h,x) + \frac{k^4}{12}\,a^2(x)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t-h,x) \\ & \quad + k^6 \int_0^1 \frac{(1-\theta)^5}{5!}\,a^3(x)\,\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(t-h, x-\sqrt{a(x)}\,\theta k\,d\theta \\ & \quad + k^6 \int_0^1 \frac{(1-\theta)^5}{5!}\,a^3(x)\,\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(t-h, x+\sqrt{a(x)}\,\theta k)\,d\theta\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & u(t-h, x+b(x)\,k^2) \\ & = u(t-h,x) + k^2 b(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t-h,x) + \frac{k^4}{2}\,b^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t-h,x) \\ & \quad + k^6 \int_0^1 \frac{(1-\theta)^2}{2}\,b^3(x)\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t-h, x+b(x)\,\theta k^2)\,d\theta\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & u(t,x) \\ & = u(t-h,x) + h\,\frac{\partial u}{\partial t}(t-h,x) + \frac{h^2}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t-h,x) \\ & \quad + h^3 \int_0^1 \frac{(1-\theta)^2}{2}\,\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t-h+\theta h, x)\,d\theta \end{aligned}$$

が得られる。

したがって、(3), (4), $\partial_t^2 u = (a\partial_x^2 + b\partial_x)^2 u$, $e(t,x)$ の定義 および (4) より、

$$
\begin{aligned}
&|\, e(t,x)\,| \\
&\le h \left| a(x)\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t-h,x) + b(x)\, \frac{\partial u}{\partial x}(t-h,x) - \frac{\partial u}{\partial t}(t-h,x) \right| \\
&\quad + \frac{hk^2}{12} \left| a^2(x)\, \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t-h,x) + 6\, b^2(x)\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t-h,x) - \frac{6h}{k^2}\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t-h,x) \right| \\
&\quad + hk^4 \int_0^1 \frac{(1-\theta)^5}{5!}\, a^3(x) \left| \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(t-h, x - \sqrt{a(x)}\,\theta k) \right| d\theta \\
&\quad + hk^4 \int_0^1 \frac{(1-\theta)^5}{5!}\, a^3(x) \left| \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(t-h, x + \sqrt{a(x)}\,\theta k) \right| d\theta \\
&\quad + hk^4 \int_0^1 \frac{(1-\theta)^2}{2}\, |b^3(x)| \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t-h, x + b(x)\,\theta k^2) \right| d\theta \\
&\quad + h^3 \int_0^1 \frac{(1-\theta)^2}{2} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t-h+\theta h, x) \right| d\theta \\
&\le C_2 hk^2 \|u\|_{C^{0,3}((0,t)\times \boldsymbol{R})} + C_0 hk^4 \|u\|_{C^{0,6}((0,t)\times \boldsymbol{R})} \\
&\quad + C_0 hk^4 \|u\|_{C^{0,3}((0,t)\times \boldsymbol{R})} + \frac{h^3}{6} \|u\|_{C^{3,0}((0,t)\times \boldsymbol{R})}\ ;
\end{aligned}
$$

証明が完了した。□

この節の最後に、$\|u\|_{C^{0,3}((0,T)\times \boldsymbol{R})}$ と $\|u\|_{C^{0,6}((0,T)\times \boldsymbol{R})}$ を初期データとその導関数で評価する。

補題 2.4. $f(x)$ は $\mathbf{R}$ で定義された C^2 級の非負関数とする、このとき

$$
(\, f'(x)\,)^2 \le (\, 2 \sup |f''|\,) f(x) \qquad on \quad \mathbf{R}\,.
$$

証明. 一般性を失うことなく、$f'(x) \neq 0$ と仮定してよい。$h \in \mathbf{R}$ に対して、

$$
0 \le f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \int_0^1 (1-\theta)\, h^2 f''(x+\theta h)\, d\theta
$$

なので、補題が従う。□

次の 補題 は Oleinik-Radkevich ([4]) によって証明された。

補題 2.5. $u(t,x)$ は、実有界 C^∞ 級係数をもった、退化放物型方程式 *(4)* の解とする。さらに、解 $u(t,x)$ は、C^∞ 級の初期条件 $u(0,x) = \phi(x)$ をみたすとする。このとき、$u(t,x)$ は C^∞ 級の解で、$k = 0,1,2,\cdots$ に対して、次の不等式

$$
\|u\|_{C^{0,k}((0,T)\times \boldsymbol{R})} \le C_k \|\phi\|_{C^k(\boldsymbol{R})} \tag{6}
$$

がなりたつ。

したがって、われわれは (5) を書き換えることが出来て、誤差評価

$$
|\, e(t,x)\,| \le C_2 hk^2 \|\phi\|_{C^3(\boldsymbol{R})} + C_4 hk^4 \|\phi\|_{C^6(\boldsymbol{R})} \qquad (0 < t < T) \tag{7}
$$

が得られる。

3. 近似一般解の構成

特に断らない限り、$u(t,x)$ は初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x)\dfrac{\partial u}{\partial x} & (0 < t < T,\ -\infty < x < \infty) \\ u(0,x) = \phi(x) & (-\infty < x < \infty)\ , \end{cases} \tag{8}$$

の解とする。ここで、T は正定数で、$a(x) \geq 0$, $b(x)$, $\phi(x)$ は $\mathbf{R}$ 上で定義された有界な C^∞ 級関数とする。ここで、(8) は well-posed で、解は滑らかであることに注意する ([4]). h と k は (3) をみたす十分に小さな定数とする。

補題 2.3 を再帰的に用いることにより、次を得る：

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\nu} \mu_n(\nu)\, e(t-nh, \xi_n(\nu)) + \sum_{\nu} \mu_N(\nu)\, u(t-Nh, \xi_N(\nu))\ .$$

ただし、 $N = 1,2,3,\cdots$ かつ $t - Nh \geq 0$ とする。

与えられた x に対して、われわれは関数列 $\{p_n(y)\}$ を以下のようにして定義する：

$$p_0(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } y = x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}\ ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t,y)\, p_{n+1}(dy) = \int_{-\infty}^{\infty} Mf(t,y)\, p_n(dy) \tag{9}$$
$$(\, f \in C((0,T) \times \mathbf{R})\,)\ .$$

ここで、$p_\nu(dy)$ は

$$p_\nu(A) = \sum_{y \in A} p_\nu(y) \qquad \text{for } A \subset \mathbf{R}$$

なる離散確率測度とし、M は

$$\begin{aligned} Mf(t,y) = &\frac{1}{6} f(t, y - \sqrt{a(y)}\,k) + \frac{1}{6} f(t, y + \sqrt{a(y)}\,k) \\ &+ \frac{1}{6} f(t, y + b(y)k^2) + \frac{1}{2} f(t,y) \end{aligned}$$

なる差分作用素とする。

コンピュータ上への実際のインプリメンテーションのために、p_{n+1} を p_n から構成する手順を、われわれは シンボリックなリスト演算で与える。

補題 3.6. 確率測度 p_n をリスト

$$L_n = ((y_n(1)\ q_n(1))\ \cdots\ (y_n(\ell_n)\ q_n(\ell_n)))$$

と同一視する。ただし、$\mathrm{supp}(p_n) = \{y_n(1),\cdots,y_n(\ell_n)\}$ かつ $q_n(\nu) = p_n(y_n(\nu))$, $\nu = 1,2,\cdots,\ell_n$. はじめに、L_n に含まれるリスト $((y_n(\nu)\ q_n(\nu))$ をすべて

$$(y_n(\nu) - \sqrt{a(y_n(\nu))}\,k\ \ \frac{1}{6}q_n(\nu))\ \ (y_n(\nu) + \sqrt{a(y_n(\nu))}\,k\ \ \frac{1}{6}q_n(\nu))$$
$$(y_n(\nu) + b(y_n(\nu))\,k^2\ \ \frac{1}{6}q_n(\nu))\ \ (y_n(\nu)\ \ \frac{1}{2}q_n(\nu))$$

で置き換え、新しいリスト

$$\tilde{L}_{n+1} = ((\tilde{y}_{n+1}(1)\ \tilde{q}_{n+1}(1))\ \cdots\ (\tilde{y}_{n+1}(\tilde{\ell}_{n+1})\ \tilde{q}_{n+1}(\tilde{\ell}_{n+1})))$$

を生成する。次に、 $\tilde{L}_{n+1}$ を以下のようにして再帰的に整理する： $\tilde{y}_{n+1}(\nu_1) = \tilde{y}_{n+1}(\nu_2)$ かつ $\nu_1 < \nu_2$ であれば、リストのペア $(\tilde{y}_{n+1}(\nu_1)\ \tilde{q}_{n+1}(\nu_1))$ と $(\tilde{y}_{n+1}(\nu_2)\ \tilde{q}_{n+1}(\nu_2))$ を一つのリスト $(\tilde{y}_{n+1}(\nu_1)\ \tilde{q}_{n+1}(\nu_1) + \tilde{q}_{n+1}(\nu_2))$ で置き換えて、より短いリスト

$$L_{n+1} = ((y_{n+1}(1)\ q_{n+1}(1))\ \cdots\ (y_{n+1}(\ell_{n+1})\ q_{n+1}(\ell_{n+1})))$$

を構成して、

$$\nu_1 \neq \nu_2 \Longrightarrow y_{n+1}(\nu_1) \neq y_{n+1}(\nu_2)$$

となるようにする。このとき、われわれは p_{n+1} を L_{n+1} と同一視することが出来る, *i.e.*, $\mathrm{supp}(p_{n+1}) = \{y_{n+1}(1),\cdots,\ y_{n+1}(\ell_{n+1})\}$, $q_{n+1}(\nu) = p_{n+1}(y_{n+1}(\nu))$, $\nu = 1,2,\cdots,\ell_{n+1}$.

補題 3.6 は単に (9) を Lisp に翻訳しただけなので、その証明は自明である。

定理 3.7. 任意の自然数 n に対して、

$$u(t,x) = \sum_{\nu=0}^{n-1}\int_{-\infty}^{\infty} e(t-\nu h,y)\,p_\nu(dy) + \int_{-\infty}^{\infty} u(t-nh,y)\,p_n(dy)\ . \tag{10}$$

証明. 補題 2.3 より、$n=1$ のとき (10) は自明である。もし $n=r$ のときに (10) が正しければ、

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} u(t-rh,y)\,p_r(dy)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e(t-rh,y)\,p_r(dy) + \int_{-\infty}^{\infty} Mu(t-(r+1)h,y)\,p_r(dy)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e(t-rh,y)\,p_r(dy) + \int_{-\infty}^{\infty} u(t-(r+1)h,y)\,p_{r+1}(dy)\end{aligned}$$

が、補題 2.3 と $\{p_n\}$ の定義から従う。したがって、(10) が $n=r+1$ に対しても成り立つと分かる。□

系 3.8. N は十分に大きな自然数とし、任意に点 $(t,x) \in (0,T) \times \mathbf{R}$ を取りそれを固定する。

$$h = \frac{t}{N}\ , \quad k = \sqrt{6h}$$

をみたすように $h>0$ と $k>0$ を取れば、

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{N-1}\int_{-\infty}^{\infty} e(t-nh,y)\,p_n(dy) + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)\,p_N(dy) \tag{11}$$

が成り立つ。

(7) と 確率測度 $p_\nu(dy)$ の定義より、次の定理が得られる。

定理 3.9. 任意の自然数 n に対して、

$$\Big|\sum_{\nu=0}^{n-1}\int_{-\infty}^{\infty} e(t-\nu h, y)\, p_\nu(dy)\Big| \le C_2 nhk^2 \|\phi\|_{C^3(\boldsymbol{R})} + C_4 nhk^4 \|\phi\|_{C^6(\boldsymbol{R})}\,.$$

系 3.10. N は十分に大きな自然数とし、任意に点 $(t,x)\in(0,T)\times\mathbf{R}$ を取りそれを固定する。このとき

$$h=\frac{t}{N}\,,\quad k=\sqrt{6h}$$

なる $h>0$ と $k>0$ に対して、

$$\Big|\sum_{n=0}^{N-1}\int_{-\infty}^{\infty} e(t-nh, y)\, p_n(dy)\Big| \le C_2 k^2 \|\phi\|_{C^3(\boldsymbol{R})} + C_4 k^4 \|\phi\|_{C^6(\boldsymbol{R})}$$

が成り立つ。

以上より、われわれは近似一般解

$$u(t,x)=\sum_{-\infty<y<\infty} p_N(y)\,\phi(y)+O(N^{-1})$$

を得ることが出来た。ここで、われわれは (9) と 補題 3.6 を用いて、$p_N(y)$ を具体的に計算することが出来る。

4. 熱方程式の近似一般解

この節では、$u(t,x)$ は熱方程式に対する初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0<t<T,\ -\infty<x<\infty) \\[2ex] u(0,x)=\phi(x) & (-\infty<x<\infty) \end{cases} \tag{12}$$

の解とする。ここで、T は正定数で、$\phi(x)$ は $\mathbf{R}$ 上で定義された C^∞ 級の関数とする。h と k は (3) をみたす十分に小さな正定数とする。

$u_{tt}=u_{xxxx}$ という特殊性を使って、熱方程式の場合には、われわれは 補題 2.3 を若干改良することが出来る。

補題 4.11. $u(t,x)$ は熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0<t<T,\ -\infty<x<\infty) \tag{13}$$

の解とする。

$$\begin{aligned} e(t,x) &= u(t,x) \\ &\quad -\frac{1}{6}u(t-h,x-k)-\frac{1}{6}u(t-h,x+k)-\frac{2}{3}u(t-h,x) \end{aligned}$$

とおけば、

$$|\, e(t,x)\,| \le C_0 h k^4 \|u\|_{C^{0,6}((0,T)\times \boldsymbol{R})} \tag{14}$$

が成り立つ。

補題 2.4 を使えば、(14) より

$$|\, e(t,x)\,| \le C_0 h k^4 \|\phi\|_{C^6(\boldsymbol{R})} \tag{15}$$

が従う。

$\{p_n(y)\}$ の定義を変更して、$\{p_n(\nu)\}$ を

$$p_n(\nu) = \text{the coefficient of } x^\nu \text{ in } \left(\frac{1}{6x} + \frac{2}{3} + \frac{x}{6}\right)^n \tag{16}$$

で定義する。

系 4.12. N は十分に大きな自然数とし、点 $(t,x) \in (0,T) \times \mathbf{R}$ を任意にとり、それを固定する。$h > 0$ と $k > 0$ を

$$h = \frac{t}{N}, \quad k = \sqrt{6h}$$

をみたすように取れば、

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\nu=-n}^{n} p_n(\nu)\, e(t-nh, x+\nu k) + \sum_{\nu=-N}^{N} p_N(\nu)\, \phi(x+\nu k)$$

と表せる。

系 4.13. N は十分に大きな自然数とし、点 $(t,x) \in (0,T) \times \mathbf{R}$ を任意にとり、それを固定する。

$$h = \frac{t}{N}, \quad k = \sqrt{6h}$$

なる $h > 0$ と $k > 0$ に対して、

$$\left|\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\nu=-n}^{n} p_n(\nu)\, e(t-nh, x+\nu k)\right| \le C_0 k^4 \|\phi\|_{C^6(\boldsymbol{R})}$$

が成り立つ。

したがって、熱方程式の近似一般解

$$u(t,x) = \sum_{\nu=-N}^{N} p_N(\nu)\, \phi(x+\nu k) + O(N^{-2})$$

が得られた。

最後に、$N \gg 1$, $k = \sqrt{6t/N}$ に対して、$\mathrm{supp}(\phi) \ll 1$ かつ $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) \exp(-(x-\xi)^2/4t) d\xi \neq 0$ であれば、

$$\left| \frac{\displaystyle\sum_{\nu=-N}^{N} p_N(\nu)\, \phi(x+\nu k)}{\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi} - 1 \right| \ll 1$$

となる事を証明する。この事実により、$\{p_n(\nu)\}$ と熱方程式の基本解との密接な関係が明らかになる。この目的のためには、任意の ν に対して、

$$p_N(\nu) \sim \sqrt{\frac{3}{2N\pi}}\exp\Big(-\frac{3\nu^2}{2N}\Big) \tag{17}$$

を証明すれば十分である。というのは、台形公式より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi &\sim \frac{k}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{\nu=-N}^{N}\phi(x+\nu k)\,\exp\Big(-\frac{(\nu k)^2}{4t}\Big)\\ &= \sqrt{\frac{3}{2N\pi}}\sum_{\nu=-N}^{N}\exp\Big(-\frac{3\nu^2}{2N}\Big)\,\phi(x+\nu k)\end{aligned}$$

だからである。

補題 4.14. 任意の自然数 ν に対して、

$$p_n(\nu) \sim \sqrt{\frac{3}{2n\pi}}\exp\Big(-\frac{3\nu^2}{2n}\Big) \qquad (n\to\infty)\ . \tag{18}$$

証明. まず始めに、$\nu = 0$ に対して (18) を証明する。計算により、

$$\begin{aligned}p_n(0) &= \mathrm{Coefficient}\Big[\Big(\frac{1}{6x}+\frac{2}{3}+\frac{x}{6}\Big)^n, x^0\Big]\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\Big(\frac{1}{6z}+\frac{2}{3}+\frac{z}{6}\Big)^n dz\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(\frac{\cos\theta}{3}+\frac{2}{3}\Big)^n d\theta\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n}\exp\Big[n\log\Big(1-\frac{1-\cos\theta}{3}\Big)\Big]\,d\theta\\ &\quad +\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\pi}\exp\Big[n\log\Big(1-\frac{1-\cos\theta}{3}\Big)\Big]\,d\theta\\ &\equiv I_1 + I_2\ ,\end{aligned}$$

ここで $\varepsilon_n = n^{-1/2+\delta}$, $0<\delta\ll 1$. さらに、

$$\begin{aligned}\log\Big(1-\frac{1-\cos\theta}{3}\Big) &= -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\Big(\frac{1-\cos\theta}{3}\Big)^m\\ &= -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell}}{(2\ell)!}\theta^{2\ell}\Big)^m\end{aligned}$$

なので、直接計算により、

$$\begin{aligned}I_1 &\sim \frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n}\exp\Big(-\frac{n}{6}\,\theta^2\Big)d\theta \sim \sqrt{\frac{3}{2n\pi}}\ ,\\ I_2 &= O(e^{-n^{2\delta}/6}) \sim 0\ .\end{aligned}$$

次に、$0 \leq |\nu| \leq r$ のときに (18) がなりたつと仮定する。このとき、(16) より、

$$p_{n+1}(r) = \frac{1}{6}p_n(r-1) + \frac{2}{3}p_n(r) + \frac{1}{6}p_n(r+1) \ ,$$
$$p_n(\nu) = p_n(-\nu) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots) \ ,$$

なので、$\nu = \pm(r+1)$ に対しても (18) が成り立つ。□

参 考 文 献

[1] K. Amano, *Maximum principles for degenerate elliptic-parabolic operators*, Indiana Univ. Math. J., 28 (1979), pp. 545–557.

[2] K. Amano, *Approximate general solution of degenerate parabolic equation related to population genetics*, Electronic Journal of Differential Equations, 1995 (1995), pp. 1–14.

[3] P. E. Kloeden and E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1992.

[4] O. A. Oleinik and E. V. Radkevich, *Second Order Equations with Nonnegative Characteristic Form*, Amer. Math. Soc., Province, Rhode Island and Plenum Press, New York, 1973.

[5] D. W. Stroock and S. R. S. Varadhan, *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer-Verlag New York Inc, 1979.