数理解析研究所講究録
1039 巻 1998 年 111-117

Cover の conjecture に関連した結果

山口大・理工, 東南大学　陳 漢武 (Han Wu Chen)
山口大・工　　柳　研二郎 (Kenjiro Yanagi)

1 ガウス型通信路

次のようなフィードバックをもつ離散時間ガウス型通信路を考える.

$$Y_n = S_n + Z_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ただし $Z = \{Z_n; n = 1, 2, \ldots\}$ は雑音を表す退化していない平均 0 のガウス過程、$S = \{S_n; n = 1, 2, \ldots\}$ と $Y = \{Y_n; n = 1, 2, \ldots\}$ はそれぞれ入力信号と出力信号を表す確率過程である. 通信路は雑音のかからないフィードバックをもつとする. したがって S_n は送信するメッセージと出力信号 $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ の函数であるとして表される. レート R, 長さ n の符号語 $x^n(W, Y^{n-1})$, $W \in \{1, \ldots, 2^{nR}\}$ と復号函数 $g_n : \mathbf{R}^n \to \{1, 2, \ldots, 2^{nR}\}$ に対して、誤り確率は

$$Pe^{(n)} = Pr\{g_n(Y^n) \neq W; Y^n = x^n(W, Y^{n-1}) + Z^n\},$$

で定義される. ただし W は $\{1, 2, \ldots, 2^{nR}\}$ 上の一様分布で雑音 $Z^n = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ とは独立である. 入力信号には平均電力制限が課せられる. つまり

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[S_i^2] \leq P$$

である. またフィードバックは causal である. つまり $S_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ は $Z_1, \ldots, Z_{i-1}$ に従属している. 同様にフィードバックがない場合は S_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は $Z^n = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ と独立である.

紙面の都合で途中の経過は省略するが、最終的には有限ブロック長容量は次のように定義される.

$$C_{n,FB}(P) = \max \frac{1}{2n} \log \frac{|R_X^{(n)} + R_Z^{(n)}|}{|R_Z^{(n)}|},$$

ただし $|\cdot|$ は行列式を表し、最大値は

$$Tr[(I + B)R_X^{(n)}(I + B^t) + BR_Z^{(n)}B^t] \leq nP$$

を満たす狭義下三角行列 B と 非負対称行列 $R_X^{(n)}$ についてとる. 同様にフィードバックがないときには容量 $C_n(P)$ は $B=0$ としたときの最大値である. これらの条件の下で Cover and Pombra [2] は次の結果を得た.

Proposition 1 任意の $\epsilon > 0$ に対して各 $n=1,2,\ldots$ でブロック長 n で $2^{n(C_{n,FB}(P)-\epsilon)}$ 個の符号語が存在して $n\to\infty$ のとき $Pe^{(n)}\to 0$ とできる. 逆に任意の $\epsilon>0$ とブロック長 n で $2^{n(C_{n,FB}(P)+\epsilon)}$ 個の符号語からなる任意の符号の列に対しても $Pe^{(n)}\to 0\ (n\to\infty)$ が成り立たない. これはフィードバックをもたない場合も成り立つ.

ここではブロック長 n を固定したとき $C_{n,FB}(P)$ と $C_n(P)$ との間の関係に興味がある. $C_n(P)$ は Gallager [5] によって正確に求められている.

Proposition 2

$$C_n(P) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{k}\log\frac{nP+r_1+\cdots+r_k}{kr_i},$$

ただし $0<r_1\le r_2\le\cdots\le r_n$ は $R_Z^{(n)}$ の固有値、$k(\le n)$ は $nP+r_1+\cdots+r_k > kr_k$ を満たす最大整数である.

ところで $C_{n,FB}(P)$ は正確には得られないので、今まで多くの人々によって様々な形の上界が得られている ([4], [7], [2]). 以下簡単のため $R_X^{(n)}, R_Z^{(n)},\cdots$ をそれぞれ $R_X, R_Z,\cdots$ のように (n) を省略して用いる.

Theorem 1

$$C_n(P)\le C_{n,FB}(P)\le 2C_n(P).$$

Theorem 2

$$C_n(P)\le C_{n,FB}(P)\le C_n(P)+\frac{1}{2}.$$

2 Conjecture

最近 Cover [3] により次のような conjecture が出されている.

Theorem 3 (open problem)

$$C_n(P) \le C_{n,FB}(P) \le C_n(2P).$$

この conjecture は $n=2$ のとき成り立つことを示す．つまり

Theorem 4

$$C_2(P) \le C_{2,FB}(P) \le C_2(2P).$$

以下その略証を示す．
$n=2$ のとき $C_{2,FB}(P)$ は次のように与えられる．ただし

$$R_Z = \begin{pmatrix} k & m \\ m & \ell \end{pmatrix}, k, \ell > 0, k\ell > m^2 \neq 0$$

$$R_X = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}, a, b \ge 0, ab \ge c^2$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

とする．このとき Ihara and Yanagi [6] によってつぎの結果が得られている．

Proposition 3

$$e^{4C_{2,FB}(P)} = \max_{0 \le a \le 2P} \frac{(a+k)(b+\ell) - (|m| - \sqrt{ab})^2}{k\ell - m^2},$$

ただし max は

$$b = \frac{(2P-a)(a+k)}{k},$$
$$c = -\sqrt{ab}\,(m>0),$$
$$c = \sqrt{ab}\,(m<0),$$
$$t = -\frac{c}{a+k}$$

で与えられる．

a について最大をとる前の式の分子を書き直すと次のようになる.

$$
\begin{aligned}
& (a+k)(b+\ell)-(|m|-\sqrt{ab})^2 \\
= \ & \ell a+kb+k\ell-m^2+2|m|\sqrt{ab} \\
= \ & \ell a+kb+k\ell-m^2+\frac{2|m|}{\sqrt{k\ell}}\sqrt{\ell a\cdot kb} \\
\leq \ & \ell a+kb+k\ell-m^2+\frac{|m|}{\sqrt{k\ell}}(\ell a+kb) \\
= \ & (1+\frac{|m|}{\sqrt{k\ell}})(\ell a+kb)+k\ell-m^2 \\
\leq \ & 2(\ell a+kb)+k\ell-m^2.
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
& \ell a+kb \\
= \ & \ell a+(2P-a)(a+k) \\
= \ & -a^2+(2P+\ell-k)a+2Pk \\
= \ & -\{a-(P+\frac{\ell-k}{2})\}^2+(P+\frac{\ell-k}{2})^2+2Pk \\
= \ & -\{a-(P+\frac{\ell-k}{2})\}^2 \\
& +P^2+(k+\ell)P+\frac{(k-\ell)^2}{4}.
\end{aligned}
$$

次の３通りの場合が考えられる.

(1) $0<P\leq(k-\ell)/2$ のとき, $a=0, b=2P$ で最大となり,

$$(1+\frac{|m|}{\sqrt{k\ell}})2Pk+k\ell-m^2<4Pk+k\ell-m^2.$$

(2) $0<P\leq(\ell-k)/2$ のとき, $a=2P, b=0$ で最大となり,

$$(1+\frac{|m|}{\sqrt{k\ell}})2P\ell+k\ell-m^2<4P\ell+k\ell-m^2.$$

(3) $P\geq(k-\ell)/2$ 又は $P\geq(\ell-k)/2$ のとき,

$$
\begin{aligned}
a &= P+\frac{\ell-k}{2}, \\
b &= (P+\frac{k-\ell}{2})(P+\frac{k+\ell}{2})/k \\
&= \frac{P^2}{k}+P+\frac{k^2-\ell^2}{4k}
\end{aligned}
$$

で最大となり,

$$
\begin{aligned}
&(1+\frac{|m|}{\sqrt{k\ell}})\{P^2+(k+\ell)P+\frac{(k-\ell)^2}{4}\}+k\ell-m^2 \\
&< 2P^2+2(k+\ell)P+\frac{(k-\ell)^2}{2}+k\ell-m^2.
\end{aligned}
$$

次に $e^{4C_2(2P)}$ の分子を計算すると

(a) $16P^2 \leq (k-\ell)^2+4m^2$ のとき

$$2P\{k+\ell+\sqrt{(k-\ell)^2+4m^2}\}+k\ell-m^2.$$

(b) $16P^2 > (k-\ell)^2+4m^2$ のとき

$$4P^2+2(k+\ell)P+\frac{(k+\ell)^2}{4}.$$

ここで

(1) と **(a)** の比較

$$
\begin{aligned}
& k+\ell+\sqrt{(k-\ell)^2+4m^2}-2k \\
= \ & \ell-k+\sqrt{(k-\ell)^2+4m^2} > 0.
\end{aligned}
$$

(2) と **(a)** の比較

$$
\begin{aligned}
& k+\ell+\sqrt{(k-\ell)^2+4m^2}-2\ell \\
= \ & k-\ell+\sqrt{(k-\ell)^2+4m^2} > 0.
\end{aligned}
$$

(3) と **(a)** の比較

$$
\begin{aligned}
& 2P\{k+\ell+\sqrt{(k-\ell)^2+4m^2}\}+k\ell-m^2 \\
\geq \ & 2P\{k+\ell+\sqrt{16P^2}\}+k\ell-m^2 \\
= \ & 8P^2+2(k+\ell)P+k\ell-m^2
\end{aligned}
$$

これより

$$
\begin{aligned}
& 8P^2+2(k+\ell)P+k\ell-m^2 \\
& -\{2P^2+2(k+\ell)P+\frac{(k-\ell)^2}{2}+k\ell-m^2\} \\
= \ & 6P^2-\frac{(k-\ell)^2}{2} \\
\geq \ & 6\cdot\frac{(k-\ell)^2}{4}-\frac{(k-\ell)^2}{2} \\
= \ & (k-\ell)^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

(1) と (b) の比較

$$\begin{aligned}
& 4P^2 + 2(k+\ell)P + \frac{(k+\ell)^2}{4} \\
& -4kP - (k\ell - m^2) \\
= \;& 4P^2 + 2(\ell - k)P + \frac{(k-\ell)^2}{4} - (k\ell - m^2) \\
= \;& 4(P + \frac{\ell - k}{4})^2 - \frac{(k-\ell)^2}{4} + \frac{(k+\ell)^2}{4} \\
& -k\ell + m^2 \\
= \;& 4(P + \frac{\ell - k}{4})^2 + m^2 > 0.
\end{aligned}$$

(2) と (b) の比較

$$\begin{aligned}
& 4P^2 + 2(k+\ell)P + \frac{(k+\ell)^2}{4} - 4\ell P \\
& -(k\ell - m^2) \\
= \;& 4P^2 + 2(k - \ell)P + \frac{(k+\ell)^2}{4} - (k\ell - m^2) \\
= \;& 4(P + \frac{k - \ell}{4})^2 - \frac{(k-\ell)^2}{4} + \frac{(k+\ell)^2}{4} \\
& -k\ell + m^2 \\
= \;& 4(P + \frac{k - \ell}{4})^2 + m^2 > 0.
\end{aligned}$$

(3) と (b) の比較

$$\begin{aligned}
& 4P^2 + 2(k+\ell)P + \frac{(k+\ell)^2}{4} \\
& -2P^2 - 2(k+\ell)P - \frac{(k-\ell)^2}{2} - (k\ell - m^2) \\
= \;& 2P^2 + \frac{(k+\ell)^2 - 2(k-\ell)^2 - 4k\ell}{4} + m^2 \\
= \;& 2P^2 - \frac{(k-\ell)^2}{4} + m^2 \\
\geq \;& 2 \cdot \frac{(k-\ell)^2}{4} - \frac{(k-\ell)^2}{4} + m^2 \\
= \;& \frac{(k-\ell)^2 + 4m^2}{4} > 0.
\end{aligned}$$

以上より $C_2(P) \leq C_{2,FB}(P) \leq C_2(2P)$.

参考文献

[1] H. W. Chen and K. Yanagi, "On the Cover's conjecture on capacity of Gaussian channel with feedback", IEICE Trans. Fundamentals, vol E80-A, pp 2272-2275, Nobember 1997.

[2] T. Cover and S. Pombra, "Gaussian feedback capacity", IEEE Trans. Information Theory, vol IT-35, pp 37-43, January 1989.

[3] T. Cover and B. Gopinath, Open problems in communication and computation, Springer-Verlag, New York, 1987.

[4] P. Ebert, "The capacity of the Gaussian channel with feedback", Bell. Syst. Tech. J., vol 49, pp 1705-1712, 1970.

[5] R. G. Gallager, Information theory and reliable communication, John Wiley and Sons, New York, 1968.

[6] S. Ihara and K. Yanagi, "Capacity of discrete time Gaussian channel with and without feedback, II", Japan J. Appl. Math., vol 6, pp 245-258, 1989.

[7] M. Pinsker, talk delivered at the Soviet Information Theory Meeting, (no abstract published), 1969.

[8] K. Yanagi, "ガウス型通信路の最近の問題について", 京都大学数理解析研究所研究集会「応用函数解析の研究」(1996.6.17-6.18), 講究録, vol 975, pp 1-13, 1996.