数理解析研究所講究録
1039巻1998年1-5

ベクトル測度のテンソル積の弱収束

Jun KAWABE (Shinshu University)
河邊 淳 (信州大学工学部)

§1. 序論. 測度の弱収束 (weak convergence of measures) の概念は，1956年に Prokhorov [13] によって Polish 空間上の正値有限測度に対して導入され，その翌年には LeCam [9] によって，完全正則空間上の実測度の場合に拡張されるとともに，現在まで多くの人々によって，その性質が詳細に研究されてきた (例えば，Varadarajan [18], Billingsley [1], Topsøe [17] などを見よ)．その後，1991年になって，Dekiert [2] によりベクトル測度に対する測度の弱収束 (weak convergence of vector measures) の概念が導入されて以来，実測度のみならず，ベクトル測度に対する測度の弱収束性の研究も活発に行われるようになってきた (例えば，März and Shortt [11], Shortt [15])．

一方，ベクトル測度のテンソル積 (tensor product of vector measures) の概念は，1967年の Duchon and Kluvánek [4] の論文で導入された: μ は可測空間 $(\Omega, \mathcal{A})$ 上で定義され，局所凸空間 X に値をとるベクトル測度，ν は可測空間 $(\Gamma, \mathcal{B})$ 上で定義され，局所凸空間 Y に値をとるベクトル測度とするとき，$(\Omega \times \Gamma, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$ 上で定義され，ε-テンソル積 (ε-tensor product) の完備化 $X\widetilde{\otimes}_\varepsilon Y$ に値をとり

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \otimes \nu(B) \quad \text{for all } A \in \mathcal{A} \text{ and all } B \in \mathcal{B}$$

を満たす μ と ν のテンソル積 $\mu \otimes \nu$ が存在する (Duchon [5] と Swartz [16] も見よ)．

この論文では，急減少関数空間 (Fréchet 空間) やシュワルツのテスト関数空間 (Fréchet 空間の増加列の狭義帰納極限)，あるいはそれらの強双対空間である緩増加関数空間やシュワルツの超関数空間に値をとるベクトル測度のテンソル積から成るネットの弱収束性は，対応する実測度の直積測度の弱収束性から導かれることを報告する．

§2. 記法と準備. $\langle E, F\rangle$ は実線形空間の双対系で，ξ はこの双対系と両立する局所凸位相，i.e. 弱位相 $\sigma(E,F)$ よりも強く，Mackey 位相 $\tau(E,F)$ よりも弱い局所凸位相とする．可測空間 $(\Omega, \mathcal{A})$ 上で定義され，E に値をとる集合関数 $\mu : \mathcal{A} \to E$ は，$\mu(\emptyset) = 0$ および ξ に関する σ-加法性: 任意の互いに素な集合列 $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ with $A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ に対して，$\mu(A) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$ (ただし，級数は ξ に関する収束) が成り立つとき，**ベクトル測度** (vector measure) であるという．級数 $\sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$ の収束は無条件収束なので，有名な Orlicz-Pettis-Grothendieck の定理 (例えば，McArthur [12] の系1を見よ) により，各 $y \in F$ に対して

$$(y\mu)(A) \equiv \langle \mu(A), y\rangle \quad \text{for all } A \in \mathcal{A}$$

で定義される実測度 $y\mu$ が σ-加法的であれば，μ は ξ に関しても σ-加法的，それゆえベクトル測度となる．このようなベクトル測度の全体を $\mathcal{M}(\Omega; E)$ で表すことにする．特に，$E = \mathbb{R}$ (実数直線) のとき，$\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R})$ を $\mathcal{M}(\Omega)$ とかく．

実測度の場合と異なり，ベクトル測度の全変動は必ずしも有限な値をとるとは限らない．そこで，全変動の代わりに，ベクトル測度 $\mu \in \mathcal{M}(\Omega; E)$ と E 上の局所凸位相 ξ に関して連続なセミノルム p に対して，μ の (p に関する) **半変動** (semivariation) を実測度 $y\mu$ の全変動 $|y\mu|$ を用いて，

$$\|\mu\|_p(A) \equiv \sup_{y \le p} |y\mu|(A), \quad A \in \mathcal{A}$$

で定義する．ただし，$y \le p$ は $|\langle x, y\rangle| \le p(x)$ for all $x \in E$ を意味する．半変動は σ-加法的ではないが，常に有限な値をとり，ベクトル測度の全体から成る空間 $\mathcal{M}(\Omega; E)$ 上のノルムとなる (Lewis [10])．

ベクトル測度の集合 $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}(\Omega; E)$ に対して，$R(\mathcal{V}) \equiv \{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, \mu \in \mathcal{V}\} \subset E$ とおくと，双対系の有界集合に関する一般論 (Schaefer [14] の定理 IV.3.2 の系 1) と，ベクトル測度に対してよく知られた不等式 (Diestel and Uhr [3] の命題 I.11) により，次の 4 つの条件は互いに同値となる:

(1) $R(\mathcal{V})$ は弱位相 $\sigma(E, F)$ に関して有界．

(2) $R(\mathcal{V})$ は ξ に関して有界．

(3) 各 $y \in F$ に対して，$\sup_{\mu \in \mathcal{V}} |y\mu|(\Omega) < \infty$．

(4) 任意の ξ-連続な E 上のセミノルム p に対して，$\sup_{\mu \in \mathcal{V}} \|\mu\|_p(\Omega) < \infty$．

そこで，ベクトル測度の集合 $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}(\Omega; E)$ は上の 4 つの同値な条件の一つを満たすとき，**一様有界** (uniformly bounded) であるという．

さて，S は位相空間とし，$C(S)$ で S 上で定義された実数値有界連続関数全体からなる実 Banach 空間 with ノルム $\|f\| \equiv \sup_{s \in S} |f(s)|$ を表す．このとき，S とその Borel 部分集合から成る σ-集合体 $\mathcal{B}(S)$ に対して，可測空間 $(S, \mathcal{B}(S))$ 上で定義され，E に値をとるベクトル測度の全体を $\mathcal{M}(S; E)$ で表す．Prokhorov [13] や LeCam [9] による実測度の弱収束の概念の拡張としてのベクトル測度の弱収束の概念は，1991 年の Dekiert [2] の学位論文で，Banach 空間に値をとるベクトル測度に対して初めて導入された．その定義は，ξ に関して点列完備な一般の局所凸空間に値をとるベクトル測度の場合に拡張できる：ネット $\{\mu_\alpha\} \subset \mathcal{M}(S; E)$ が $\mu \in \mathcal{M}(S; E)$ に位相 ξ に関して**弱収束** (weak convergence) するとは，任意の $f \in C(S)$ に対して

$$\int_S f d\mu_\alpha \longrightarrow \int_S f d\mu \quad \text{for the topology } \xi$$

が成り立つことである．ただし，積分は Lewis [10] の意味である．このとき，$\{\mu_\alpha\}$ は μ に位相 ξ に関して**弱収束**するといい，$\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu$ for ξ とかく．また，この弱収束により定まる位相を ξ に関する**ベクトル測度の弱位相** (weak convergence of vector measures) という．

測度の弱位相の議論を展開する際には，測度の集合の一様緊密性の概念は，車の両輪としての働きをする．実測度の集合 $M \subset \mathcal{M}(S)$ は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，S のコンパクト部分集合 K_ε が存在して，$|m|(S - K_\varepsilon) < \varepsilon$ for all $m \in M$ が成り立つとき，**一様緊密** (uniformly tight) であるという．ベクトル測度の集合 $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}(S; E)$ に対しては，二つの一様緊密性の概念を導入することができる: 一つは弱位相 $\sigma(E, F)$ に関するもので，各 $y \in F$ に対して，対応する実測度から成る集合 $y(\mathcal{V}) \equiv \{y\mu : \mu \in \mathcal{V}\} \subset \mathcal{M}(S)$ が一様緊密となるとき，$\mathcal{V}$ は**弱一様緊密** (weakly uniformly tight) であるという．もうひとつは，E 上の位相 ξ に関するもので，任意の $\varepsilon > 0$ と E 上の任意の ξ-連続なセミノルム p に対して，S のコンパクト部分集合 $K_{\varepsilon,p}$ が存在して，$\|\mu\|_p(S - K_{\varepsilon,p}) < \varepsilon$ for all $\mu \in \mathcal{V}$ が成り立つとき，$\mathcal{V}$ は**一様緊密** (uniformly tight) であるという．一様緊密であれば明らかに弱一様緊密となるが，一様有界性の場合と異なり，逆は一般には成立しない．しかしながら，例えば，$\mathcal{V}$ が一様に σ-加法的であれば，二つの概念は一致することが示せる．

§3. ベクトル測度のテンソル積の弱収束． 以下，この § を通じて，X は核型 Fréchet 空間の増加列 $\{X_n\}$ の狭義帰納極限，Y は Fréchet 空間の増加列 $\{Y_n\}$ の狭義帰納極限とし，$Z \equiv X \overline{\otimes} Y$ で，X_n と Y_n の射影テンソル積 (projective tensor product) の完備化空間から成る増加列 $\{X_n \widetilde{\otimes}_\pi Y_n\}$ の狭義帰納極限を表すとする．この空間 $X \overline{\otimes} Y$ は完備樽型空間であり，その強双対空間 $(X \overline{\otimes} Y)^*_\beta$ は，X の強双対空間 X^*_β と Y の強双対空間 Y^*_β の射影テンソル積の完備化 $X^*_\beta \widetilde{\otimes}_\pi Y^*_\beta$ に線形位相空間として同型となる．さらに，Y も核型であれば，$X \overline{\otimes} Y$ も核型空間，それゆえ Montel 空間，i.e. 任意の有界閉集合がコンパクトであるような回帰的空間となる (Jarchow [7], Köthe [8], Schaefer [14] などを見よ)．例えば，U，V をそれぞれ $\mathbb{R}^m$，$\mathbb{R}^n$ の開集合とし，$\mathcal{D}(U)$，$\mathcal{D}(V)$，$\mathcal{D}(U \times V)$ をそれぞれ U，V，$U \times V$ 上のシュワルツのテスト関数空間とすれば，

$$\mathcal{D}(U) \overline{\otimes} \mathcal{D}(V) = \mathcal{D}(U \times V)$$

$$\mathcal{D}(U \times V)^*_\beta = \mathcal{D}(U)^*_\beta \widetilde{\otimes}_\pi \mathcal{D}(V)^*_\beta$$

が成り立つ (Grothendieck [6] の第 II 章の §3.n°3, p.84)．さて，$(\Omega, \mathcal{A})$，$(\Gamma, \mathcal{B})$ を 2 つの可測空間とすると，Duchon and Kluvánek [4] の系 1 により，ベクトル測度 $\mu \in \mathcal{M}(\Omega; X)$，$\nu \in \mathcal{M}(\Gamma; Y)$ に対して，

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \otimes \nu(B) \quad \text{for all } A \in \mathcal{A} \text{ and all } B \in \mathcal{B}$$

を満たすベクトル測度 $\mu \otimes \nu \in \mathcal{M}(\Omega \times \Gamma; X \overline{\otimes} Y)$ が存在することが示せる．この $\mu \otimes \nu$ をベクトル測度 μ と ν の**テンソル積** (tensor product of vector measures) という．

以下では，S，T は $\mathcal{B}(S \times T) = \mathcal{B}(S) \times \mathcal{B}(T)$ を満たす完全正則空間とする（例えば，S，T がともに可分距離空間あるいは Suslin 空間であればこの仮定は満たされる）．このとき，我々は個々のベクトル測度のみならず，そのテンソル積に対しても，ベクトル測度

の弱収束の議論を展開することができる．次の定理は，急減少関数空間やシュワルツのテスト関数空間に値をとるベクトル測度に対しては，そのテンソル積の弱収束は対応する実測度の直積測度の弱収束から導かれることを示している．以下では，$Z = X \bar{\otimes} Y$ とし，$\sigma(Z, Z^*)$ で Z 上の弱位相，$\sigma(Z^*, Z)$，$\beta(Z^*, Z)$ でそれぞれ Z^* 上の弱位相，強位相を表すとする．

定理 1. ネット $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{M}(S; X)$，$\{\nu_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{M}(T; Y)$ は一様有界，$\mu \in \mathcal{M}(S; X)$，$\nu \in \mathcal{M}(T; Y)$ で，各 $x^* \in X^*$，$y^* \in Y^*$ に対して，実測度の直積測度から成るネット $\{x^*\mu_\alpha \times y^*\nu_\alpha\}$ は実直積測度 $x^*\mu \times y^*\nu$ に弱収束しているとする．このとき，ベクトル測度のテンソル積から成るネット $\{\mu_\alpha \otimes \nu_\alpha\}$ は $\mu \otimes \nu$ に $\sigma(Z, Z^*)$ に関して弱収束する．さらに，Y が核型のときは，Z 上の帰納極限位相に関しても弱収束する．

一般に，実測度からなるネット $\{m_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{M}(S)$，$\{n_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{M}(T)$ が一様有界かつ一様緊密であれば，Stone-Weierstrass の定理を用いることにより，$\{m_\alpha\}$，$\{n_\alpha\}$ がそれぞれ $m \in \mathcal{M}(S)$，$n \in \mathcal{M}(T)$ に弱収束することから，直積測度から成るネット $\{m_\alpha \times n_\alpha\}$ が直積測度 $m \times n$ に弱収束することを容易に導くことができる．この事実と上の定理から次の系が得られる．

系 1. ネット $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{M}(S; X)$，$\{\nu_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{M}(T; Y)$ は一様有界かつ弱一様緊密，$\mu \in \mathcal{M}(S; X)$，$\nu \in \mathcal{M}(T; Y)$ で，各 $x^* \in X^*$，$y^* \in Y^*$ に対して，実測度から成るネット $\{x^*\mu_\alpha\}$ と $\{y^*\nu_\alpha\}$ はそれぞれ実測度 $x^*\mu$ と $y^*\nu$ に弱収束しているとする．このとき，ベクトル測度のテンソル積から成るネット $\{\mu_\alpha \otimes \nu_\alpha\}$ は $\mu \otimes \nu$ に $\sigma(Z, Z^*)$ に関して弱収束する．さらに，Y が核型のときは，Z 上の帰納極限位相に関しても弱収束する．

X，Y の強双対空間 X^*_β，Y^*_β に値をとるベクトル測度 $\mu \in \mathcal{M}(\Omega; X^*_\beta)$，$\nu \in \mathcal{M}(\Gamma; Y^*_\beta)$ のテンソル積の場合も，Duchon and Kluvánek [4] の系 1 により，μ と ν のテンソル積 $\mu \otimes \nu \in \mathcal{M}(\Omega \times \Gamma; X^*_\beta \tilde{\otimes}_\pi Y^*_\beta)$ が存在する．このとき，緩増加関数空間やシュワルツの超関数空間に値をとるベクトル測度のテンソル積に関しては，次の結果が成り立つ．

定理 2. ネット $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{M}(S; X^*_\beta)$，$\{\nu_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{M}(T; Y^*_\beta)$ は一様有界，$\mu \in \mathcal{M}(S; X^*_\beta)$，$\nu \in \mathcal{M}(T; Y^*_\beta)$ で，各 $x \in X$，$y \in Y$ に対して，実測度の直積測度から成るネット $\{x\mu_\alpha \times y\nu_\alpha\}$ は実直積測度 $x\mu \times y\nu$ に弱収束しているとする．このとき，ベクトル測度のテンソル積から成るネット $\{\mu_\alpha \otimes \nu_\alpha\}$ は $\mu \otimes \nu$ に $\sigma(Z^*, Z)$ に関して弱収束する．さらに，Y が核型のときは，$\beta(Z^*, Z)$ に関しても弱収束する．

系 2. ネット $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{M}(S; X^*_\beta)$，$\{\nu_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{M}(T; Y^*_\beta)$ は一様有界かつ弱一様緊密，$\mu \in \mathcal{M}(S; X^*_\beta)$，$\nu \in \mathcal{M}(T; Y^*_\beta)$ で，各 $x \in X$，$y \in Y$ に対して，実測度から成るネット $\{x\mu_\alpha\}$ と $\{y\nu_\alpha\}$ はそれぞれ実測度 $x\mu$ と $y\nu$ に弱収束しているとする．このとき，ベクトル測度のテンソル積から成るネット $\{\mu_\alpha \otimes \nu_\alpha\}$ は $\mu \otimes \nu$ に $\sigma(Z^*, Z)$ に関して弱収束する．さらに，Y が核型のときは，$\beta(Z^*, Z)$ に関しても弱収束する．

参考文献

[1] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York, 1968.

[2] M. Dekiert, *Kompaktheit, Fortsetzbarkeit und Konvergenz von Vectormassen*, Dissertation, University of Essen, 1991.

[3] J. Diestel and J. Uhr, *Vector Measures*, Amer. Math. Soc. Surveys No. 15, Providence, 1977.

[4] M. Duchon and I. Kluvánek, *Inductive tensor product of vector-valued measures*, Mat. Časopis Sloven. Akad. Vied. **17** (1967), 108-112.

[5] M. Duchon, *On the projective tensor product of vector-valued measures II*, Mat. Časopis Sloven. Akad. Vied. **19** (1969), 228-234.

[6] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. No. 16, 1955.

[7] H. Jarchow, *Locally Convex Spaces*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1981.

[8] G. Köthe, *Topological Vector Spaces II*, Springer-Verlag, New York, 1979.

[9] L. LeCam, *Convergence in distribution of stochastic processes*, Univ. California Publ. Statist. **2** (1957), 207-236.

[10] D. R. Lewis, *Integration with respect to vector measures*, Pacific J. Math. **3** (1970), 157-165.

[11] M. März and R. M. Shortt, *Weak convergence of vector measures*, Publ. Math. Debrecen **45** (1994), 71-92.

[12] C. W. McArthur, *On a theorem of Orlicz and Pettis*, Pacific J. Math. **22** (1967), 297-302.

[13] Yu. V. Prokhorov, *Convergence of random processes and limit theorems in probability theory*, Theory Probab. Appl. **1** (1956), 157-214.

[14] H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1971.

[15] R. M. Shortt, *Strassen's theorem for vector measures*, Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), 811-820.

[16] C. Swartz, *A generalization of a theorem of Duchon on products of vector measures*, J. Math. Anal. Appl. **51** (1975), 621-628.

[17] F. Topøe, *Topology and Measure*, Lecture Notes in Math. **133**, Springer-Verlag, New York, 1970.

[18] V. S. Varadarajan, *Measures on topological spaces*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser.II **48** (1965), 161-228.