数理解析研究所講究録
1040 巻 1998 年 204-211

大規模な非線形最適化問題に対する主双対内点法について

東京理科大学理学部 矢部 博 (Hiroshi YABE)
数理システム 山下 浩 (Hiroshi YAMASHITA)
数理システム 田辺隆人 (Takahito TANABE)

1 はじめに

本稿では，非線形最適化問題を解くための主双対内点法を考える．取り扱う問題は,

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \\ \text{subject to} & g(x)=0,\ x \geq 0, \end{array}$$

である．ただし，関数 $f:\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^1$, $g:\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ は十分に滑らかとする．線形計画法，２次計画法，線形相補性問題等に対する内点法は非常に活発な研究がなされ，理論面（大域的収束性，多項式オーダー性，収束速度等）でも実用面（ソフトウェアパッケージ）でもかなりの成果が得られている [6]．それに比べて，非線形最適化問題に対する内点法はまだ研究途上であり，今後の研究が期待されている．

上記の問題の Lagrange 関数を

$$L(w)=f(x)-y^t g(x)-z^t x$$

と定義したとき，Karush-Kuhn-Tucker(KKT) 条件は次式で表される．

$$r_0(w)=\begin{pmatrix} \nabla_x L(w) \\ g(x) \\ XZe \end{pmatrix}=0,\quad x \geq 0,\ z \geq 0,$$

ただし，$w=(x,y,z)^t$ とし，$y \in \mathbf{R}^m$ と $z \in \mathbf{R}^n$ はそれぞれ等式制約条件と非負条件に関する Lagrange 乗数であり，また,

$$\nabla_x L(w)=\nabla f(x)-A(x)^t y-z, \qquad A(x)=\begin{pmatrix} \nabla g_1(x)^t \\ \vdots \\ \nabla g_m(x)^t \end{pmatrix},$$

$$X=\operatorname{diag}(x_1,\cdots,x_n),\quad Z=\operatorname{diag}(z_1,\cdots,z_n),\quad e=(1,\cdots,1)^t \in \mathbf{R}^n$$

である．主双対内点法では，上記の KKT 条件を満足する w を直接求めるのではなくて，正のパラメータ μ を導入して，KKT 条件を緩和した次の条件

$$r(w,\mu)=\begin{pmatrix} \nabla_x L(w) \\ g(x) \\ XZe-\mu e \end{pmatrix}=0,\quad x>0,\quad z>0, \tag{1.1}$$

を満足する $w(\mu)$ を求めることを考える．そして，最終的に μ の値をゼロに近づけていくのである．

条件 (1.1) は，次のログバリヤ関数最小化問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(x)-\mu \sum_{i=1}^{n} \log(x_i), \quad x \in \mathbf{R}_+^n=\{x \in \mathbf{R}^n \mid x>0\} \\ \text{subject to} & g(x)=0, \end{array}$$

の最適性条件に相当するだけではなく，ペナルティパラメータ$\rho > 0$が十分に大きいときのバリヤペナルティ関数

$$F(x,\mu) = f(x) - \mu\sum_{i=1}^{n}\log(x_i) + \rho\sum_{i=1}^{m}|g_i(x)|, \tag{1.2}$$

を最小化する問題の最適性条件にも相当する．ここで，(1.2) の第１項はもとの最適化問題の目的関数，第２項は非負条件に対するログバリヤ関数，第３項は等式条件に対する l_1 型正確なペナルティ関数の項である．以上の理由から，(1.1) をバリヤ KKT 条件と呼ぶことにする．

主双対内点法の基本的な考え方は，バリヤ KKT 条件にニュートン法を適用するもので，k回目の反復におけるニュートン方程式は

$$J(w_k)\Delta w_k = -r(w_k,\mu) \tag{1.3}$$

となる．ただし

$$\Delta w_k = \begin{pmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \\ \Delta z_k \end{pmatrix}, \quad J(w) = \begin{pmatrix} G & -A(x)^t & -I \\ A(x) & 0 & 0 \\ Z & 0 & X \end{pmatrix}$$

は，それぞれニュートン方向と rのヤコビ行列である．ここで，$G_k = \nabla_x^2 L(w_k)$ の場合が本来のニュートン法である．特に断らなければ $G_k = \nabla_x^2 L(w_k)$ とする．

こうした数値解法の収束性に関して，Yamashita[15] は直線探索法を用いた場合の大域的収束性を，また，Yamashita and Tanabe[16] は信頼領域法を用いた場合の大域的収束性をそれぞれ示した．いずれの場合でも，メリット関数として (1.2) が用いられた．特に，後者は大規模な非線形最適化問題を解くために開発された手法である．信頼領域法を用いた内点法の研究は，他に Bonnans and Pola[2], Byrd, Gilbert and Nocedal[3], Coleman and Li[5], Dennis, Heinkenschloss and Vicente[7] などがある．他方，局所的収束性に関しては，Yamashita and Yabe[18] が，ニュートン法を用いた場合には局所的２次収束することを，また準ニュートン法を用いた場合には局所的超１次収束することを示した．以上は点列 $\{w_k\}$ に関する収束性だが，Yabe and Yamashita[14] は点列 $\{(x_k, z_k)\}$ の局所的超１次収束性を議論した．こうした収束性の解析において，局所的収束性に関しては本来のニュートン方向が活かされているのに対して，大域的収束性に関してはバリヤペナルティ関数を単調に減少させる必要があるので必ずしもニュートン方向が活かされるとは限らない．さらに，バリヤペナルティ関数は微分不可能であることも注意されたい。その結果として，大域的収束性と局所的に速い収束性が両立するとは限らず，いわゆる Maratos 効果 [11] が生じて速い収束性が実現出来なくなる．Maratos 効果を回避するためのテクニックについては，逐次２次計画法で非常に活発に研究されている [4, 8, 12, 13, 17]．本稿では，Maratos 効果を回避する主双対内点法を提案し，その大域的収束性と超１次収束性を示す．基本的なアイデアは，Yamashita and Yabe[17] が逐次２次計画法において提案した非単調アルゴリズムを利用することである．さらに，大規模な最適化問題に適用することも考慮して，信頼領域法と組み合わせる．なお，ここで用いる非単調アルゴリズムは Grippo, Lampariello and Lucidi[9] が提案した非単調直線探索とは本質的に異なるものである．

2　信頼領域法とその大域的収束性

本節では，信頼領域法のアルゴリズムを与えて，その大域的収束性を述べる．そのための準備として，バリヤペナルティ関数の近似関数等に関して以下の記号を定義する．なお，$\|\cdot\|$ は l_2 ノルムを表す．

$$\begin{aligned}
F_l(x;s) &= F(x,\mu) + (\nabla f(x) - \mu X^{-1}e)^t s + \rho\sum_{i=1}^{m}\left(\left|g_i(x) + \nabla g_i(x)^t s\right| - |g_i(x)|\right),\\
F_q(x;s) &= F_l(x;s) + \frac{1}{2}s^tQs,\\
\Delta F_l(x;s) &\equiv F_l(x;s) - F_l(x;0) = F_l(x;s) - F(x,\mu),\\
\Delta F_q(x;s) &\equiv F_q(x;s) - F_q(x;0) = F_q(x;s) - F(x,\mu),
\end{aligned}$$

$$\Delta F(x;s) \equiv F(x+s,\mu) - F(x,\mu).$$

このとき，次の定理が得られる．この定理は，ニュートン方向Δxがバリヤペナルティ関数の降下方向になることを示している．

[定理 1] Δx は次式を満足する．

$$\Delta F_l(x;\Delta x) \le -\Delta x^t(G+X^{-1}Z)\Delta x - (\rho - \|y+\Delta y\|_\infty)\sum_{i=1}^{m}|g_i(x)|.$$

もし $\rho \ge \|y+\Delta y\|_\infty$ でかつ G が非負定値ならば，$\Delta F_l(x;\Delta x) \le 0$ となる．
特に，$\Delta F_l(x;\Delta x) = 0$ ならば $\Delta x = 0$ となる． □

信頼領域法の大域的収束性を実現するためには，ニュートン方向だけでは不十分なので，次の線形方程式

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{pmatrix} D & -A(x)^t & -I \\ A(x) & 0 & 0 \\ Z & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_{SD} \\ \Delta y_{SD} \\ \Delta z_{SD} \end{pmatrix} = -r(w,\mu)$$

を満たす方向も利用する．この方程式は，ニュートン方程式の $\nabla_x^2 L(w)$ を正定値対角行列 Dで置き換えたもので，$(\Delta x_{SD}, \Delta y_{SD}, \Delta z_{SD})$ は最急降下方向に対応する（以下の議論では，もっと一般的に Dは正定値対称行列とする）．この最急降下方向に対して，信頼領域法の探索方向 s_kは，次の条件を満たすように選ばれる．

$$\Delta F_q(x_k;s_k) \le \frac{1}{2}\Delta F_q(x_k;\alpha^*(x_k,\Delta x_{SDk})\Delta x_{SDk}),$$

ただし

$$\begin{aligned} \alpha^*(x,d) &= \arg\min\left\{F_q(x;\alpha d) \mid \alpha \le 1,\ \|\alpha d\| \le \delta,\ \alpha \in [0,\gamma\bar{\alpha}(x,d)]\right\}, \\ \bar{\alpha}(x,d) &= \min_i\left\{-\frac{x_i}{d_i}\,\middle|\, d_i < 0\right\} \end{aligned}$$

である．以上の準備のもとで，信頼領域法のアルゴリズムは次のようにまとめられる．

[アルゴリズム TR]

Step 0. 初期点 $w_0 \in \mathbf{R}_+^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+^n$ とパラメータ $\mu > 0$, $\rho > 0$, $\varepsilon > 0$, $\gamma \in (0,1)$, $\delta_0 > 0$ を与える．$k = 0$ とおく．

Step 1. もし $\|r(w_k,\mu)\| \le \varepsilon$ ならば停止する．

Step 2. 線形方程式 (1.3), (2.1) を解いて，ニュートン方向Δw_k と最急降下方向 Δw_{SDk} を求める．必要ならば，$G_k = \nabla_x^2 L(w_k)$ を適当な行列で置き換える．

Step 3. 次の条件を満足する探索方向 $s_k \in \mathbf{R}^n$ を求める．

$$\begin{aligned} \|s_k\| &\le \delta_k, \\ (1-\gamma)(x_k)_i &\le (x_k+s_k)_i,\ i = 1,\dots,n, \\ \Delta F_q(x_k;s_k) &\le \frac{1}{2}\Delta F_q(x_k;\alpha^*(x_k,\Delta x_{SDk})\Delta x_{SDk}). \end{aligned}$$

Step 4. δ_{k+1} を更新する:

$$\begin{aligned} &\text{もし}\quad \Delta F(x_k;s_k) > \frac{1}{4}\Delta F_q(x_k;s_k) \quad \text{ならば}\quad \delta_{k+1} = \frac{1}{2}\delta_k \quad \text{とおく;} \\ &\text{もし}\quad \Delta F(x_k;s_k) \le \frac{3}{4}\Delta F_q(x_k;s_k) \quad \text{ならば}\quad \delta_{k+1} = 2\delta_k \quad \text{とおく;} \\ &\text{さもなければ}\quad \delta_{k+1} = \delta_k \quad \text{とおく．} \end{aligned}$$

Step 5. もし $\Delta F(x_k; s_k) \le 0$ ならば $x_{k+1} = x_k + s_k$ とおき，ステップ幅 α_{yk} と α_{zk} を計算して $y_{k+1} = y_k + \alpha_{yk}\Delta y_k$, $z_{k+1} = z_k + \alpha_{zk}\Delta z_k$ とおく．さもなければ $w_{k+1} = w_k$ とおく．

Step 6. $k = k+1$ とおいて Step 1 へ行く． □

このアルゴリズムの Step 5 において，ステップ幅は次の式で与えられる．

$$\begin{aligned}\alpha_{zk} &= \min\left\{\min_i\left\{\max_{\alpha_i}\left\{\alpha_i \,\middle|\, \frac{(c_{Lk})_i}{(x_k+s_k)_i} \le (z_k + \alpha_i \Delta z_k)_i \le \frac{(c_{Uk})_i}{(x_k+s_k)_i}\right\}\right\}, 1\right\}, \\ \alpha_{yk} &= \alpha_{zk} \quad \text{または} \quad \alpha_{yk} = 1,\end{aligned}$$

ただし，定数 $M_L > 1$ と $M_U > 1$ に対して

$$(c_{Lk})_i = \min\left\{\frac{\mu}{M_L}, (x_k+s_k)_i (z_k)_i\right\}, \quad (c_{Uk})_i = \max\left\{M_U \mu, (x_k+s_k)_i (z_k)_i\right\}$$

とする．

アルゴリズム TR の大域的収束性を示すために，次の条件を仮定する．

仮定 G (大域的収束性)

(G1) 関数 f と $g_i, i = 1, ..., m,$ は 2 回連続的微分可能である．

(G2) $\mu > 0$ に対して，初期点 $x_0 \in \mathbf{R}^n_+$ におけるバリヤペナルティ関数の準位集合 $\{x \in \mathbf{R}^n_+ \mid F(x,\mu) \le F(x_0,\mu)\}$ はコンパクトである．

(G3) 行列 $A(x)$ は上記の準位集合上でフルランクである．

(G4) 行列 D は一様正定値でかつ一様有界である．行列 Q と G は一様有界である．

(G5) 次の式を満足する数 $M > 0$ が存在する

$$\|\Delta x_k\| \le M \|\Delta x_{SDk}\|, \quad \|s_k\| \le M \|\Delta x_{SDk}\|.$$

(G6) ペナルティ・パラメータ ρ は，各 k に対して $\rho \ge \|y_k + \Delta y_{SDk}\|_\infty$ を満たす． □

このとき次の定理を得る．

[**定理 2**] (信頼領域法の大域的収束性)
仮定 G が成り立つとする．$\mu > 0$，$\rho > 0$ に対して，$\{w_k\}$ をアルゴリズム TR によって生成される点列とする．このとき，バリヤ KKT 条件を満足する集積点が存在する． □

3 主双対内点信頼領域法

本節では，大域的収束性と超 1 次収束性を兼ね備えた数値解法を提案する．これは信頼領域法を取り込んだ主双対内点法で，本質的な特徴は Step 2（後述）の非単調手順にある．バリヤペナルティ関数の過去の値の情報を持ったパラメータλ_kに対して $F(x_k + \alpha_k \Delta x_k, \mu_k) < \lambda_k$ を満たすならば，関数値が増加しても $x_k + \alpha_k \Delta x_k$ を新しい点の候補に選び (Step 2.3 参照)，さらにバリヤ KKT 条件を近似的に満足するならば $w_k + \Lambda_k \Delta w_k$ を w_{k+1} として採用する (Step 2.5 参照)．そうでないときには信頼領域法を実行してバリヤペナルティ関数を単調に減少させる (Step 3 参照)．信頼領域法がセーフガードとして機能するので，この解法の大域的収束性が保証されるのである．また，Step 2 のような非単調手順を利用することによって，Maratos 効果を回避することが可能になり，その結果として局所的超 1 次収束性も保証される．

提案する解法のアルゴリズムは以下の通りである．

[アルゴリズム IPTR]

Step 0. (初期設定)

パラメータ $\rho > 0$, $M_c > 0$，$\varepsilon > 0$ を与える．$\|r(w_0, \mu_{-1})\| \le M_c\mu_{-1}$ を満足する初期点 $w_0 \in \mathbf{R}^n_+ \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n_+$ と正のバリヤ・パラメータ μ_{-1} を与える（実際は，任意の初期点で良い）．また，$\lambda_0 = F(x_0, \mu_{-1})$，$k = 0$ とおく．

Step 1. (収束判定)

もし $\|r_0(w_k)\| \le \varepsilon$ ならば停止する．さもなければ，$\mu_k \in (0, \mu_{k-1})$ を選ぶ．

Step 2. (非単調手順)

Step 2.1 次のニュートン方程式を解いて探索方向 Δw_k を求める：

$$J(w_k)\Delta w_k = -r(w_k, \mu_k).$$

もし $J(w_k)$ が正則でないならば，$\lambda_{k+1} = \lambda_k$ とおいて Step 3 へ行く．

Step 2.2 内点であるための条件 $x_k + \alpha_{xk}\Delta x_k > 0$，$z_k + \alpha_{zk}\Delta z_k > 0$ を満たすようなステップ幅 $\Lambda_k = \mathrm{diag}(\alpha_{xk}I_n, \alpha_{yk}I_m, \alpha_{zk}I_n) > 0$ を求める．

Step 2.3 もし $F(x_k + \alpha_{xk}\Delta x_k, \mu_k) \ge \lambda_k$ ならば，$\lambda_{k+1} = \lambda_k$ とおいて Step 3 へ行く．

Step 2.4 $\lambda_{k+1} \in [\max\{F(x_k, \mu_k), F(x_k + \alpha_{xk}\Delta x_k, \mu_k)\}, F(x_0, \mu_{-1})]$ を選ぶ．

Step 2.5 もし $\|r(w_k + \Lambda_k\Delta w_k, \mu_k)\| \le M_c\mu_k$ ならば，$w_{k+1} = w_k + \Lambda_k\Delta w_k$ とおいて Step 4 へ行く．さもなければ Step 3 へ行く．

Step 3. (信頼領域法)

$F(x, \mu_k) \le \lambda_k$ を満たす点を初期点とした内部反復（アルゴリズム TR）を実行して，

$$\|r(w_{k+1}, \mu_k)\| \le M_c\mu_k$$

を満足する点 w_{k+1} を求める．

Step 4. $k = k + 1$ とおいて Step 1 へ行く． □

アルゴリズム TR の大域的収束性（定理 2）と $\mu_k \to 0$ であることを組み合わせれば，次の定理が得られる．

[定理 3] (アルゴリズム IPTR の大域的収束性)
仮定 G が成り立つとする．$\{\mu_k\}$ を $\mu_k \downarrow 0$ となるバリヤ・パラメータの列としたとき，アルゴリズム IPTR によって生成される点列を $\{w_k\}$ とする．点列 $\{x_k\}$ と $\{y_k\}$ を有界であると仮定する．このとき点列 $\{z_k\}$ は有界になり，かつ，$\{w_k\}$ の任意の集積点は最適化問題の KKT 条件を満足する． □

次にアルゴリズム IPTR の超 1 次収束性を示す．そのために，次の条件を仮定する．

仮定 L (超 1 次収束性)

(L1) 点列 $\{w_k\}$ は w^* に収束する．

(L2) 関数 f と g の 2 階導関数は x^* で Lipschitz 連続である．

(L3) 解 w^* において，効いている制約条件の法線ベクトルは 1 次独立であり，最適解であるための 2 次の十分条件と狭義の相補条件が成り立つ．

(L4) 各反復で $\rho \geq \|y_k\|_\infty + \zeta$ が成り立つ．ただし，ζ は正の定数である．

(L5) パラメータ μ_k と γ_k は

$$\mu_k = \xi_k \|r_0(w_k)\|^{1+\tau_1}, \qquad 1-\gamma_k = \xi'_k \|r_0(w_k)\|^{\tau_2}$$

を満たすように更新される．ただし，τ_1 と τ_2 は $\min(1,\tau_2) > \tau_1$ を満たす正の定数であり，ξ_k と ξ'_k は $\frac{1}{M'} \leq \xi_k \leq M'$，$\frac{1}{M'} \leq \xi'_k \leq M'$ を満たす正の数である（M' は正の定数）．

(L6) $0 < M_c < 1$.

(L7) $(x^*)_{\hat{i}} = 0$ となる $\hat{i}$ が存在する．

(L8) τ_1 と τ_2 は $\tau_1 > \sqrt{2}-1$ かつ $\tau_2 \geq 1$ を満たす．

なお，アルゴリズム IPTR の Step 2.2 のステップ幅は次のように選ばれる．

$$\alpha_{xk} = \min\left\{ 1,\ \gamma_k \min_i \left\{ -\frac{(x_k)_i}{(\Delta x_k)_i} \middle| (\Delta x_k)_i < 0 \right\}\right\},$$

$$\alpha_{zk} = \min\left\{ 1,\ \gamma_k \min_i \left\{ -\frac{(z_k)_i}{(\Delta z_k)_i} \middle| (\Delta z_k)_i < 0 \right\}\right\},$$

$$\alpha_{yk} = 1, \quad \text{または} \quad \alpha_{xk}, \quad \text{または} \quad \alpha_{zk},$$

ただし，$\gamma_k \in (0,1)$ である．

仮定 L のもとで，次の定理が示される．

[定理 4] 次の式が成り立つ．

$$\|r(w_k + \Lambda_k \Delta w_k, \mu_k)\| \leq M_c \mu_k.$$

もし点 $\hat{w} \in \mathbf{R}^n_+ \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n_+$ が $\|r(\hat{w}, \mu_k)\| \leq M_c \mu_k$ を満たし，かつ，$M_c < \sqrt{n}$ ならば

$$\nu_1 \|r_0(w_k)\|^{1+\tau_1} \leq \|r_0(\hat{w})\| \leq \nu_2 \|r_0(w_k)\|^{1+\tau_1}$$

が成り立つ．ただし，ν_1 と ν_2 は正の定数である． □

[定理 5] η を正の定数としたとき，十分大きな k_0 とすべての $k \geq k_0$ に対して，もし $\lambda_k \geq F(x_{k_0}, \mu_{k_0}) + \eta$ ならば，$w_{k+1} = w_k + \Lambda_k \Delta w_k$ $(k \geq k_0)$ が採用されて点列 $\{w_k\}$ は超 1 次収束する． □

定理 4 は，もし Step 2.3 で $x_k + \alpha_k \Delta x_k$ が採用されるならば，Step 2.5 の条件が満たされて超 1 次収束性が得られることを示している．実際，最終的には次の定理 6 が成り立ち，Step 2.3 で $x_k + \alpha_k \Delta x_k$ が採用されることが示される．

[定理 6] もし $w_k = w_{k-1} + \Lambda_{k-1} \Delta w_{k-1}$ ならば，

$$F(x_k + \alpha_{xk} \Delta x_k, \mu_k) < F(x_{k-1}, \mu_{k-1})$$

が成り立つ． □

この結果として，超 1 次収束性が証明される．

[定理 7] (アルゴリズム IPTR の超 1 次収束性)
仮定 L が成り立つとする．十分に大きな k に対して $w_{k+1} = w_k + \Lambda_k \Delta w_k$ が採用される．そして点列 $\{w_k\}$ と $\{x_k\}$ は超 1 次収束する． □

4 数値実験

本節では，提案した解法の数値実験を報告する．実験は，最適化問題を解くためのコード NUOPT3.0 を利用して，Pentium Pro 200MHz PC (96MB, BSD/OS) を用いて行った．テスト問題として，Hock and Schittkowski[10] の全問 114 題，CUTE[1] から選んだ 164 題を用いた．特に，CUTE からは 20 変数以上，20 制約以上の問題で，かつ，ヘッセ行列が解析的に求まるテスト問題を選択した（変数の数の平均値は 3830，制約条件の数の平均値は 2522 である）．実験結果は，Hock and Schittkowski の全問を，CUTE の 164 題中 150 題を解くことに成功した．図 1 に CUTE 問題に対する実験結果を載せておく．横軸は反復回数，縦軸は KKT 条件の残差（対数目盛）を表す．この実験結果から，超 1 次収束の振る舞いが観測された．なお，数値実験の詳細については [19] を参照されたい．

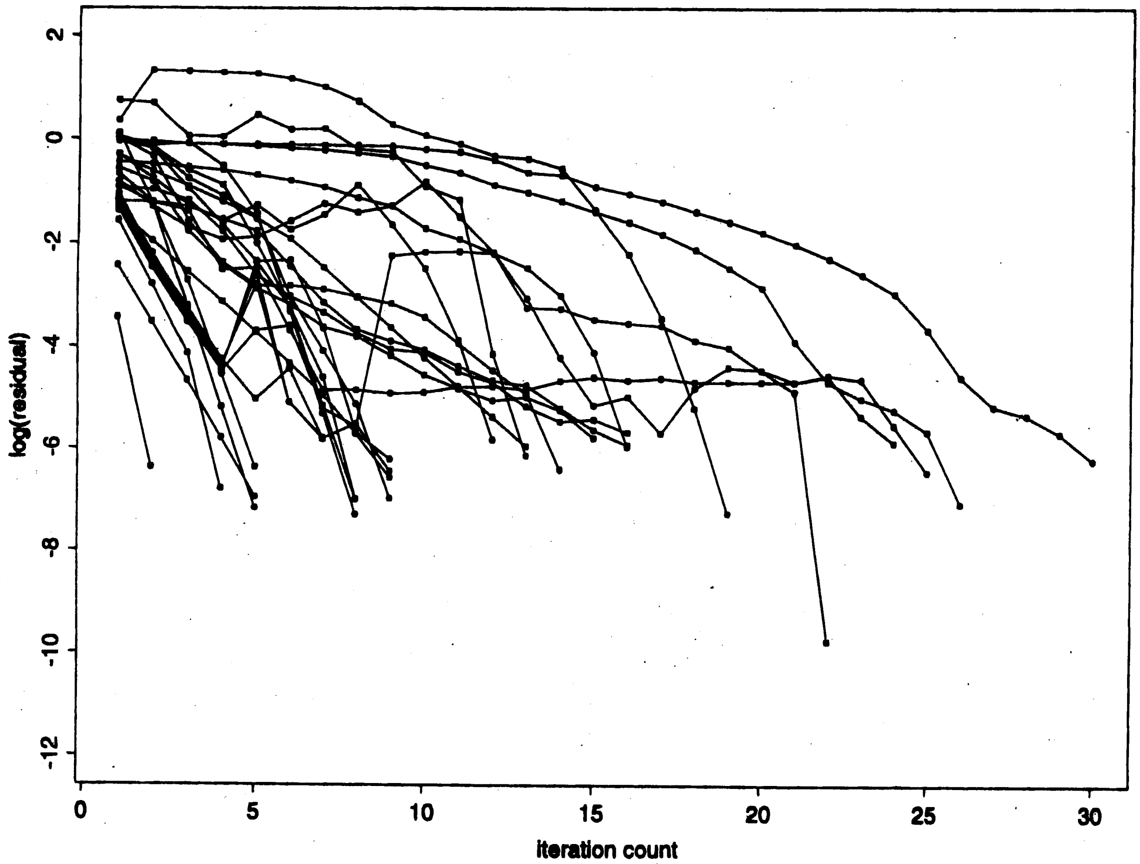

図 1　CUTE の 150 題に対する数値実験結果

References

[1] I.Bongartz, A.R.Conn, N.Gould, and Ph.L.Toint, *CUTE:Constrained and Unconstrained Testing Environment*, Research Report RC 18860, IBM T.J. Watson Research Center, Yorktown , USA,1993.

[2] J.F.Bonnans and C.Pola, *A trust region interior point algorithm for linearly constrained optimization*, Technical Report 1948, INRIA, 1993.

[3] R.H.Byrd, J.C.Gilbert and J.Nocedal, *A trust region method based on interior point techniques for nonlinear programming*, Technical Report OTC 96/02, Optimization Technology Center, Argonne National Laboratory, June, 1996.

[4] R.M.Chamberlain, M.J.D.Powell, C.Lemarechal and H.C.Pedersen, The watchdog technique for forcing convergence in algorithms for constrained optimization, *Mathematical Programming Study*, 16 (1982), pp.1-17.

[5] T.F.Coleman and Y.Li, *An interior trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds*, Technical Report TR93-1342, Dept. of Computer Science, Cornell University, 1993 (To appear in SIAM J. Optimization).

[6] D.den Hertog, *Interior Point Approach to Linear, Quadratic and Convex Programming*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[7] J.E.Dennis, Jr., M.Heinkenschloss and L.N.Vicente, *Trust-region interior-point SQP algorithms for a class of nonlinear programming problems*, TR94-45, Dept. of Computational and Applied Mathematics, Rice University, Houston, Texas, USA, 1994 (revised November 1995).

[8] R.Fletcher, Second order corrections for nondifferentiable optimization, in *Numerical Analysis – Dundee 1981*, G.A.Watson, ed., Lecture Notes in Mathematics 912, Springer-Verlag, Berlin, 1982, pp.85-114.

[9] L.Grippo, F.Lampariello and S.Lucidi, A nonmonotone line search technique for Newton's method, *SIAM J. on Numerical Analysis*, 23 (1986), pp.707-716.

[10] W.Hock and K.Schittkowski, *Test Examples for Nonlinear Programming Codes*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 187, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[11] N.Maratos, *Exact penalty function algorithms for finite dimensional and control optimization problems*, Ph.D.Thesis, Imperial College of Science and Technology, University of London, London, U.K., 1978.

[12] D.Q.Mayne and E.Polak, A superlinearly convergent algorithm for constrained optimization problems, *Mathematical Programming Study*, 16 (1982), pp.45-61.

[13] E.R.Panier and A.L.Tits, Avoiding the Maratos effect by means of a nonmonotone line search I: General constrained problems, *SIAM J. on Numerical Analysis*, 28 (1991), pp.1183-1195.

[14] H.Yabe and H.Yamashita, Q-superlinear convergence of primal-dual interior point quasi-Newton methods for constrained optimization, *Journal of Operations Research Society of Japan*, 40 (1997), pp.415-436.

[15] H.Yamashita, *A globally convergent primal-dual interior point method for constrained optimization*, Technical Report, Mathematical Systems, Inc., Tokyo, Japan, April 1992 (revised March 1994).

[16] H.Yamashita and T.Tanabe, A primal-dual interior point trust region method for large scale constrained optimization, *Optimization – Modeling and Algorithms 6*, Cooperative Research Report 73, The Institute of Statistical Mathematics, March (1995), pp.1-25.

[17] H.Yamashita and H.Yabe, Nonmonotone SQP methods with global and superlinear convergence properties, *Optimization – Modeling and Algorithms 8*, Cooperative Research Report 84, The Institute of Statistical Mathematics, March (1996), pp.10-29.

[18] H.Yamashita and H.Yabe, Superlinear and quadratic convergence of some primal-dual interior point methods for constrained optimization, *Mathematical Programming*, 75 (1996), pp.377-397.

[19] H.Yamashita, H.Yabe and T.Tanabe, *A globally and superlinearly convergent primal-dual interior point trust region method for large scale constrained optimization* Technical Report, Mathematical Systems, Inc., Tokyo, Japan, July 1997 (revised December 1997).