数理解析研究所講究録
1039巻 1998年 95-110

ガウス測度の 2 値確率平行移動の絶対連続性

熊本大学医療技術短期大学部　水町 仁 (Hitoshi Mizumachi)
九州大学大学院数理学研究科　佐藤 坦 (Hiroshi Sato)

§1 序

$\mathbf{X} = \{X_k\}_k$ を IID (独立かつ同分布な確率変数列), $\mathbf{Y} = \{Y_k\}_k$ を独立確率変数列とし, $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ は互いに独立であるとする。また, $\mathbf{X}+\mathbf{Y} = \{X_k+Y_k\}_k$ とする。このとき, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ はそれぞれ, 数列空間 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 上に無限直積測度

$$\mu_{\mathbf{X}} = \prod_k \mu_{X_k}, \qquad \mu_{\mathbf{Y}} = \prod_k \mu_{Y_k}, \qquad \mu_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}} = \prod_k \mu_{X_k+Y_k}$$

を導き, $\mu_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}} = \mu_{\mathbf{X}} * \mu_{\mathbf{Y}}$ (合成積) である。特に, X_1 が標準正規分布に従うとき, $\mathbf{X}$ を標準ガウス列とよび, $\mathbf{G} = \{G_k\}_k$ と表す。

問題は, $\mu_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}} \sim \mu_{\mathbf{X}}$ (互いに絶対連続) を $\mathbf{Y}$ だけに関する条件で特徴付けること, つまり, 与えられた $\mu_{\mathbf{X}}$ に対して, $\mu_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}} \sim \mu_{\mathbf{X}}$ となる $\mu_{\mathbf{Y}}$ をすべて見つけることである。$\mathbf{X} = \mathbf{G}$ の場合でも, そのような必要十分条件は知られていないが, Hino [1] から, 次が成り立つ。

命題 A (Hino)

$$\sum_k \mathrm{P}(|Y_k| > \varepsilon) + \sum_k \mathrm{E}[Y_k : |Y_k| \le \varepsilon]^2 + \sum_k \mathrm{E}\left[Y_k^2 : |Y_k| \le \varepsilon\right]^2 < \infty$$

をみたす $\varepsilon > 0$ が存在する

$\Longrightarrow$ $\mu_{\mathbf{G}+\mathbf{Y}} \sim \mu_{\mathbf{G}}$

$\Longrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\sum_k \mathrm{P}(|Y_k| > \varepsilon)^2 + \sum_k \mathrm{E}[Y_k : |Y_k| \le \varepsilon]^2 + \sum_k \mathrm{E}\left[Y_k^2 : |Y_k| \le \varepsilon\right]^2 < \infty$$

命題 A の十分条件では $\sum_k \mathrm{P}(|Y_k| > \varepsilon) < \infty$ をみたす $\varepsilon > 0$ の存在を仮定している。これは, $\sup_k |Y_k| < \infty$ a.s. と同等であり (Borel-Cantelli の補題), このとき

$$\mu_{\mathbf{G}+\mathbf{Y}} \sim \mu_{\mathbf{G}} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_k \mathrm{E}[Y_k : |Y_k| \le \varepsilon]^2 + \sum_k \mathrm{E}\left[Y_k^2 : |Y_k| \le \varepsilon\right]^2 < \infty$$

である。一方, $\sup_k |Y_k| = \infty$ a.s. かつ $\mu_{\mathbf{G}+\mathbf{Y}} \sim \mu_{\mathbf{G}}$ となる $\mathbf{Y}$ が存在することは知られていて (Kitada and Sato [4], Sato and Tamashiro [6]), したがって, $\sup_k |Y_k| = \infty$ a.s. の場合に $\mu_{\mathbf{G}+\mathbf{Y}} \sim \mu_{\mathbf{G}}$ を特徴付けることが問題になる。

本稿では,

$$\mathrm{P}(\,Y_k = a_k\,) = p_k, \qquad \mathrm{P}(\,Y_k = 0\,) = 1 - p_k, \qquad \text{ただし} \quad a_k > 0, \quad 0 < p_k < 1$$

の場合に, $\mu_{\mathbf{G+Y}} \sim \mu_{\mathbf{G}}$ を特徴付ける必要十分条件を与える。

$$\sum_{a_k>2} p_k + \sum_{a_k \le 2} p_k^2 a_k^2 < \infty \quad \Longrightarrow \quad \mu_{\mathbf{G+Y}} \sim \mu_{\mathbf{G}} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{a_k>2} p_k^2 + \sum_{a_k \le 2} p_k^2 a_k^2 < \infty$$

が成り立つことは, Kitada and Sato [4], Sato and Tamashiro [6], あるいは, 命題 A から直ちに得られるが, 我々の結果は, $\sum_{a_k>2} p_k < \infty$ と $\sum_{a_k>2} p_k^2 < \infty$ の間を補間し, したがって, $\sup_k |Y_k| = \infty$ a.s. の場合でも $\mu_{\mathbf{G+Y}} \sim \mu_{\mathbf{G}}$ を $\mathbf{Y}$ だけに関する条件で特徴付けることができる。さらに, 様々な性質を持つ $\mathbf{Y}$ の具体例, 例えば,

$$\sum_k p_k^2 \left(e^{\frac{1}{2} a_k^2} - 1 \right) < \infty \qquad \text{かつ} \qquad \mu_{\mathbf{G+Y}} \not\sim \mu_{\mathbf{G}}$$

となる例を容易に構成することができる。Sato and Tamashiro [6] は, このような例を構成して, Kahane [2] の予想を否定的に解決した。

$$\sigma_k = \frac{a_k}{\sqrt{2 \log \frac{1+p_k}{p_k}}} \qquad (k \in \mathbb{N}), \qquad \varphi(\sigma) = \begin{cases} 2(1-\sigma^2), & 0 < \sigma \le \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \frac{1}{4}\left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right)^2, & \frac{1}{\sqrt{3}} < \sigma < 1, \\ 1, & \sigma \ge 1 \end{cases}$$

とする。φ は単調に減少する C^1 級関数で, $1 \le \varphi(\sigma) \le 2 \ (\forall \sigma > 0)$ である。

定理 1
$$\mu_{\mathbf{G+Y}} \sim \mu_{\mathbf{G}} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{a_k>2} \alpha(\sigma_k,\, p_k)\, p_k^{\varphi(\sigma_k)} + \sum_{a_k \le 2} a_k^2 p_k^2 < \infty$$

ただし,

$$\alpha(\sigma,\, p) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-\sigma^2)(3\sigma^2-1)\sqrt{|\log p|}}, & \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{6 \log \frac{1+p}{p}}} + \frac{1}{3\sqrt{2 \log \frac{1+p}{p}}} \le \sigma \le \sqrt{1 + \frac{1}{2 \log \frac{1+p}{p}}} - \frac{1}{\sqrt{2 \log \frac{1+p}{p}}}, \\ 1, & \text{その他} \end{cases}$$

命題 1
$$\sum_{a_k>2} p_k^{\varphi(\sigma_k)} + \sum_{a_k \le 2} a_k^2 p_k^2 < \infty \quad \Longrightarrow \quad \mu_{\mathbf{G+Y}} \sim \mu_{\mathbf{G}}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{a_k>2} \frac{p_k^{\varphi(\sigma_k)}}{\sqrt{|\log p_k|}} + \sum_{a_k \le 2} a_k^2 p_k^2 < \infty$$

系 1 $\sigma_k = \sigma$ (k に無関係), $\lim_k p_k = 0$ とする。

(a) $0 < \sigma \le \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, $\mu_{\mathbf{G+Y}} \sim \mu_{\mathbf{G}} \iff \sum_k p_k^{2(1-\sigma^2)} < \infty$

(b) $\frac{1}{\sqrt{3}} < \sigma < 1$ のとき, $\mu_{\mathbf{G+Y}} \sim \mu_{\mathbf{G}} \iff \sum_k \frac{p_k^{\frac{1}{4}(\sigma+\frac{1}{\sigma})^2}}{\sqrt{|\log p_k|}} < \infty$

(c) $\sigma \ge 1$ のとき, $\mu_{\mathbf{G+Y}} \sim \mu_{\mathbf{G}} \iff \sum_k p_k < \infty$

§ 2 証明の方針

すべての $k \in \mathbb{N}$ に対して $\mu_{X_k+Y_k} \sim \mu_{X_k}$ (互いに絶対連続) ならば, Kakutani [3] より, $\mu_{\mathbf{X+Y}} \sim \mu_{\mathbf{X}}$ か $\mu_{\mathbf{X+Y}} \perp \mu_{\mathbf{X}}$ (特異) のいずれかが成り立つ。Kitada and Sato [4] は, 次の 2 つの級数の収束が $\mu_{\mathbf{X+Y}} \sim \mu_{\mathbf{X}}$ と同等であることを証明した。これは必要十分条件であるが, そこに現れる $Z_k(x)$ は, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ の双方に関係する。

命題 B (Kitada and Sato) $\mu_{X_k+Y_k} \sim \mu_{X_k}$ ($\forall k \in \mathbb{N}$) であるとし,

$$Z_k(x) = \frac{d\mu_{X_k+Y_k}}{d\mu_{X_k}}(x) - 1, \qquad x \in \mathbb{R}$$

とおく。このとき,

$$\begin{aligned} & \mu_{\mathbf{X+Y}} \sim \mu_{\mathbf{X}} \\ \iff & \sum_k \mathrm{E}\,[\,Z_k(X_k) : Z_k(X_k) \ge 1\,] + \sum_k \mathrm{E}\left[\,Z_k(X_k)^2 : |Z_k(X_k)| < 1\,\right] < \infty \end{aligned}$$

が成り立つ。

いま,

$$Z_k(x) = \frac{d\mu_{G_k+Y_k}}{d\mu_{G_k}}(x) - 1 = p_k \left(\, e^{a_k x - \frac{1}{2}a_k^2} - 1 \,\right), \qquad x \in \mathbb{R}$$

であり,

$$\gamma_k = \frac{1}{2}a_k + \frac{1}{a_k}\log\frac{1+p_k}{p_k}$$

は, $Z_k(x) = 1$ の一意的な解である。よって,

$$\begin{aligned} & \mathrm{E}\,[\,Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \ge 1\,] = \mathrm{E}\,[\,Z_k(G_k) : G_k \ge \gamma_k\,] \\ = \ & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_k}^{\infty} p_k \left(\, e^{a_k x - \frac{1}{2}a_k^2} - 1 \,\right) e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \frac{p_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_k}^{\infty} \left(\, e^{-\frac{1}{2}(x-a_k)^2} - e^{-\frac{1}{2}x^2} \,\right) dx \\ = \ & \frac{p_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_k - a_k}^{\gamma_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \end{aligned} \tag{1}$$

であり,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\,Z_k(G_k)^2 : |Z_k(G_k)| < 1\,\right] = \mathrm{E}\left[\,Z_k(G_k)^2 : |G_k| < \gamma_k\,\right] \\
=\;& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\gamma_k}^{\gamma_k} p_k^2 \left(\, e^{a_k x - \frac{1}{2}a_k^2} - 1\,\right)^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \\
=\;& \frac{p_k^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\gamma_k}^{\gamma_k} \left(\, e^{2a_k x - a_k^2} - 2e^{a_k x - \frac{1}{2}a_k^2} + 1\,\right) e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \\
=\;& \frac{p_k^2}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\gamma_k}^{\gamma_k} e^{a_k^2} e^{-\frac{1}{2}(x-2a_k)^2}\, dx - 2\int_{-\gamma_k}^{\gamma_k} e^{-\frac{1}{2}(x-a_k)^2}\, dx + \int_{-\gamma_k}^{\gamma_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \right) \\
=\;& \frac{p_k^2}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{a_k^2} \int_{-\gamma_k-2a_k}^{\gamma_k-2a_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx - 2\int_{-\gamma_k-a_k}^{\gamma_k-a_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx + \int_{-\gamma_k}^{\gamma_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \right) \\
=\;& \frac{\sqrt{2\pi}}{p_k^2} \Bigg\{ (e^{a_k^2}-1) \int_{-\gamma_k-2a_k}^{\gamma_k-2a_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx + \int_{-\gamma_k-2a_k}^{\gamma_k-2a_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx - \int_{-\gamma_k}^{\gamma_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \\
& +2\left(\int_{-\gamma_k}^{\gamma_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx - \int_{-\gamma_k-a_k}^{\gamma_k-a_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \right) \Bigg\} \\
=\;& \frac{\sqrt{2\pi}}{p_k^2} \Bigg\{ (e^{a_k^2}-1) \int_{-\gamma_k-2a_k}^{\gamma_k-2a_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx - \int_{\gamma_k-2a_k}^{\gamma_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx + \int_{\gamma_k}^{\gamma_k+2a_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \\
& +2\left(\int_{\gamma_k-a_k}^{\gamma_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx - \int_{\gamma_k}^{\gamma_k+a_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \right) \Bigg\} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

である。また, $\mathcal{N}_0 = \{k \in \mathbb{N} : a_k > 2\}$ を

$$\mathcal{N}_1 = \{\, k \in \mathcal{N}_0 : \gamma_k - a_k \geq 1,\ \ \gamma_k - 2a_k > -1\,\} = \left\{ k \in \mathcal{N}_0 : 0 < \sigma_k < \sqrt{\frac{a_k}{3a_k - 2}} \right\}$$

$$\mathcal{N}_2 = \{\, k \in \mathcal{N}_0 : \gamma_k - a_k \geq 1,\ \ \gamma_k - 2a_k \leq -1\,\} = \left\{ k \in \mathcal{N}_0 : \sqrt{\frac{a_k}{3a_k - 2}} \leq \sigma_k \leq \sqrt{\frac{a_k}{2 + a_k}} \right\}$$

$$\mathcal{N}_3 = \{\, k \in \mathcal{N}_0 : \gamma_k - a_k < 1,\ \ \gamma_k - 2a_k \leq -1\,\} = \left\{ k \in \mathcal{N}_0 : \sigma_k > \sqrt{\frac{a_k}{2 + a_k}} \right\}$$

の 3 つの部分に分割する。$a_k > 2$ のとき, $\gamma_k - a_k < 1$ と $\gamma_k - 2a_k > -1$ が同時に成り立つことはない。

本稿では, 定理 1, 命題 1 を次のようにして証明していく。

まず, 命題 B を用いて次の命題を証明する。

命題 2 $\mu_{\mathbf{G+Y}} \sim \mu_{\mathbf{G}}$

$$\Longleftrightarrow \quad \sum_{a_k \leq 2} p_k^2 a_k^2 + \sum_{a_k > 2} p_k^2 + \sum_{a_k > 2} p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx + \sum_{a_k > 2} p_k^2 e^{a_k^2} \int_{-\infty}^{\gamma_k - 2a_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx < \infty$$

次に, この第 3 項, 第 4 項の積分を, 不等式

$$\frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \;\leq\; \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \;\leq\; \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}, \qquad \alpha \geq 1 \qquad (3)$$

によって評価して, 次の命題を証明する。

命題 3 $\mu_{\mathbf{G+Y}} \sim \mu_{\mathbf{G}}$

$$\iff \sum_{a_k \le 2} p_k^2 a_k^2 + \sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k^2 e^{a_k^2} + \sum_{k \in \mathcal{N}_2} \frac{a_k}{(\gamma_k - a_k)(2a_k - \gamma_k)} e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} + \sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k < \infty$$

この第 2 項の $p_k^2 e^{a_k^2}$, 第 3 項の $e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2}$ を p_k のベキで評価して, 次の命題を得る。

命題 4 $\mu_{\mathbf{G+Y}} \sim \mu_{\mathbf{G}}$

$$\iff \sum_{a_k \le 2} p_k^2 a_k^2 + \sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k^{2(1-\sigma_k)^2} + \sum_{k \in \mathcal{N}_2} \frac{1}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2 - 1)} \frac{p_k^{\frac{1}{4}\left(\sigma_k + \frac{1}{\sigma_k}\right)^2}}{\sqrt{\log \frac{1+p_k}{p_k}}} + \sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k < \infty$$

最後に,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < \sigma_k < \sqrt{\frac{a_k}{3a_k - 2}}, \qquad \sqrt{\frac{a_k}{2 + a_k}} < \sigma_k < 1$$

の場合を評価して, 定理の証明が完成する。

§ 3 証明

§ 3.1 命題 2 の証明

補題 1 $\mu_{\mathbf{G+Y}} \sim \mu_{\mathbf{G}} \implies \sum_{a_k \le 2} p_k^2 a_k^2 + \sum_{a_k > 2} p_k^2 < \infty$

証明 $\mu_{\mathbf{G+Y}} \sim \mu_{\mathbf{G}}$ とすれば, 命題 A より,

$$\infty > \sum_k \mathrm{E}[\, Y_k : |Y_k| \le 2\,]^2 \ge \sum_{a_k \le 2} \mathrm{E}[\, Y_k : |Y_k| \le 2\,]^2 = \sum_{a_k \le 2} p_k^2 a_k^2$$
$$\infty > \sum_k \mathrm{P}(\, |Y_k| > 2\,)^2 \ge \sum_{a_k > 2} \mathrm{P}(\, |Y_k| > 2\,)^2 = \sum_{a_k > 2} p_k^2$$

が成り立つ。 □

補題 2 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, 次の不等式が成り立つ。

(a) $\displaystyle\int_{\gamma_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \le \sqrt{2\pi}\, \mathrm{E}[\, Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \ge 1\,]$

(b) $\displaystyle p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \le 2\sqrt{2\pi}\, \mathrm{E}[\, Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \ge 1\,]$

(c) $\displaystyle p_k^2 \int_{\gamma_k - 2a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \le 6\sqrt{2\pi}\, \mathrm{E}[\, Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \ge 1\,]$

(d) $\displaystyle p_k^2 (e^{a_k^2} - 1) \int_{\gamma_k + 2a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \le \sqrt{2\pi}\, \mathrm{E}[\, Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \ge 1\,]$

証明 $\mathrm{E}[\,Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \geq 1\,] \geq \mathrm{P}(\,Z_k(G_k) \geq 1\,) = \mathrm{P}(\,G_k \geq \gamma_k\,) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\gamma_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$
であり, したがって,

$$p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \leq p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\gamma_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx + \int_{\gamma_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \leq 2\sqrt{2\pi}\,\mathrm{E}[\,Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \geq 1\,]$$

が成り立つ。また,

$$\begin{aligned} p_k^2 \int_{\gamma_k - 2a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx &\leq p_k^2 \int_{\gamma_k - 2a_k}^{\gamma_k - a_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx + p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \\ &= p_k^2 \int_{\gamma_k - a_k}^{\gamma_k} e^{-\frac{1}{2}(x-a_k)^2}\,dx + p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \\ &= p_k^2 \int_{\gamma_k - a_k}^{\gamma_k} e^{a_k x - \frac{1}{2}a_k^2} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx + 2\sqrt{2\pi}\,\mathrm{E}[\,Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \geq 1\,] \end{aligned}$$

であり, $x \leq \gamma_k$ のとき $Z_k(x) \leq 1$ だから,

$$e^{a_k x - \frac{1}{2}a_k^2} \leq \frac{1}{p_k} + 1 = \frac{1 + p_k}{p_k} \leq \frac{2}{p_k}, \qquad \forall x \leq \gamma_k$$

である。よって,

$$\begin{aligned} p_k^2 \int_{\gamma_k - 2a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx &\leq 2p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\gamma_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx + 2\sqrt{2\pi}\,\mathrm{E}[\,Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \geq 1\,] \\ &\leq 6\sqrt{2\pi}\,\mathrm{E}[\,Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \geq 1\,] \end{aligned}$$

が成り立つ。さらに,

$$\begin{aligned} p_k^2(e^{a_k^2} - 1) \int_{\gamma_k + 2a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx &= p_k^2(e^{a_k^2} - 1) \int_{\gamma_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+2a_k)^2}\,dx \\ &\leq p_k^2 e^{a_k^2} \int_{\gamma_k}^{\infty} e^{-2a_k x - 2a_k^2} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \leq p_k^2 e^{-a_k^2} \int_{\gamma_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \\ &\leq \int_{\gamma_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \leq \sqrt{2\pi}\,\mathrm{E}[\,Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \geq 1\,] \end{aligned}$$

である。 □

命題 2 の証明 $\mu_{\mathbf{G}+\mathbf{Y}} \sim \mu_{\mathbf{G}}$ とすれば, 補題 1, 命題 A, および (1), (2) より,

$$\sum_{a_k \leq 2} p_k^2 a_k^2 + \sum_{a_k > 2} p_k^2 + \sum_k p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx + \sum_k p_k^2(e^{a_k^2} - 1) \int_{-\infty}^{\gamma_k - 2a_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx < \infty$$

だから,

$$\sum_{a_k \leq 2} p_k^2 a_k^2 + \sum_{a_k > 2} p_k^2 + \sum_{a_k > 2} p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx + \sum_{a_k > 2} p_k^2 e^{a_k^2} \int_{-\infty}^{\gamma_k - 2a_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx < \infty$$

である。逆に, これが成り立つならば, (1), (2) と補題 2 から

$$\sum_{a_k > 2} \mathrm{E}[\,Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \geq 1\,] + \sum_{a_k > 2} \mathrm{E}\left[\,Z_k(G_k)^2 : |Z_k(G_k)| < 1\,\right] < \infty$$

である。よって, $\mu_{\mathbf{G+Y}} \sim \mu_{\mathbf{G}}$ を示すためには,

$$\sum_{a_k \le 2} \mathrm{E}\left[Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \ge 1 \right] + \sum_{a_k \le 2} \mathrm{E}\left[Z_k(G_k)^2 : |Z_k(G_k)| < 1 \right] < \infty$$

を示せばよく, これは, $\sum_{a_k \le 2} Z_k(G_k)$ の概収束と同等である (Kitada and Sato [4])。さらに, $\{Z_k(G_k)\}_k$ は独立確率変数列だから, $\sum_{a_k \le 2} Z_k(G_k)$ が L^2-収束することをいえばよく, $\mathrm{E}[Z_k(G_k)] = 0$ から, $\sum_{a_k \le 2} Z_k(G_k)$ の L^2-収束は $\sum_{a_k \le 2} \mathrm{E}[Z_k(G_k)^2] < \infty$ と同値である。

$a_k \le 2$ のとき, $e^{a_k^2} - 1 \le e^4 a_k^2$ だから,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[Z_k(G_k)^2 \right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p_k^2 \left(e^{a_k x - \frac{1}{2}a_k^2} - 1 \right)^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \\
&= \frac{p_k^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{a_k^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-2a_k)^2}\, dx - 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-a_k)^2}\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \right\} \\
&= \frac{p_k^2}{\sqrt{2\pi}} (e^{a_k^2} - 1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = p_k^2 (e^{a_k^2} - 1) \le p_k^2 a_k^2 e^4,
\end{aligned}$$

したがって, $\sum_{a_k \le 2} \mathrm{E}[Z_k(G_k)^2] \le e^4 \sum_{a_k \le 2} p_k^2 a_k^2 < \infty$ である。 □

§ 3.2 命題 3 の証明

不等式 (3) から,

$$\text{(I)} \begin{cases} \displaystyle\sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx < \infty \iff \sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k \frac{1}{\gamma_k - a_k} e^{-\frac{1}{2}(\gamma_k - a_k)^2} < \infty \\ \displaystyle\sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k^2 e^{a_k^2} \int_{-\infty}^{\gamma_k - 2a_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx < \infty \iff \sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k^2 e^{a_k^2} < \infty \end{cases}$$

$$\text{(II)} \begin{cases} \displaystyle\sum_{k \in \mathcal{N}_2} p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx < \infty \iff \sum_{k \in \mathcal{N}_2} p_k \frac{1}{\gamma_k - a_k} e^{-\frac{1}{2}(\gamma_k - a_k)^2} < \infty \\ \displaystyle\sum_{k \in \mathcal{N}_2} p_k^2 e^{a_k^2} \int_{-\infty}^{\gamma_k - 2a_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx < \infty \iff \sum_{k \in \mathcal{N}_2} p_k^2 e^{a_k^2} \frac{1}{2a_k - \gamma_k} e^{-\frac{1}{2}(2a_k - \gamma_k)^2} < \infty \end{cases}$$

$$\text{(III)} \begin{cases} \displaystyle\sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx < \infty \iff \sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k < \infty \\ \displaystyle\sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k^2 e^{a_k^2} \int_{-\infty}^{\gamma_k - 2a_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \iff \sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k^2 e^{a_k^2} \frac{1}{2a_k - \gamma_k} e^{-\frac{1}{2}(2a_k - \gamma_k)^2} < \infty \end{cases}$$

が成り立つ。また,

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{1}{2}(\gamma_k - a_k)^2} &= e^{a_k \gamma_k - \frac{1}{2}a_k^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} = \frac{1 + p_k}{p_k} e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} \\
e^{-\frac{1}{2}(2a_k - \gamma_k)^2} &= \left(e^{\gamma_k a_k - \frac{1}{2}a_k^2} \right)^2 e^{-a_k^2} e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} = \left(\frac{1 + p_k}{p_k} \right)^2 e^{-a_k^2}\, e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2}
\end{aligned}$$

だから

$$e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} < p_k e^{-\frac{1}{2}(\gamma_k - a_k)^2} < 2e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2}, \qquad e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} < p_k^2 e^{a_k^2} e^{-\frac{1}{2}(2a_k-\gamma_k)^2} < 4e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} \tag{4}$$

である。

補題 3

$$\sum_{k\in\mathcal{N}_1} p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx + \sum_{k\in\mathcal{N}_1} p_k^2 e^{a_k^2} \int_{-\infty}^{\gamma_k - 2a_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k\in\mathcal{N}_1} p_k^2 e^{a_k^2} < \infty$$

証明 (I) から,

$$\sum_{k\in\mathcal{N}_1} p_k^2 e^{a_k^2} < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k\in\mathcal{N}_1} p_k \frac{1}{\gamma_k - a_k} e^{-\frac{1}{2}(\gamma_k - a_k)^2} < \infty$$

を示せばよい。$\gamma_k - a_k \geq 1$ と (4) から,

$$p_k \frac{1}{\gamma_k - a_k} e^{-\frac{1}{2}(\gamma_k - a_k)^2} \leq 2e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2}$$

であり, また, $\log \frac{1+p_k}{p_k} = \gamma_k a_k - \frac{1}{2}a_k^2$ より

$$\frac{1}{p_k} < \frac{1+p_k}{p_k} = e^{\gamma_k a_k - \frac{1}{2}a_k^2}$$

だから,

$$p_k^2 e^{a_k^2} e^{\frac{1}{2}\gamma_k^2} > e^{-2\gamma_k a_k + a_k^2}\ e^{a_k^2}\ e^{\frac{1}{2}\gamma_k^2} = e^{\frac{1}{2}\gamma_k^2 - 2\gamma_k a_k + 2a_k^2} = e^{\frac{1}{2}(\gamma_k - 2a_k)^2} \geq 1$$

である。よって,

$$p_k \frac{1}{\gamma_k - a_k} e^{-\frac{1}{2}(\gamma_k - a_k)^2} \leq 2e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} \leq 2p_k^2 e^{a_k^2},$$

したがって,

$$\sum_{k\in\mathcal{N}_1} p_k^2 e^{a_k^2} < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k\in\mathcal{N}_1} p_k \frac{1}{\gamma_k - a_k} e^{-\frac{1}{2}(\gamma_k - a_k)^2} < \infty$$

が成り立つ。 □

補題 4

$$\sum_{k\in\mathcal{N}_2} p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx + \sum_{k\in\mathcal{N}_2} p_k^2 e^{a_k^2} \int_{-\infty}^{\gamma_k - 2a_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx < \infty$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sum_{k\in\mathcal{N}_2} \frac{a_k}{(\gamma_k - a_k)(2a_k - \gamma_k)} e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} < \infty$$

証明 これは (II) と (4) から直ちに分かる。 □

補題 5

$$\sum_{k\in\mathcal{N}_3} p_k \int_{\gamma_k-a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx + \sum_{k\in\mathcal{N}_3} p_k^2 e^{a_k^2}\int_{-\infty}^{\gamma_k-2a_k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx < \infty \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{k\in\mathcal{N}_3} p_k < \infty$$

証明　(III) より

$$\sum_{k\in\mathcal{N}_3} p_k < \infty \quad\Longrightarrow\quad \sum_{k\in\mathcal{N}_3} p_k^2 e^{a_k^2}\frac{1}{2a_k-\gamma_k}e^{-\frac{1}{2}(2a_k-\gamma_k)^2} < \infty$$

を示せばよい。 $2a_k-\gamma_k \geq 1$ と (4) より

$$p_k^2 e^{a_k^2}\frac{1}{2a_k-\gamma_k}e^{-\frac{1}{2}(2a_k-\gamma_k)^2} \leq 4e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2}$$

であり，$\gamma_k \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}\log\frac{1+p_k}{p_k}} = \sqrt{2\log\frac{1+p_k}{p_k}}$ より

$$e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} \leq e^{-\log\frac{1+p_k}{p_k}} = \frac{p_k}{1+p_k} < p_k$$

だから

$$p_k^2 e^{a_k^2}\frac{1}{2a_k-\gamma_k}e^{-\frac{1}{2}(2a_k-\gamma_k)^2} \leq 4e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} < 4p_k$$

である。よって，

$$\sum_{k\in\mathcal{N}_3} p_k < \infty \quad\Longrightarrow\quad \sum_{k\in\mathcal{N}_3} p_k^2 e^{a_k^2}\frac{1}{2a_k-\gamma_k}e^{-\frac{1}{2}(2a_k-\gamma_k)^2} < \infty$$

が成り立つ。　□

命題 2 と補題 3, 4, 5 から，$\mu_{\mathbf{G+Y}} \sim \mu_{\mathbf{G}}$ と

$$\sum_{a_k\leq 2} p_k^2 a_k^2 + \sum_{a_k>2} p_k^2 + \sum_{k\in\mathcal{N}_1} p_k^2 e^{a_k^2} + \sum_{k\in\mathcal{N}_2}\frac{a_k}{(\gamma_k-a_k)(2a_k-\gamma_k)}e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} + \sum_{k\in\mathcal{N}_3} p_k < \infty$$

は同値であり，

$$\sum_{k\in\mathcal{N}_1} p_k^2 \leq \sum_{k\in\mathcal{N}_1} p_k^2 e^{a_k^2}, \qquad \sum_{k\in\mathcal{N}_3} p_k^2 \leq \sum_{k\in\mathcal{N}_3} p_k$$

と次の補題から，$\sum_{a_k>2} p_k^2 < \infty$ は不要である。

補題 6
$$\sum_{k\in\mathcal{N}_2}\frac{a_k}{(\gamma_k-a_k)(2a_k-\gamma_k)}e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} < \infty \quad\Longrightarrow\quad \sum_{k\in\mathcal{N}_2} p_k^2 < \infty$$

証明

$$\sup_k \frac{(\gamma_k-a_k)(2a_k-\gamma_k)}{a_k}p_k^2 e^{\frac{1}{2}\gamma_k^2} < \infty$$

を証明すればよい。$\max(x-a_k)(2a_k-x) = \frac{1}{4}a_k^2$ だから

$$\frac{(\gamma_k-a_k)(2a_k-\gamma_k)}{a_k}p_k^2 e^{\frac{1}{2}\gamma_k^2} \leq \frac{a_k}{4}p_k^2 e^{\frac{1}{2}\gamma_k^2}$$

であり,
$$\frac{2}{p_k} > 1 + \frac{1}{p_k} = e^{\gamma_k a_k} e^{-\frac{1}{2}a_k^2}, \qquad -a_k < 1 - a_k \le \gamma_k - 2a_k \le -1$$
だから
$$\begin{aligned} p_k^2 e^{\frac{1}{2}\gamma_k^2} &< \left(2\, e^{-\gamma_k a_k}\ e^{\frac{1}{2}a_k^2}\right)^2 e^{\frac{1}{2}\gamma_k^2} = 4e^{a_k^2}e^{-2\gamma_k a_k}e^{\frac{1}{2}\gamma_k^2} = 4e^{\frac{1}{2}(\gamma_k - 2a_k)^2}e^{-a_k^2} \\ &< 4e^{\frac{1}{2}a_k^2}e^{-a_k^2} = 4e^{-\frac{1}{2}a_k^2} \end{aligned}$$
である。したがって,
$$\frac{(\gamma_k - a_k)(2a_k - \gamma_k)}{a_k} p_k^2 e^{\frac{1}{2}\gamma_k^2} \le \frac{a_k}{4} p_k^2 e^{\frac{1}{2}\gamma_k^2} \le \frac{a_k}{4} \cdot 4e^{-\frac{1}{2}a_k^2} \le \max_x \ x e^{-\frac{1}{2}x^2}$$
が成り立つ。 □

以上の補題から, 命題 3 が得られる。

§ 3.3 命題 4 の証明

命題 3 に現れた項を, p_k のベキの形に書き換えていく。まず,
$$e^{a_k^2} = e^{\frac{a_k^2}{\log \frac{1+p_k}{p_k}}\left(\log \frac{1+p_k}{p_k}\right)} = \left(\frac{p_k}{1+p_k}\right)^{-\frac{a_k^2}{\log \frac{1+p_k}{p_k}}} = p_k^{-\frac{a_k^2}{\log \frac{1+p_k}{p_k}}} (1+p_k)^{\frac{a_k^2}{\log \frac{1+p_k}{p_k}}}$$
であり, $k \in \mathcal{N}_1$ のとき $\gamma_k > 2a_k - 1$, $a_k > 2$ だから
$$\frac{1}{a_k} \log \frac{1+p_k}{p_k} > 2a_k - \frac{a_k}{2} - 1 = \frac{3}{2}a_k - \frac{a_k}{2} = a_k,$$
である。よって,
$$1 < (1+p_k)^{\frac{a_k^2}{\log \frac{1+p_k}{p_k}}} < 2$$
となり
$$p_k^{-\frac{a_k^2}{\log \frac{1+p_k}{p_k}}} < e^{a_k^2} < 2p_k^{-\frac{a_k^2}{\log \frac{1+p_k}{p_k}}}, \qquad k \in \mathcal{N}_1$$
が成り立つ。したがって,
$$\sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k^2 e^{a_k^2} < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k^{2 - \frac{a_k^2}{\log \frac{1+p_k}{p_k}}} < \infty \tag{5}$$
である。次に,
$$\gamma_k^2 = \frac{1}{4}a_k^2 + \log \frac{1+p_k}{p_k} + \frac{1}{a_k^2}\left(\log \frac{1+p_k}{p_k}\right)^2$$

より

$$e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} = e^{-\frac{1}{8}a_k^2} e^{-\frac{1}{2}\log\frac{1+p_k}{p_k}} e^{-\frac{1}{2a_k^2}\left(\log\frac{1+p_k}{p_k}\right)^2} = e^{-\frac{1}{8}a_k^2}\sqrt{\frac{p_k}{1+p_k}}\left(\frac{1+p_k}{p_k}\right)^{\frac{1}{2a_k^2}\log\frac{1+p_k}{p_k}}$$
$$= e^{-\frac{1}{8}a_k^2}\left(\frac{1+p_k}{p_k}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2a_k^2}\log\frac{1+p_k}{p_k}}$$

であり，

$$e^{-\frac{1}{8}a_k^2} = e^{-\frac{1}{8}\frac{a_k^2}{\log\frac{1+p_k}{p_k}}\left(\log\frac{1+p_k}{p_k}\right)} = \left(\frac{p_k}{1+p_k}\right)^{\frac{1}{8}\frac{a_k^2}{\log\frac{1+p_k}{p_k}}}$$

だから，

$$e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} = \left(\frac{p_k}{1+p_k}\right)^{\frac{1}{8}\frac{a_k^2}{\log\frac{1+p_k}{p_k}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2a_k^2}\log\frac{1+p_k}{p_k}} = \left(\frac{p_k}{1+p_k}\right)^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{a_k^2}{\log\frac{1+p_k}{p_k}}+2+\frac{2\log\frac{1+p_k}{p_k}}{a_k^2}\right)}$$
$$= \left(\frac{p_k}{1+p_k}\right)^{\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a_k^2}{2\log\frac{1+p_k}{p_k}}}+\sqrt{\frac{2\log\frac{1+p_k}{p_k}}{a_k^2}}\right)^2} \tag{6}$$

である。いま，

$$\gamma_k = \frac{1}{2}a_k + \frac{1}{a_k}\frac{a_k^2}{2\sigma_k^2} = \frac{1}{2}a_k + \frac{a_k}{2\sigma_k^2}$$

だから

$$\gamma_k - a_k = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sigma_k^2}\right), \qquad 2a_k - \gamma_k = \frac{a_k}{2}\left(3-\frac{1}{\sigma_k^2}\right),$$

したがって，

$$\frac{(\gamma_k - a_k)(2a_k-\gamma_k)}{a_k} = \frac{1}{a_k}\frac{a_k^2}{4}\left(\frac{1}{\sigma_k^2}-1\right)\left(3-\frac{1}{\sigma_k^2}\right) = \frac{a_k}{4\sigma_k^4}(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)$$
$$= \frac{1}{4}\frac{1}{\sigma_k^3}\sqrt{2\log\frac{1+p_k}{p_k}}(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sigma_k^3}\sqrt{\log\frac{1+p_k}{p_k}}(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)$$

が成り立つ。 $k \in \mathcal{N}_2$ のとき $a_k + 1 \le \gamma_k \le 2a_k - 1$ だから

$$\frac{1}{2}a_k + 1 \le \frac{1}{a_k}\log\frac{1+p_k}{p_k} \le \frac{3}{2}a_k - 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{2+a_k}{a_k} \le \frac{2\log\frac{1+p_k}{p_k}}{a_k^2} \le \frac{3a_k-2}{a_k},$$

したがって

$$1 < \sqrt{\frac{2+a_k}{a_k}} \le \frac{1}{\sigma_k} \le \sqrt{\frac{3a_k-2}{a_k}} < \sqrt{3}$$

である。よって,

$$\frac{2\sqrt{2}}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)}\frac{1}{\sqrt{\log\frac{1+p_k}{p_k}}} \le \frac{a_k}{(\gamma_k-a_k)(2a_k-\gamma_k)} \le \frac{6\sqrt{6}}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)}\frac{1}{\sqrt{\log\frac{1+p_k}{p_k}}}$$

が成り立つ。これらと (6) を併せて,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathcal{N}_2}\frac{a_k}{(\gamma_k-a_k)(2a_k-\gamma_k)}e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2}<\infty \\
\iff &\sum_{k\in\mathcal{N}_2}\frac{1}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)}\frac{1}{\sqrt{\log\frac{1+p_k}{p_k}}}\left(\frac{p_k}{1+p_k}\right)^{\frac{1}{4}\left(\sigma_k+\frac{1}{\sigma_k}\right)^2}<\infty \\
\iff &\sum_{k\in\mathcal{N}_2}\frac{1}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)}\frac{p_k^{\frac{1}{4}\left(\sigma_k+\frac{1}{\sigma_k}\right)^2}}{\sqrt{\log\frac{1+p_k}{p_k}}}<\infty
\end{aligned}$$

が成り立つ。

上の計算と命題 3 から, 命題 4 が成り立つ。

§ 3.4　定理 1 の証明

補題 7　(a)　$a_k>2,\quad \frac{1}{\sqrt{3}}<\sigma_k<\sqrt{\frac{a_k}{3a_k-2}}$　のとき, 次の不等式が成り立つ。

$$p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2}<p_k^{2(1-\sigma_k^2)}<e^{\frac{3}{4}}p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2}<\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{e^{\frac{3}{4}}}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)}\frac{p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2}}{\sqrt{|\log p_k|}}$$

(b)　$a_k>2,\quad \sqrt{\frac{a_k}{2+a_k}}<\sigma_k<1$　のとき, 次の不等式が成り立つ。

$$p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2}<p_k<ep_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2}<\frac{4e}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)}\frac{p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2}}{\sqrt{|\log p_k|}}$$

証明　(a)　$2(1-\sigma_k^2)<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k\right)$ だから,

$$p_k^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k\right)}<p_k^{2(1-\sigma_k^2)}$$

である。また, $\frac{1}{p_k}<\frac{1+p_k}{p_k}=e^{\frac{a_k^2}{2\sigma_k^2}}<e^{\frac{3}{2}a_k^2}$　より

$$\begin{aligned}
p_k^{2(1-\sigma_k^2)}p_k^{-\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2} &= p_k^{-\frac{1}{4}\sigma_k^2(3-\frac{1}{\sigma_k^2})^2}<p_k^{-\frac{1}{4}\frac{a_k}{3a_k-2}(3-\frac{3a_k-2}{a_k})^2} \\
&= \left(\frac{1}{p_k}\right)^{\frac{1}{a_k(3a_k-2)}}<e^{\frac{3}{2}\frac{a_k}{3a_k-2}}<e^{\frac{3}{4}}
\end{aligned}$$

だから,

$$p_k^{2(1-\sigma_k^2)} < e^{\frac{3}{4}} p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2}$$

である。さらに, $|\log p_k| < \log \frac{1+p_k}{p_k} = \frac{a_k^2}{2\sigma_k^2}$ だから,

$$(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)\sqrt{|\log p_k|} < \left(\frac{3a_k}{3a_k-2}-1\right)\frac{a_k}{\sqrt{2}\sigma_k} < \frac{\sqrt{6}}{3-\frac{2}{a_k}} < \sqrt{\frac{3}{2}}$$

である。

(b)　$1 < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k\right)$ より

$$p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2} < p_k$$

が成り立つ。また, $\frac{1}{p_k} < \frac{1+p_k}{p_k} = e^{\frac{a_k^2}{2\sigma_k^2}} < e^{\frac{1}{2}a_k(2+a_k)}$ だから,

$$p_k p_k^{-\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2} = p_k^{-\frac{1}{4}\sigma_k^2(\frac{1}{\sigma_k^2}-1)^2} < \left(\frac{1}{p_k}\right)^{\frac{1}{4}(\frac{2+a_k}{a_k}-1)^2} = \left(\frac{1}{p_k}\right)^{\frac{1}{a_k^2}} < e^{\frac{1}{2}\frac{a_k+2}{a_k}} < e,$$

よって,

$$p_k < e p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2}$$

である。さらに, $|\log p_k| < \log \frac{1+p_k}{p_k} = \frac{a_k^2}{2\sigma_k^2}$, $\sigma_k > \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ だから,

$$\begin{aligned}(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)\sqrt{|\log p_k|} &< \left(1-\frac{a_k}{2+a_k}\right) 2\,\frac{a_k}{\sqrt{2}\,\sigma_k} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{2+a_k}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a_k}{\sigma_k} < \frac{4}{1+\frac{2}{a_k}} < 4\end{aligned}$$

である。　□

定理 1 の証明　$\mu_{\mathbf{G+Y}} \sim \mu_{\mathbf{G}}$ とすれば, 命題 4 より,

$$\sum_{\substack{a_k>2 \\ \sigma_k \le \frac{1}{\sqrt{3}}}} p_k^{2(1-\sigma_k^2)} + \sum_{\substack{a_k>2 \\ \sigma_k \ge 1}} p_k \le \sum_{k\in\mathcal{N}_1} p_k^{2(1-\sigma_k^2)} + \sum_{k\in\mathcal{N}_3} p_k < \infty$$

であり, $\max\{1,\ 2(1-\sigma_k^2)\} \le \frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2$ だから,

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{a_k>2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}<\sigma_k<1}} \alpha(\sigma_k,\ p_k) p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2} \\ =& \sum_{\substack{a_k>2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}<\sigma_k<\sqrt{\frac{a_k}{3a_k-2}}}} p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2} + \sum_{k\in\mathcal{N}_2} \frac{1}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)}\frac{p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2}}{\sqrt{|\log p_k|}} + \sum_{\substack{a_k>2 \\ \sqrt{\frac{a_k}{2+a_k}}<\sigma_k<1}} p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2} \\ \le& \sum_{k\in\mathcal{N}_1} p_k^{2(1-\sigma_k^2)} + \sum_{k\in\mathcal{N}_2} \frac{1}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)}\frac{p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2}}{\sqrt{|\log p_k|}} + \sum_{k\in\mathcal{N}_3} p_k < \infty\end{aligned}$$

である。逆に,

$$\sum_{a_k \le 2} a_k^2 p_k^2 + \sum_{a_k > 2} \alpha(\sigma_k,\ p_k)\ p_k^{\varphi(\sigma_k)} < \infty$$

とすれば,

$$\sum_{\substack{a_k > 2 \\ \sigma_k \le \frac{1}{\sqrt{3}}}} p_k^{2(1-\sigma_k^2)} + \sum_{\substack{a_k > 2 \\ \sigma_k \ge 1}} p_k + \sum_{k \in \mathcal{N}_2} \frac{1}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)} \frac{p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2}}{\sqrt{|\log p_k|}} < \infty$$

であり, 補題 7 より

$$\sum_{\substack{a_k > 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} < \sigma_k < \sqrt{\frac{a_k}{3a_k-2}}}} p_k^{2(1-\sigma_k^2)} \le e^{\frac{3}{4}} \sum_{\substack{a_k > 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} < \sigma_k < \sqrt{\frac{a_k}{3a_k-2}}}} p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2} < \infty,$$

$$\sum_{\substack{a_k > 2 \\ \sqrt{\frac{a_k}{2+a_k}} < \sigma_k < 1}} p_k \le e \sum_{\substack{a_k > 2 \\ \sqrt{\frac{a_k}{2+a_k}} < \sigma_k < 1}} p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2} < \infty$$

だから,

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k^{2(1-\sigma_k)^2} + \sum_{k \in \mathcal{N}_2} \frac{1}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)} \frac{p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2}}{\sqrt{|\log p_k|}} + \sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k < \infty$$

である。したがって, 命題 4 より $\mu_{\mathbf{G+Y}} \sim \mu_{\mathbf{G}}$ が成り立つ。 □

§ 3.5　命題 1 の証明

補題 8 $k \in \mathcal{N}_2,\ 0 < p_k < \frac{1}{2}$ のとき, 次の不等式が成り立つ。

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} < (1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)\sqrt{|\log p_k|} < \frac{1}{3} p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2} p_k^{-2}.$$

証明　$p_k < \frac{1}{2}$ より $\log \frac{1+p_k}{p_k} < 2|\log p_k|$ だから,

$$\frac{a_k}{\sigma_k} = \sqrt{2\log\frac{1+p_k}{p_k}} < 2\sqrt{|\log p_k|}$$

である。したがって,
$\sigma_k \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$$(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)\sqrt{|\log p_k|} > \frac{1}{2}\left(\frac{3a_k}{3a_k-2} - 1\right)\frac{a_k}{2\sigma_k} > \frac{1}{2}\frac{2}{3-\frac{2}{a_k}}\frac{1}{2}\sqrt{2} > \frac{1}{3\sqrt{2}},$$

$\sigma_k > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$$(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)\sqrt{|\log p_k|} > \left(1-\frac{a_k}{2+a_k}\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)\frac{a_k}{2\sigma_k} > \frac{2}{1+\frac{2}{a_k}}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

である。一方, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} < \sigma_k < 1$ だから,

$$2-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k\right)^2 > 2-\frac{1}{4}(3+1+2) = \frac{1}{2},$$

したがって,

$$p_k^2(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)\sqrt{|\log p_k|}\,p_k^{-\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2} \le \frac{1}{3}\sqrt{\log\left(1+\frac{1}{p_k}\right)}\sqrt{p_k} < \frac{1}{3}$$

である。 □

命題 1 の証明

$$\sum_{a_k>2} p_k^{\varphi(\sigma_k)} + \sum_{a_k\le 2} a_k^2 p_k^2 < \infty$$

とする。

$$\sum_{k\in\mathcal{N}_1} p_k^{2(1-\sigma_k^2)} + \sum_{k\in\mathcal{N}_3} p_k \le \sum_{a_k>2} p_k^{\varphi(\sigma_k)} < \infty$$

だから, 命題 4 より,

$$\sum_{k\in\mathcal{N}_2} \frac{1}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)} \frac{p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2}}{\sqrt{|\log p_k|}} < \infty$$

を示せばよい。いま, $\sum_{a_k>2} p_k^2 \le \sum_{a_k>2} p_k^{\varphi(\sigma_k)} < \infty$ だから,

$$0 < p_k < \frac{1}{2}, \qquad k \ge k_0, \quad a_k > 2$$

をみたす $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在し, 補題 8 より,

$$\frac{1}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)} \frac{p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2}}{\sqrt{|\log p_k|}} \le 3\sqrt{2}\, p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2}, \qquad k_0 \le k \in \mathcal{N}_2$$

が成り立つ。よって,

$$\sum_{k\in\mathcal{N}_2} \frac{1}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)} \frac{p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2}}{\sqrt{|\log p_k|}} < \infty$$

である。

逆に, $\mu_{\mathbf{G+Y}} \sim \mu_{\mathbf{G}}$ とする。命題 A より $\sum_{a_k>2} p_k^2 < \infty$ だから, $a_k > 2$ のとき,

$$0 < p_k < \frac{1}{2}, \qquad \text{すなわち}, \qquad |\log p_k| > \log 2$$

が成り立っているとしても一般性を失わない。このとき, 命題 4 より

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_3} \frac{p_k^{\varphi(\sigma_k)}}{\sqrt{|\log p_k|}} \leq \frac{1}{\sqrt{\log 2}} \sum_{k \in \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_3} p_k^{\varphi(\sigma_k)} < \infty$$

である。

いま, $k \in \mathcal{N}_2$ に対して

$$0 < (1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2 - 1) \leq \left(1 - \frac{2}{3}\right)\left(3 \cdot \frac{2}{3} - 1\right) = \frac{1}{3}$$

だから,

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_2} \frac{p_k^{\varphi(\sigma_k)}}{\sqrt{|\log p_k|}} \leq \frac{1}{3} \sum_{k \in \mathcal{N}_2} \frac{1}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2 - 1)} \frac{p_k^{\varphi(\sigma_k)}}{\sqrt{|\log p_k|}} < \infty$$

である。よって,

$$\sum_{a_k \leq 2} a_k^2 p_k^2 + \sum_{a_k > 2} \frac{p_k^{\varphi(\sigma_k)}}{\sqrt{|\log p_k|}} < \infty$$

が成り立つ。 □

参 考 文 献

[1] M. Hino. On equivalence of product measures by random translation. *J. Math. Kyoto Univ.*, 34(4):755–765, 1994.

[2] J.-P. Kahane. Sur le chaos multiplicatif. *Ann. Sci. Math. Québec*, 9(2):105–150, 1985.

[3] S. Kakutani. On equivalence of infinite product measures. *Ann. Math.*, 49:214–224, 1948.

[4] K. Kitada and H. Sato. On the absolute continuity of infinite product measure and its convolution. *Probab. Th. Rel. Fields*, 81:609–627, 1989.

[5] H Mizumachi and H. Sato. Absolute continuity of a two-valued random translation of a gaussian sequence. to appear in Trends in Probability and Related Analysis, the Proceedings of SAP'96.

[6] H. Sato and M. Tamashiro. Multiplicative chaos and random translation. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 30(2):245–264, 1994.