

自由確率変数の分布関数

千葉大理 樋渡 修 (Osamu Hiwatashi)
お茶女大理 黒田 倫子 (Tomoko Kuroda)
千葉大理 渚 勝 (Masaru Nagisa)
お茶女大理 吉田 裕亮 (Hiroaki Yoshida)

0 はじめに

作用素環における自由群から生成されるフォンノイマン環の研究に端を発し、フォンノイマン環の自由積の研究へと発展していく過程で free 性という概念が様々な観点から注目されるようになってきた。特に、D. Voiculescu による free 版中心極限定理の極限分布としての半円分布は、通常確率論における独立な確率変数と正規分布、非可換環の free な元と半円分布、との関係を見事に浮きあがらせているものである。

ここでは、この関係を基にして、通常確率論で知られている正規分布 χ^2 分布の特徴付けを非可換環の世界で展開することを試みる。この内容の一部は、数理解析研究所の短期共同研究集会で既に述べており、また、その報告集に解説 [HY] も書いているので、次の章では、必要な用語を述べるにとどめ、続く章では、 χ^2 分布の特徴付けに焦点を絞り紹介する。

上述の解説 [HY] と以下の解説により free 確率論の概要は理解していただきたいと思います。議論を展開するフォンノイマン環の自由積の構成、free な半円分布を持つ元の典型的な構成方法 (Fock 空間による構成法) など、説明すべきことを多く残していますが、それらについては [VDN] を参考して頂きたい。

1 free 確率空間

Ω を base space, Σ を σ -field, また μ を positive で $\mu(\Omega) = 1$ を満たす確率測度とし確率空間は、 (Ω, Σ, μ) と表記される。もし、 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が可積分であれば、期待値 $E(f)$ は

$$E(f) = \int_{\omega \in \Omega} f(\omega) d\mu(\omega)$$

となる。この形式を代数的に取り扱うことによって非可換確率空間を記述する。

定義 1.1. (A, ϕ) が非可換確率空間であるとは、 \mathbb{C} 上の unital (1 を含む) 代数 (一般には非可換) A と $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$ を $\phi(1) = 1$ なる線形汎関数の組をいう。 A を単位元を含む C^* -algebra で、 ϕ が A 上の state のとき (A, ϕ) は C^* -確率空間、 A が有限型 von Neumann algebra で ϕ が正規 trace のとき (A, ϕ) を、 W^* -確率空間という。また、非可換確率空間 (A, ϕ) において $a \in A$ は確率変数と呼ばれる。

先にも述べたように、今までの C^* -確率空間における独立性の概念は tensor 積に基づくものであり、独立な確率変数は互いに可換ということになり、真に非可換の範疇に入るものではありえなかった。そこで tensor 積の代わりに free 積を扱うことによって、“独立”の概念を、より非可換性の強い概念に置き換えることを考えたものが D. Voiculescu によって導入された free 性である。

定義 1.2. (free 性) (\mathcal{A}, ϕ) を非可換確率空間とする。 $1 \in \mathcal{A}_i \subset \mathcal{A} (i \in I)$ を \mathcal{A} の部分代数とする。このとき、 $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ が free であるとは、 $x_j \in \mathcal{A}_{i_j}$ で $\phi(x_j) = 0$ ただし、 $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n$, ならば

$$\phi(x_1 x_2 \cdots x_n) = 0$$

が成り立つときをいう。

部分集合の族 $X_i \subset \mathcal{A}$ が free であるとは、 $\{1\} \cup X_i$ によって生成された部分代数 \mathcal{A}_i 達が free であるときをいう。特に、 $X_i = \{x_i\}$ のとき、 (x_i) は free であるという。

この free 性の定義においては単に隣合う代数が違うということだけを言っているので2つの代数が交代で現れることも、もちろん許されていることに注意しなければならない。また、この free 性の定義により、 (x_1, x_2, \dots, x_n) が free であるならば、これらの任意の word の期待値がそれぞれの元の多項式の期待値の積の和として表される。すなわち free 性の定義だけで mixed moments は simple moments を用いてあらわすことが可能である。

非可換の確率変数に対して分布というものは以下のように定義される。

定義 1.3. (分布) (\mathcal{A}, ϕ) を非可換確率空間とする。確率変数 $x \in \mathcal{A}$ の分布とは1変数多項式環 $\mathbb{C}[X]$ 上の線形汎関数 μ_x で

$$\mu_x(P(X)) = \phi(P(x)), \quad P \in \mathbb{C}[X]$$

なる関係で定まるものである。

特に、 C^* -確率空間 (\mathcal{A}, ϕ) においては、 $x \in \mathcal{A}$ が自己共役であるならば、分布 μ_x は \mathbb{R} 上のコンパクトな台を持つ確率測度に拡張される。すなわち

$$\int P(t) d\mu_x(t) = \phi(P(x)), \quad P \in \mathbb{C}[X]$$

なる確率測度 $d\mu_x$ が一意に存在する。以下我々は C^* 確率空間の自己共役な元について考えることとする。すなわち分布としての興味は \mathbb{R} 上のコンパクトな台を持つ確率測度に限るものとする。

通常確率論の正規分布の役割を果たす、free 確率空間における重要な分布が、半円分布である。これは、D. Voiculescu の free 中心極限定理の極限分布がこの半円分布であることや、通常確率論において正規分布の持つ性質を free 確率空間においてこの半円分布が持っているということによる。

定義 1.4. 中心が $m \in \mathbb{R}$, 半径 $r > 0$ の半円分布 $\omega_{m,r}(P(X))$ とは

$$\omega_{m,r}(P(X)) = \frac{2}{\pi r^2} \int_{m-r}^{m+r} P(t) \sqrt{r^2 - (t-m)^2} dt$$

で定義される分布である.

C^* - 確率空間 (A, ϕ) において, 自己共役な確率変数 $x \in A$ の分布が上の半円分布 $\omega_{m,r}$ のとき, 確率変数 x は中心 $m \in \mathbb{R}$, 半径 $r > 0$ の半円的 (semicircular) であるという.

中心 0, 半径 $r > 0$ の半円分布に従う確率変数 x の moment に関しては, 次の関係式を得る.

$$\begin{aligned} \phi(x^k) &= \frac{2}{\pi r^2} \int_{-r}^r t^k \sqrt{r^2 - t^2} dt \\ &= \begin{cases} 0 & (k = 2m + 1) \\ \frac{(2m)!}{m!(m+1)!} \left(\frac{r^2}{4}\right)^m & (k = 2m), \end{cases} \end{aligned}$$

なお, $c_m = \frac{(2m)!}{m!(m+1)!}$ は m 次 Catalan 数と呼ばれる組み合わせ論でよく現れる数である.

C^* - 確率空間 (A, ϕ) において, 自己共役な確率変数 $x \in A$ の分布には \mathbb{R} 上のコンパクトな台を持つ確率測度が対応するので, 自己共役な確率変数 $x (\neq 0)$ が中心 0 の半円的であるための必要十分条件は, 任意の $m \in \mathbb{N}$ について次の関係を満たすことである.

$$\begin{cases} \phi(x^{2m+1}) = 0 \\ \phi(x^{2m}) = c_m \phi(x^2)^m (\neq 0). \end{cases}$$

さて, 通常確率論において独立な確率変数の和の分布を考えることは重要である. 結果的には和の分布はいわゆる合成積 (convolution) で与えられる. この free 版が free additive convolution である.

定義 1.5. x_1, x_2 を, 分布 μ_{x_1}, μ_{x_2} にそれぞれ従う free な確率変数とする. このとき, 確率変数 $x_1 + x_2$ の分布 $\mu_{x_1+x_2}$ は, μ_{x_1}, μ_{x_2} にのみ依存して定まる. これを free (additive) convolution といい, $\mu_{x_1} \boxplus \mu_{x_2}$ とかく.

通常確率論で convolution を用いて和の分布を計算するとき Fourier 変換は重要な役割りを果たす. 特に Fourier 変換の対数は cumulant 母関数と呼ばれ, この convolution を線形化するものとして知られている. この free 版として, D. Voiculescu は R - 変換を導入した.

定義 1.6. $C[X]$ 上の分布 μ について, ζ^{-1} の形式的冪級数

$$G_\mu(\zeta) = \zeta^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X^k) \zeta^{-k-1},$$

を考える. この普通の合成に関する逆関数, すなわち

$$G_\mu(K_\mu(z)) = z \text{ かつ } K_\mu(G_\mu(\zeta)) = \zeta$$

となる関数 $K_\mu(z)$ を考える. この $K_\mu(z)$ は z の形式的冪級数として

$$K_\mu(z) = z^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1} z^k,$$

なる形で与えられる. このとき, 分布 μ の R-変換 $R_\mu(z)$ は,

$$R_\mu(z) = K_\mu(z) - \frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1} z^k$$

と定義される.

性質 1.7. [VDN] R-変換は次の関係式を満たす:

$$R_{\mu_{x_1} \boxplus \mu_{x_2}}(z) = R_{\mu_{x_1}}(z) + R_{\mu_{x_2}}(z)$$

$$R_{\mu_{\gamma x}}(z) = \gamma R_{\mu_x}(\gamma z)$$

$$R_{\mu_{x+\gamma}}(z) = R_{\mu_x}(z) + \gamma$$

後に必要にもなるので R-変換の例として, 中心 m , 半径 r の半円分布の R-変換を挙げる.

$$R_{\omega_{m,r}}(z) = m + \frac{r^2}{4} z$$

一般に R-変換に現れる係数は free cumulant と呼ばれている. この R-変換は和の分布を計算する有力な道具であると同時に, 分布を特徴付けるときにも用いられる重要な道具である. また, この R-変換の組み合わせ論的な考察もなされている. ([Spe])

2 半円分布系に付随する分布

この章ではまず初めに free 性を用いた半円分布系の特徴付けに関する結果を列挙する. これらは free を独立, 半円分布を正規分布に置き換えることで通常確率論で成り立っている結果でもある.

特徴付けに関して最初に紹介するのは確率変数の線形形式と 2 次形式の free 性に基づくものである. 確率変数のこれらの形式は統計量とも呼ばれ, 通常確率論でもっとも単純かつ重要な線形統計量は標本平均である. また 2 次統計量で重要なものは標本分散であり, 実際この標本平均と標本分散の独立性から正規分布が特徴付けられる. この free 版が次の命題である. (係数行列 A と係数ベクトル \mathbf{b} は標本分散, 標本平均の場合も含んでいる.)

定理 2.1. [HNY] x_1, x_2, \dots, x_n を互いに free で同一の分布を持つ中心的確率変数の族とする. $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ を $n \times n$ 非負定実行列, また $\mathbf{b} = {}^t(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ を n 次非負ベクトルとして.

$$A\mathbf{b} = 0, \quad \sum_i b_i a_{ii} \neq 0$$

を満たすものとする. このとき,

$$l = \sum b_i x_i$$

$$q = \sum a_{ij} x_i x_j$$

とおくと, l, q が free である為の必要十分条件は, x_1, \dots, x_n が半円分布に従うことである.

定理 2.2. [Ni], [HNY] $C = (c_{ij})$ を $n \times n$ 直交行列であり, 両側にいかなる置換行列の積をそれぞれ施しても, よりサイズの小さな直交行列の直和にならないという意味で分解不可能であるとする. x_1, x_2, \dots, x_n を互いに free な確率変数の族とするとき,

$$y_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, n$$

で y_1, \dots, y_n も互いに free である為には x_1, x_2, \dots, x_n が同一の半円分布に従うことが必要十分である.

定理 2.3. [HKNY] x_1, x_2, \dots, x_n を同一分布に従う, 互いに free な中心的な確率変数の族とする. $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (ただし $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$) に対して, $\sum a_i x_i$ と x_1 が同一分布に従う為の必要十分条件は, x_1, \dots, x_n が半円分布に従うことである.

これらの定理の証明の詳細は [HNY], [HKNY] および [HY] を参照して頂くこととして, この報告集では, 特に標準半円系のなす 2 次形式の分布についての結果を中心に述べることにする.

命題 2.4. [HKNY] x が標準半円分布に従う確率変数であるとき, $(x+m)^2$ ($m \in \mathbb{R}$) の従う分布の R-変換は

$$R_{(x+m)^2}(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{m^2}{(1-2z)^2}$$

とあらわされる.

[証明] x の分布は $\omega_{0,2}$ であるので, 1 章の例で見たように

$$R_{x+m}(z) = z + m \quad \text{したがって} \quad K_{x+m}(z) = z^{-1} + z + m$$

となる. $z^{-1} + z + m = \zeta$ を z に関して解いて

$$z = G_{x+m}(\zeta) = \frac{(\zeta - m) - \sqrt{(\zeta - m)^2 - 4}}{2}$$

を得る. ただし, $\sqrt{(\zeta - m)^2 - 4}$ の分枝は $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} G_{x+m}(\zeta) = 0$ なるようにとる.
また一方,

$$G_{x+m}(\zeta) = \frac{1}{\zeta} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{x+m}(X^k) \zeta^{-k} \right)$$

より

$$\begin{aligned} G_{(x+m)^2}(\zeta) &= \frac{1}{\zeta} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{(x+m)^2}(X^k) \zeta^{-k} \right) \\ &= \frac{1}{\zeta} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{x+m}(X^{2k}) \zeta^{-k} \right). \end{aligned}$$

なので, 偶関数部を取り出し,

$$\begin{aligned} G_{(x+m)^2}(\zeta) &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\zeta} G_{x+m}(\sqrt{\zeta}) + (-\sqrt{\zeta}) G_{x+m}(-\sqrt{\zeta}) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ 2 - \sqrt{\left(1 - \frac{m}{\sqrt{\zeta}}\right)^2 - \frac{4}{\zeta}} + \sqrt{\left(1 + \frac{m}{\sqrt{\zeta}}\right)^2 - \frac{4}{\zeta}} \right\}. \end{aligned}$$

を得る. ここで $G_{(x+m)^2}(\zeta) = z$ を ζ に関して解く. この部分の計算はかなり面倒ではあるが, 結果的に

$$\zeta = K_{(x+m)^2}(z) = \frac{1}{z(1-z)} + \frac{m^2}{(1-2z)^2}$$

を得る. したがって

$$R_{(x+m)^2}(z) = K_{(x+m)^2}(z) - \frac{1}{z} = \frac{1}{1-z} + \frac{m^2}{(1-2z)^2}$$

となる. \square

この計算の $m = 0$ の場合に関しては free Poisson 確率変数として [NSV] でも計算されている. このことより, 特に以下の結果が従う.

命題 2.5 [HKNY], [NSV] $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ を標準半円系, $A = (a_{ij})$ を $n \times n$ 対称行列とすると, 2次形式 $q = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ の R -変換は

$$R_q(z) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_i z} = \sum_{j=0}^{\infty} \text{Tr}(A^{j+1}) z^j,$$

となる. ただし $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ は行列 A の固有値である.

上の結果は通常確率分布論の複合 Poisson 分布という概念の free 版に対応する概念の一部となる. まず, 通常確率論における複合 Poisson 分布の説明をし, その意味を moment の言葉でみてみよう.

$\{X_i\}$ をある分布 H に従う独立な確率変数列とし, N を $\{X_i\}$ とは独立に強度 λ Poisson 分布に従うものとする. 次に

$$Y = \begin{cases} X_1 + X_2 + \dots + X_n & \text{if } N = n > 0 \\ 0 & \text{if } N = 0 \end{cases}$$

によって新たな確率変数 Y を定義する. このとき Y の分布 F の特性関数を求めると以下ようになる. 分布関数 $F(x)$ は分布関数 $H(x)$ の合成積を用いて

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} H^{*n}(x)$$

と表される. これより $F(x)$ の特性関数 $\eta(t)$ は $H(x)$ の特性関数 $\xi(t)$ を用いて

$$\eta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \xi(t)^n = \exp\{\lambda(\xi(t) - 1)\}$$

となると言える. ところで特性関数は moments 母関数であり, またその対数は cumulants 母関数であった. したがって, この式の両辺の対数を取ることで, 分布 F の cumulants は分布 $H(x)$ の moments に対応することが分かるであろう. もちろん定数倍はさされてはいるが, このことは本質的ではない.

このように複合 Poisson 分布とは, ある分布に対してその n -次 moment を n -次 cumulant に持つ分布を作り出す操作とも考えられる.

実はこの free 版に相当する操作が存在する. これが以下の定理である.

定理 2.6. [NSV] a, b を非可換確率空間 (\mathcal{A}, ϕ) の free な確率変数の組とする. b の分布が標準半円分布ならば確率変数 bab の R -変換は

$$R_{bab}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi(a^{j+1}) z^j$$

となる.

1章で述べたように free 確率論においては R -変換は cumulant 列を生成する冪級数と考えられるので, これが free 確率論における複合 Poisson 分布の構成法に相当するものであることは容易に分かると思う. さらに先に述べた命題 2.5 が, この定理の特殊な場合に相当することも分かるであろう.

さて, 通常確率論において正規分布から導出される数々の重要な分布がある. χ^2 分布もそのひとつであり, それは標準正規分布に従う確率変数の 2 次形式の従う分布として考えられる. 我々はこの free 版を考えよう.

まず最初に非心 χ^2 分布による正規分布の特徴付けに関する問題の free 版を考える。実は以下の特徴付けの証明のために非心の場合の R - 変換を命題 2.4 では計算したのである。

定理 2.7. [HKNY] x_1, x_2, \dots, x_n を互いに free かつ centered 同一分布に従う確率変数とするとき,

$$y = \sum_{i=1}^n (x_i + a_i)^2, \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

の従う分布が $a = \sum_{i=1}^n a_i^2$ にのみ依存する為の必要十分条件は $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ が半円分布系となることである。

[十分性] x_1, x_2, \dots, x_n を $\omega_{0,r}$ にしたがる半円分布系とする。とき, 先に計算した R - 変換により

$$\begin{aligned} R_y(z) &= R_{\sum_{i=1}^n (x_i + a_i)^2}(z) = \sum_{i=1}^n R_{(x_i + a_i)^2}(z) \\ &= \frac{r^2 n}{4 - r^2 z} + \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{(1 - \frac{r^2}{2} z)^2} = \frac{r^2 n}{4 - r^2 z} + \frac{a}{(1 - \frac{r^2}{2} z)^2}. \end{aligned}$$

を得る。したがって y の分布は a にのみ依存する。

[必要性] 以下のような確率変数達を考える。すなわち,

$$\begin{aligned} y(b) &= (x_1 + b)^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2, \\ \tilde{y}(b) &= (x_1 + \frac{b}{\sqrt{2}})^2 + (x_2 + \frac{b}{\sqrt{2}})^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 \end{aligned}$$

である。ここで, 期待値 $\phi(y(b)^k)$ を b に関して展開する。

$$\begin{aligned} \phi(y(b)^k) &= \phi((b^2 + 2bx_1 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^k) \\ &= b^{2k} + 2k\phi(x_1)b^{2k-1} + \dots + 2k\phi(x_1(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{k-1})b \\ &\quad + \phi((x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^k), \end{aligned}$$

ただし b^j の係数は $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ の moments の多項式で $2k - j$ 斉次である。すべての $b \in \mathbb{R}$ に対して $\phi(y(b)^k) = \phi(y(-b)^k)$

$$\phi(x_1(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{k-1}) = 0$$

であり, 帰納法により, すべての $k \in \mathbb{N}$ で $\phi(x_1^{2k-1}) = 0$ を得る。

次に期待値 $\phi(\tilde{y}(b)^k)$ ($k \geq 3$) の展開を考える。これは

$$\phi(\tilde{y}(b)^k) = \phi((b^2 + \sqrt{2}b(x_1 + x_2) + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^k)$$

であり, 仮定より, すべての $b \in \mathbb{R}$ に対して $\phi(y(b)^k) = \phi(\tilde{y}(b)^k)$ を得る. b^4 の係数を比較することにより,

$$\phi(x_1^{2k-4}) = \{\text{the polynomial of } \phi(x_1), \phi(x_1^2), \dots, \phi(x_1^{2k-5})\}$$

である. このためには以下の関係式に注意する必要がある. すなわち

$$\begin{cases} \phi(4x_1x_1(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{k-3}) \\ \quad = 4\phi(x_1^{2k-4}) + \{\text{the polynomial of } \phi(x_1), \phi(x_1^2), \dots, \phi(x_1^{2k-5})\}, \\ \phi(2(x_1 + x_2)(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{k-3}) \\ \quad = 4\phi(x_1^{2k-4}) + \{\text{the polynomial of } \phi(x_1), \phi(x_1^2), \dots, \phi(x_1^{2k-5})\}, \end{cases}$$

および

$$\begin{cases} \phi(16x_1x_1x_1x_1(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{k-4}) \\ \quad = 16\phi(x_1^{2k-4}) + \{\text{the polynomial of } \phi(x_1), \phi(x_1^2), \dots, \phi(x_1^{2k-5})\}, \\ \phi(4(x_1 + x_2)(x_1 + x_2)(x_1 + x_2)(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{k-4}) \\ \quad = 8\phi(x_1^{2k-4}) + \{\text{the polynomial of } \phi(x_1), \phi(x_1^2), \dots, \phi(x_1^{2k-5})\}. \end{cases}$$

結局, これらの関係式より, ある定数 α_k が存在して,

$$\phi(x_1^{2k}) = \alpha_k \phi(x_1^2)^k \quad k \in \mathbb{N}$$

であることが従う. 実はこの定数 α_k は分布が a のみに依存するという条件だけで定まる普遍定数であり, 特に十分性でみたように x_1, x_2, \dots, x_n が $\omega_{0,r}$ の半円分布系でもいえることである. すなわち, 定数 α_k は Catalan 数でなければならない. よって $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ は半円分布系である. \square

この定理の y は通常確率論では非心 χ^2 分布として知られている. そこで free 確率空間でも以下のような定義を行う.

定義 2.8. $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ を標準半円系, $\delta = \sum_{i=1}^n m_i^2$ ($m_i \in \mathbb{R}$) とする. 確率変数 $\sum_{i=1}^n (x_i + m_i)^2$ の従う分布 $\chi^2(n, \delta)$ は, 自由度 n , 非心パラメータ δ の free χ^2 分布とよぶ.

\mathbb{R} -変換でいえば, 確率変数 q が, 分布 $\chi^2(n, \delta)$ に従うとは,

$$R_q(z) = \frac{n}{1-z} + \frac{\delta}{(1-2z)^2}$$

を満たすことである. 特に $\delta = 0$ であるとき, free χ^2 分布は central, $\delta \neq 0$ であるときは, noncentral であるという.

また通常確率論の場合と同様に, この分布族は次の再生性を有している. すなわち, q_1, q_2 を free な確率変数とし, それぞれの従う分布が $\chi^2(n_1, \delta_1), \chi^2(n_2, \delta_2)$ と

する. このとき $q_1 + q_2$ の従う分布は $\chi^2(n_1 + n_2, \delta_1 + \delta_2)$ に等しい. つまり記号的に書けば

$$\chi^2(n_1, \delta_1) + \chi^2(n_2, \delta_2) = \chi^2(n_1 + n_2, \delta_1 + \delta_2)$$

である.

以下に述べる結果は通常確率論で χ^2 分布について成り立っている結果の free 版である. 以下の結果より, free χ^2 分布は無理なく定義されたものであり, 自然な free analogue であることを示している. これらの証明の詳細に関しては [HKNY] を参照して頂くこととする.

定理 2.9. [HKNY] $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ を標準半円分布系とし, $A = (a_{ij})$ を $n \times n$ 対称行列, $q = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ とすると, q が free χ^2 分布に従うための必要十分条件は $A^2 = A$.

定理 2.10. [HKNY] $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ を半円分布系とする. $n \times n$ 対称行列 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ について, 2 次形式統計量 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j$ が互いに free であるための必要十分条件は $AB = 0$ である.

さらにこれらの定理を用いて, 通常確率論の Cochran-Fisher の定理の free 版も証明されることを付け加えておく.

参考文献

[BV] H. Bercovici and D. Voiculescu : Superconvergence to the central limit and failure of the Cramér theorem for free random variables, *Probab. Theory Relat. Fields* **102** (1995), 215–222.

[HKNY] O. Hiwatashi, T. Kuroda, M. Nagisa and H. Yoshida : The free analogue of noncentral chi-square distributions and symmetric quadratic forms in free random variables, preprint 1997.

[HNY] O. Hiwatashi, M. Nagisa and H. Yoshida : The characterizations of a semi-circle law by the certain freeness in a C^* -probability space, preprint 1997.

[HY] O. Hiwatashi and H. Yoshida : 非可換確率空間における半円分布の特徴付け, *京都大学数理解析研究所講究録* **1003**, 15–27, 1997.

[Ni] A. Nica : R -transform of free joint distributions and non-crossing partition, *J. Funct. Anal.* **135** (1996), 271–296.

[NSV] A. Nica, R. Speicher and D. Voiculescu : On the multiplication of free n -tuples of non-commutative random variables, Appendix: Alternative proofs for the type II free Poisson variables and for free compression results, *Amer. J. Math.* **118** (1996), 799–837.

[Spe] R. Speicher : Multiplicative functions on the lattice of non-crossing partition and free convolution, *Math. Ann.* **298** (1994), 611–628.

[VDN] D. Voiculescu, K. Dykema, A. Nica : *Free random variables*, CMR Monograph Series, volume 1, AMS, 1992.