数理解析研究所講究録
1039 巻 1998 年 6-11

Jensen の逆不等式の等号成立条件

山形大工学部　高橋眞映 (Sin-Ei Takahasi)
東邦大理学部　塚田　真 (Makoto Tsukada)

我々は、良く知られた凸（凹）関数に関する Jensen の不等式のある種の逆不等式が成立する条件及び等号成立条件を考察する。特に累乗関数の場合は、通常の算術平均、幾何平均、調和平均が等号成立条件に深く関与していることを観る。

有界閉区間 $[m, M]$ 上の凸（凹）関数 $\varphi(t)$ 及び確率空間 (X, μ) 上の $f(X) \subseteq [m, M]$ を満たす可測関数 $f(x)$ について、

$$\varphi\left(\int_X f\,d\mu\right) \leq \int_X \varphi \circ f\,d\mu \quad \left(\text{resp. } \int_X \varphi \circ f\,d\mu \leq \varphi\left(\int_X f\,d\mu\right)\right)$$

が成り立つと主張するのが Jensen の不等式である。そこで、左辺の一次式で右辺を評価する問題を考える。例えば Kantorovich の不等式 [2] は, $X = [m, M]$ $(0 < m < M)$, μ を X 上の台が有限な離散確率測度とするとき、

$$\int_X x^{-1} d\mu(x) \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm}\left(\int_X x\,d\mu(x)\right)^{-1}$$

が成立することを主張するが、これは上の評価問題の一例である。またこのとき、等号が成立するための必要十分条件は $\mu(\{m\}) = \mu(\{M\}) = \frac{1}{2}$ で与えられることが知られている (cf. [1], [3], [4])。

我々は上の評価問題及び等号成立条件に関して、一般に次の定理が成り立つことを示す (cf. [5])。

Theorem . Let $\varphi : [m, M] \to \boldsymbol{R}$, $\varphi(t) > 0$, $\varphi''(t) > 0$ $(\varphi''(t) < 0)$ for $t \in [m, M]$ and f a measurable function on a probability space (X, μ) with $f(X) \subseteq [m, M]$. Then

$$\int_X \varphi \circ f \, d\mu \le \alpha\varphi(\int_X f \, d\mu) + \beta \left(\text{resp. } \alpha\varphi(\int_X f \, d\mu) + \beta \le \int \varphi \circ f \, d\mu \right)$$

for all real numbers α and β such that $\alpha > 0$ and $\beta = -\alpha\varphi(\varphi'^{-1}(\frac{a}{\alpha})) + a\varphi'^{-1}(\frac{a}{\alpha}) + b$, where $a = \dfrac{\varphi(M) - \varphi(m)}{M - m}$ and $b = \dfrac{M\varphi(m) - m\varphi(M)}{M - m}$.

The equality is attained if and only if $\mu(m < f(x) < M) = 0$ and $\lambda_m m + \lambda_M M = \varphi'^{-1}(\frac{a}{\alpha})$, where $\lambda_m = \mu(f(x) = m)$ and $\lambda_M = \mu(f(x) = M)$.

証明。 凸ケースについて示せば十分であろう。この場合関数 $\alpha\varphi(t) + \beta$ ($\alpha > 0$, $\beta \in \boldsymbol{R}$) も凸であることに注意する。 さて実数 α, β が次式を満たすとしよう。但し $\alpha > 0$ とする：

(1) $$\beta = -\alpha\varphi(\varphi'^{-1}(\tfrac{a}{\alpha})) + a\varphi'^{-1}(\tfrac{a}{\alpha}) + b .$$

このとき関数 $\alpha\varphi(t) + \beta$ のグラフは直線 $at + b$ に接しかつその上方に位置する。更にセントロイド $\left(\int_X f \, d\mu, \int_X \varphi \circ f \, d\mu\right)$ は直線 $at + b$ の下方に位置する。それ故我々は欲すべき不等式：$\int_X \varphi \circ f \, d\mu \le \alpha\varphi(\int_X f \, d\mu) + \beta$ を得る。

次に容易な観察により、 等式

(2) $$\int_X \varphi \circ f \, d\mu = \alpha\varphi(\int_X f \, d\mu) + \beta$$

が成り立つことと、次の２式が同時に成り立つことは同値であることが分かる：

(3) $$\varphi'^{-1}(\tfrac{a}{\alpha}) = \int_X f \, d\mu$$

and

(4) $$\int_X \varphi \circ f \, d\mu = a\varphi'^{-1}(\tfrac{a}{\alpha}) + b .$$

先ず次の２式を仮定しよう：

(5) $$\mu(m < f(x) < M) = 0$$

and

(6) $$\lambda_m m + \lambda_M M = \varphi'^{-1}(\tfrac{a}{\alpha}).$$

このとき (5) によって、 $\int_X \varphi \circ f\, d\mu = \lambda_m \varphi(m) + \lambda_M \varphi(M)$ である。更に

$$
\begin{aligned}
\alpha\varphi\left(\int_X f\, d\mu\right) + \beta &= \alpha\varphi(\lambda_m m + \lambda_M M) + \beta \quad \text{by (5)} \\
&= \alpha\varphi(\varphi'^{-1}(\tfrac{a}{\alpha})) + \beta \quad \text{by (6)} \\
&= a\varphi'^{-1}(\tfrac{a}{\alpha}) + b \quad \text{by (1)} \\
&= a(\lambda_m m + \lambda_M M) + b \quad \text{by (6)} \\
&= \lambda_m \varphi(m) + \lambda_M \varphi(M) \quad \text{since } \lambda_m + \lambda_M = 1 \text{ by (5)}
\end{aligned}
$$

であるから (2) を得る。

逆に (2) を仮定しよう。(5) を示す為に、$\lambda_0 = \mu(m < f(x) < M)$ と置く。従って $\lambda_0 + \lambda_m + \lambda_M = 1$ である。更に (3) と (4) から、 $\int_X \varphi \circ f\, d\mu = a\int_X f\, d\mu + b$ であるから、次式が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
&\lambda_m \varphi(m) + \lambda_M \varphi(M) + \int_{m<f<M} \varphi \circ f\, d\mu \\
&\qquad = a\left(\lambda_m m + \lambda_M M + \int_{m<f<M} f\, d\mu\right) + b \\
&\qquad = a(\lambda_m m + \lambda_M M) + b(\lambda_m + \lambda_M) + \int_{m<f<M} (af + b)\, d\mu .
\end{aligned}
$$

それ故

$$
\begin{aligned}
\int_{m<f<M} (af + b - \varphi \circ f)\, d\mu &= \lambda_m \varphi(m) + \lambda_M \varphi(M) - a(\lambda_m m + \lambda_M M) - b(\lambda_m + \lambda_M) \\
&= \lambda_m \{\varphi(m) - (am + b)\} + \lambda_M \{\varphi(M) - (aM + b)\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

である。しかし $af(x) + b > \varphi(f(x))$ $(m < f(x) < M)$ であるから、 $\lambda_0 = 0$ でなければならない。従って (5) が示された。 また (6) は (3) と (5) から直ちに導かれる。

証明終

注意。 α を変数とする関数 $\beta = -\alpha\varphi(\varphi'^{-1}(\frac{a}{\alpha})) + a\varphi'^{-1}(\frac{a}{\alpha}) + b$ は φ が凸、凹に関わらず単調増加関数となることが示される。また φ が凸の場合 $m \le \varphi'^{-1}(\frac{a}{\alpha}) \le M$ であるから、 $\varphi'(m) \le \frac{a}{\alpha} \le \varphi'(M)$, 従って多くの場合ある実数 $\alpha_m, \alpha_M, \beta_m, \beta_M$ があって、 $\alpha_m \le \alpha \le \alpha_M$ かつ $\beta_m \le \beta \le \beta_M$ である。勿論 φ が凹の場合も同様である。

例。$\varphi(t)=t^p$, $0<m<M, p\neq 0,1$ の場合について調べてみる。先ず

$$a=\frac{M^p-m^p}{M-m},\ b=\frac{Mm^p-mM^p}{M-m},\ t_0=\varphi'^{-1}(\tfrac{a}{\alpha})=\left(\frac{a}{p\alpha}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

である。一方

$$\beta=-\alpha\varphi(\varphi'^{-1}(\tfrac{a}{\alpha}))+a\varphi'^{-1}(\tfrac{a}{\alpha})+b=-\alpha t_0{}^p+at_0+b.$$

しかし $\alpha=\frac{a}{pt_0{}^{p-1}}$, 従って $\beta=-\frac{a}{p}t_0+at_0+b=a(1-\frac{1}{p})t_0+b$, それ故

$$t_0=\frac{p}{p-1}\frac{\beta-b}{a}=\frac{p}{p-1}\frac{\beta(M-m)+mM^p-Mm^p}{M^p-m^p}$$

であるから、次式を得る：

$$\lambda_m m+\lambda_M M=\frac{p}{p-1}\frac{\beta(M-m)+mM^p-Mm^p}{M^p-m^p}.$$

特に $\lambda_m m+\lambda_M M\Big|_{\beta=0}$ は $p=-1$ のとき m と M の算術平均、$p=\frac{1}{2}$ のとき m と M の幾何平均、$p=2$ のとき m と M の調和平均を表している。また $\alpha_m, \alpha_M, \beta_m, \beta_M$ に関する情報としては次式を得る：

(i) $p=-1$: $\frac{m}{M}\leq\alpha\leq\frac{M}{m},\ -\frac{M-m}{Mm}\leq\beta\leq\frac{M-m}{Mm}$.

(ii) $p=\frac{1}{2}$: $\frac{2\sqrt{m}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}\leq\alpha\leq\frac{2\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}},\ -\frac{\sqrt{M}\left(\sqrt{M}-\sqrt{m}\right)}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}\leq\beta\leq\frac{\sqrt{m}\left(\sqrt{M}-\sqrt{m}\right)}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}$.

(iii) $p=2$: $\frac{M+m}{2M}\leq\alpha\leq\frac{M+m}{2m},\ -\frac{m(M-m)}{2}\leq\beta\leq\frac{M(M-m)}{2}$.

ところで $p=-1, \beta=0$ の場合は、$\beta=-\alpha\varphi(\varphi'^{-1}(\frac{a}{\alpha}))+a\varphi'^{-1}(\frac{a}{\alpha})+b$ を α に関して解くと、$\alpha=\frac{(M+m)^2}{4Mm}$ となり、従って $\int_X\varphi\circ f\,d\mu\leq\alpha\varphi(\int_X f\,d\mu)+\beta$ は、特に f が $f(x)=x\ (m\leq x\leq M)$ のとき Kantorovich の不等式

$\int_X x^{-1}d\mu(x)\leq\frac{(M+m)^2}{4Mm}\left(\int_X xd\mu(x)\right)^{-1}$ を表す。また容易な計算により、

$\mu(m<f(x)<M)=0$ かつ $\lambda_m m+\lambda_M M=\varphi'^{-1}(\frac{a}{\alpha})$ であることと、$\mu(\{m\})=\mu(\{M\})=\frac{1}{2}$ とは同値であることが分かり、$p=-1, \beta=0$ が Kantorovich ケースと考えられる。

更に次式の成り立つことが分かる。

$$\lim_{p\to-\infty} \lambda_m m + \lambda_M M\Big|_{\beta=0} = M,\ \lim_{p\to\infty} \lambda_m m + \lambda_M M\Big|_{\beta=0} = m\,,$$

$$\lim_{p\to 0} \lambda_m m + \lambda_M M\Big|_{\beta=0} = \frac{M-m}{\log M - \log m},$$

$$\lim_{p\to 1} \lambda_m m + \lambda_M M\Big|_{\beta=0} = \frac{Mm(\log M - \log m)}{M-m}.$$

また変数 $p\in \boldsymbol{R}$ に関する関数 $\rho(p) = \rho_{m,M}(p) = \frac{p}{p-1}\frac{mM^p - Mm^p}{M^p - m^p}$ は単調減少関数である。このことは棚橋 [6] によって証明された。

問題。 実関数 $\lambda: (0,\infty)\times(0,\infty) \to [0,1]$ が与えられたとき、次の性質を満たす凸（凹）C^2 – 関数 $\varphi: (0,\infty)\to(0,\infty)$ を決定せよ：

$$\frac{\{\varphi(x)-\varphi(y)\}\varphi(\lambda(x,y)x+(1-\lambda(x,y))y)}{\varphi'(\lambda(x,y)x+(1-\lambda(x,y))y)}$$
$$= \{\varphi(x)-\varphi(y)\}\{\lambda(x,y)x+(1-\lambda(x,y))y\} + x\varphi(y) - y\varphi(x)$$
$$(0<x<y<\infty)$$

特に $\lambda(x,y)=\frac{1}{2}$, つまり Kantorovich ケースの場合は、上式は

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \varphi'\left(\frac{x+y}{2}\right)\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\quad (0<x<y<\infty)$$

となる。 この場合は $\varphi(t)=\frac{c}{t}$ $(c\neq 0)$ であろうか？

問題の意味：$\mu(m<f(x)<M)=0$ は $[m,M]$ の内点を一つ決めると言うことである。そこで実関数 $\lambda: (0,\infty)\times(0,\infty) \to [0,1]$ が与えられたとき、

(a) $$\lambda(x,y)x+(1-\lambda(x,y))y = \varphi'^{-1}(\tfrac{a}{\alpha})\,,$$

(b) $$\beta = -\alpha\varphi(\varphi'^{-1}(\tfrac{a}{\alpha})) + a\varphi'^{-1}(\tfrac{a}{\alpha}) + b\,,$$

where $a=\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}$ and $b=\frac{y\varphi(x)-x\varphi(y)}{y-x}$ が任意の $0<x<y<\infty$ について成り立つような φ を決めたい。(a), (b) から α を消去すると、

$$\beta(x-y) + \frac{\{\varphi(x)-\varphi(y)\}\varphi(\lambda(x,y)x+(1-\lambda(x,y))y)}{\varphi'(\lambda(x,y)x+(1-\lambda(x,y))y)}$$
$$= \{\varphi(x)-\varphi(y)\}\{\lambda(x,y)x+(1-\lambda(x,y))y\} + x\varphi(y) - y\varphi(x)$$

を得る。特に $\beta=0$ とすると、問題の中の式が得られる。

参考文献

1. P. Henrici, Two remarks on the Kantorovich inequality, Amer. Math. Monthly, 68 (1961), 904-906.
2. L. V. Kantorovich, Functional analysis and applied mathematics (in Russian), Uspechi Mat. Nauk, 3(1948), 89-185.
3. M. Nakamura, A remark on a paper of Greub and Rheinboldt, Proc. Japan Acad., 36(1960), 198-199.
4. Makoto Tsukada and Sin-Ei Takahasi, The best possibility of the bound for the Kantorovich inequality and some remarks, to appear in J. Inequal. Appl.
5. 高橋眞映, Ky Fan の行列不等式に関する一考察、実解析シンポジューム大分、1996.
6. K. Tanahashi, Private communication, 1997.