数理解析研究所講究録
1040 巻 1998 年 237-244

漸化式を用いる変形ベッセル関数$I_\nu(x)$の数値計算法の誤差解析

中部大学経営情報学部　吉田年雄　(Toshio Yoshida)

1．はじめに

mを適当に選ばれた正の整数とし，αを小さな任意定数とする．

$$G_{\nu+m+1}(x)=0,\ G_{\nu+m}(x)=\alpha \tag{1}$$

を出発値として，$I_\nu(x)$が満足する漸化式

$$G_{\nu-1}(x)=\frac{2\nu}{x}G_\nu(x)+G_{\nu+1}(x) \tag{2}$$

を繰り返し使うことにより，$G_{\nu+m-1}(x), G_{\nu+m-2}(x),\cdots,G_\nu(x)$を順次，計算する．それを用いれば，ある$N(<m)$に対して，$n=0,1,\cdots,N$についての$I_{\nu+n}(x)$の近似式が次式で与えられる．

$$I_{\nu+n}(x)\approx e^x G_{\nu+n}(x)/\sum_{k=0}^{m}\varepsilon_k G_{\nu+k}(x) \tag{3}$$

ただし，

$$\varepsilon_k=2\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\frac{(\nu+k)\Gamma(\nu+1)\Gamma(2\nu+k)}{k!\Gamma(2\nu+1)} \tag{4}$$

である．この$I_\nu(x)$の計算法の誤差解析については，$0\le\nu<1$の場合に対して，既に二宮[1)]によって行われている．二宮による誤差解析における式変

形は，かなり面倒な手続きを必要とするが，本稿で提案している方法では，式変形を比較的容易に行うことができる．

2．誤差解析

nを正整数とする．関数$I_{\nu+n}(x)$および$\overline{K}_{\nu+n}(x)=(-1)^n K_{\nu+n}(x)$は共に同じ漸化式(2)を満足する．逆に式(2)の一般解は

$$G_{\nu+n}(x)=\xi\, G_{\nu+n}(x)+\eta\, \overline{K}_{\nu+n}(x) \tag{5}$$

によって表わされる．ここでξおよびηは任意定数である．これらの任意定数は式(1)によって決定される．式(1)から次式が得られる．

$$G_{\nu+m+1}(x)=\xi\, I_{\nu+m+1}(x)+\eta\, \overline{K}_{\nu+m+1}(x)=0 \tag{6}$$

式(5)と(6)からηを消去すると次式を得る．

$$G_{\nu+n}(x)=\xi\left(I_{\nu+n}(x)-\frac{I_{\nu+m+1}(x)\overline{K}_{\nu+n}(x)}{\overline{K}_{\nu+m+1}(x)}\right) \tag{7}$$

上式と次の関係式

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k I_{\nu+k}(x)=e^x \tag{8}$$

より

$$\sum_{k=0}^{m}\varepsilon_k\left(\frac{G_{\nu+k}(x)}{\xi}+\frac{I_{\nu+m+1}(x)\overline{K}_{\nu+k}(x)}{\overline{K}_{\nu+m+1}(x)}\right)+\sum_{k=m+1}^{\infty}\varepsilon_k I_{\nu+k}(x)=e^x \tag{9}$$

が得られる．式(7)と(9)からξを消去すると次式が求められる．

$$I_{\nu+n}(x)=\frac{e^x G_{\nu+i}(x)}{\sum_{k=0}^{m}\varepsilon_k G_{\nu+k}(x)}(1-\Phi_{\nu,m}(x))+\frac{I_{\nu+m+1}(x)\overline{K}_{\nu+n}(x)}{\overline{K}_{\nu+m+1}(x)} \tag{10}$$

ここで，

$$\Phi_{\nu,m}(x)=e^{-x}\left(\sum_{k=0}^{m}\varepsilon_k\frac{I_{\nu+m+1}(x)\overline{K}_{\nu+k}(x)}{\overline{K}_{\nu+m+1}(x)}+\sum_{k=m+1}^{\infty}\varepsilon_k I_{\nu+k}(x)\right) \tag{11}$$

である．式(10)は，$I_{\nu+n}(x)$とその近似式との基本的な関係式である．

したがって，式(1)を出発値として，漸化式(2)を繰り返し適用することより得られた$G_{\nu+m-1}(x), G_{\nu+m-2}(x), \cdots, G_{\nu}(x)$を用いて，式(3)により，10進$p$桁の精度で$I_{\nu+n}(x)$が計算できるためには,

$$|\Phi_{\nu,m}(x)| < 0.5\times 10^{-p} \tag{12}$$

および

$$|\Theta_{\nu,m,n}(x)| < 0.5\times 10^{-p} \tag{13}$$

が成り立てばよい．ここで,

$$\Theta_{\nu,m,n}(x) = \frac{I_{\nu+m+1}(x)\overline{K}_{\nu+n}(x)}{I_{\nu+n}(x)\overline{K}_{\nu+m+1}(x)} \tag{14}$$

である．$I_{\nu+n}(x)$の近似式(3)の相対精度$E_{\nu,m,n}(x)$は，式(10)より，

$$E_{\nu,m,n}(x) = \frac{\Phi_{\nu,m}(x) - \Theta_{\nu,m,n}(x)}{1-\Phi_{\nu,m}(x)} \tag{15}$$

と表される．

nがmに比べて十分に小さいときには,

$$\left|\Phi_{\nu,m}(x)\right| >> \left|\Theta_{\nu,m,n}(x)\right| \tag{16}$$

であるので，そのときには，$\Phi_{\nu,m}(x)$が重要となる．

3．$\Phi_{\nu,m}(x)$の変形

式(11)で表わされる$\Phi_{\nu,m}(x)$を変形しよう．

$$\Phi_{\nu,m}(x) = e^{-x}\left(\sum_{k=0}^{m}\varepsilon_k \frac{I_{\nu+m+1}(x)\overline{K}_{\nu+k}(x)}{\overline{K}_{\nu+m+1}(x)} + e^{x} - \sum_{k=0}^{m}\varepsilon_k I_{\nu+k}(x)\right)$$

$$=\frac{e^x K_{\nu+m+1}(x)-\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{m}\varepsilon_k \overline{R}_{m-k,\nu+k+1}(x)}{e^x K_{\nu+m+1}(x)} \tag{17}$$

ただし,

$$\begin{aligned}\overline{R}_{m-k,\nu+k+1}(x)&=x(I_{\nu+k}(x)K_{\nu+m+1}(x)+(-1)^{m+k+2}I_{\nu+m+1}(x)K_{\nu+k}(x))\\&=\sum_{n=0}^{[(m-k)/2]}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+k+2n}\frac{(m-k-n)!\Gamma(\nu+m-n+1)}{n!(m-k-2n)!\Gamma(\nu+k+n+1)}\end{aligned} \tag{18}$$

は変形Lommel多項式[2)]である.

式(17)の右辺の分子の第1項$e^x K_{\nu+m+1}(x)$は, $e^x I_\nu(x)$のベキ級数展開（付録参照）

$$e^x I_\nu(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(2x)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+k+1/2)}{k!\Gamma(2\nu+k+1)}(2x)^k \tag{19}$$

を用いると, 次式のように書き換えられる.

$$\begin{aligned}e^x K_{\nu+m+1}(x)&=\frac{\pi e^x}{2}\frac{I_{-\nu-m-1}(x)-I_{\nu+m+1}(x)}{\sin(\nu+m+1)\pi}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2m+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1+k}\frac{\Gamma(2\nu+2m-k+2)\Gamma(\nu+m-k+1)}{k!\Gamma(2\nu+2m-2k+2)}\\&+\frac{(-1)^{m+1}\sqrt{\pi}(2x)^{m+1}}{2\sin\nu\pi}\\&\cdot\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-\nu+m+k+3/2)(2x)^{-\nu+k}}{(2m+k+2)!\Gamma(-2\nu+k+1)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+m+k+3/2)(2x)^{\nu+k}}{k!\Gamma(2\nu+2m+k+3)}\right\}\end{aligned} \tag{20}$$

また, 式(17)の右辺の分子第2項は, 次のように書き換えられる[3)].

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{m}\varepsilon_k\overline{R}_{m-k,\nu+k+1}(x)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m-1}\sum_{k=0}^{m}\varepsilon_k\left(\frac{x}{2}\right)^k\sum_{i=0}^{[(m-k)/2]}\frac{(m-k-i)!\Gamma(\nu+m-i+1)}{i!(m-k-2i)!\Gamma(\nu+k+i+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2i}\end{aligned}$$

（xの同じベキでまとめると）

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m-1}\sum_{l=0}^{m}\left(\frac{x}{2}\right)^l\frac{1}{(m-l)!}\sum_{i=0}^{[l/2]}\varepsilon_{l-2i}\frac{(m-l+i-1)!\Gamma(\nu+m-i+1)}{i!\Gamma(\nu+l-i+1)} \tag{21}$$

（ ε_{l-2i}を具体的に書き入れると）

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+1)}\sum_{l=0}^{m}\left(\frac{x}{2}\right)^{l}\frac{1}{(m-l)!}$$

$$\cdot\sum_{i=0}^{[l/2]}\frac{(\nu+l-2i)\Gamma(2\nu+l-2i)(m-l+i)\Gamma(\nu+m-i+1)}{i!\Gamma(l-2i+1)\Gamma(\nu+l-i+1)} \tag{22}$$

$\left(\sum_{i=0}^{[l/2]}\rightarrow\sum_{i=0}^{\infty}\right.$ 無限級数にできるので)

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+1)}\sum_{l=0}^{m}\left(\frac{x}{2}\right)^{l}\frac{1}{(m-l)!}$$

$$\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\nu+l-2i)\Gamma(2\nu+l-2i)(m-l+i)\Gamma(\nu+m-i+1)}{i!\Gamma(l-2i+1)\Gamma(\nu+l-i+1)}. \tag{23}$$

上式をPochhammerの記号

$$(\alpha)_i=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots\cdots(\alpha+i-1)=\frac{\Gamma(\alpha+i)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$(\alpha)_0=1 \tag{24}$$

で表示するため，公式

$$a-2i=a(1-a/2)_i/(-a/2)_i$$

$$\Gamma(a+i)=\Gamma(a)(a)_i$$

$$\Gamma(a-i)=(-1)^i\Gamma(a)/(1-a)_i$$

$$\Gamma(a-2i)=\Gamma(a)\Big/\left\{2^{2i}(1/2-a/2)_i(1-a/2)_i\right\} \tag{25}$$

を使って，一般化された超幾何級数の形に書き換えると次のようになる．

$$\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{m}\varepsilon_k\overline{R}_{m-k,\nu+k+1}(x)$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1}\frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(2\nu+1)}\sum_{l=0}^{m}\left(\frac{x}{2}\right)^{l}\frac{(\nu+l)\Gamma(2\nu+l)}{l!\Gamma(\nu+l+1)}$$

$$\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{\nu+l}{2}\right)_i(m-l+1)_i\left(-\frac{l}{2}\right)_i\left(\frac{1}{2}-\frac{l}{2}\right)_i(-\nu-l)_i}{i!\left(-\frac{\nu+l}{2}\right)_i\left(\frac{1}{2}-\frac{2\nu+l}{2}\right)_i\left(1-\frac{2\nu+l}{2}\right)_i(-\nu-m)_i} \tag{26}$$

ここで，一般化された超幾何級数の和に関する定理[4)]

$$
{}_5F_4\left(a,1+\frac{a}{2},b,c,d;\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d;1\right)
= \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-b-c-d)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a-b-d)\Gamma(1+a-c-d)} \tag{27}
$$

を用いれば，次式が得られる．

$$
\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{m}\varepsilon_k \overline{R}_{m-k,\nu+k+1}(x)
= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1+k}\frac{\Gamma(2\nu+2m-k+2)\Gamma(\nu+m-k+1)}{k!\Gamma(2\nu+2m-2k+2)} \tag{28}
$$

このように，式の簡単化にとって，定理(27)が大きな手助けとなっている．文献4)では，この式の簡単化（級数の和を単項で表すこと）をさらに一般的に試みる方法について述べている．式(20)と(28)を式(17)に代入すると，次式を得る．

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\nu,m}(x) = \Bigg[& \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2m+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1+k}\frac{\Gamma(2\nu+2m-k+2)\Gamma(\nu+m-k+1)}{k!\Gamma(2\nu+2m-2k+2)} \\
& -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1+k}\frac{\Gamma(2\nu+2m-k+2)\Gamma(\nu+m-k+1)}{k!\Gamma(2\nu+2m-2k+2)} \\
& +\frac{(-1)^{m+1}\sqrt{\pi}(2x)^{m+1}}{2\sin\nu\pi} \\
& \cdot\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-\nu+m+k+3/2)(2x)^{-\nu+k}}{(2m+k+2)!\Gamma(-2\nu+k+1)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+m+k+3/2)(2x)^{\nu+k}}{k!\Gamma(2\nu+2m+k+3)}\right\}\Bigg] \\
& \Big/\left\{e^{x}K_{\nu+m+1}(x)\right\}
\end{aligned} \tag{29}
$$

$$
\begin{aligned}
= \Bigg[& \frac{1}{2}\sum_{k=m+1}^{2m+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1+k}\frac{\Gamma(2\nu+2m-k+2)\Gamma(\nu+m-k+1)}{k!\Gamma(2\nu+2m-2k+2)} \\
& +\frac{(-1)^{m+1}\sqrt{\pi}(2x)^{m+1}}{2\sin\nu\pi} \\
& \cdot\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-\nu+m+k+3/2)(2x)^{-\nu+k}}{(2m+k+2)!\Gamma(-2\nu+k+1)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+m+k+3/2)(2x)^{\nu+k}}{k!\Gamma(2\nu+2m+k+3)}\right\}\Bigg] \\
& \Big/\left\{e^{x}K_{\nu+m+1}(x)\right\}
\end{aligned} \tag{30}
$$

ここで，式(29)において，第１の部分$(k=0,1,\cdots,2m+1)$の一部と第２の部

分$(k=0,1,\cdots,m)$は相殺していることに注意しよう．この相殺により，$\Phi_{\nu,m}(x)$が小さくなり，式(12)を満たすことができるようになるのである．上式において，$\nu << m$ならば，[ ]の第1の部分の$k=m+1$の項が主要項である．したがって，$\Phi_{\nu,m}(x)$に対する有用な評価式として，次式が得られる．

$$\Phi_{\nu,m}(x) \approx \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \frac{\Gamma(2\nu+m+1)\Gamma(\nu+1)}{(m+1)!\,\Gamma(2\nu+1)e^x K_{\nu+m+1}(x)} \tag{31}$$

式(30)および(31)は，二宮[1)]の結果と一致する．二宮は，式(17)の右辺の分子の第2項が式(28)の右辺の形になることを予想し，面倒な式変形を経て，数学帰納法により証明した．本稿での導出は，上述のように直接的であるが，それでも式変形には多少の手間がかかる．

参　考　文　献

1)　二宮市三：漸化式によるBessel関数の計算，電子計算機のための数値計算法II，pp.103-121，培風館，東京(1965).

2)　森口繁一，宇田川銈久，一松信：数学公式III，p.225，岩波書店，東京(1968).

3)　吉田年雄：一般化された超幾何級数の和の定理の応用，情報科学リサーチジャーナル，Vol.2,pp57-60,中部大学情報科学研究所(1995).

4)　Slater,L.J.：*Generalized Hypergeometric Functions,* pp.48-57,Cambridge University Press(1966).

付 録

$$
\begin{aligned}
&e^x I_\nu(x) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} x^l \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!\Gamma(\nu+i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i}
\end{aligned}
$$

（xの同じベキでまとめると， $k \leftarrow l+2i$）

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{[k/2]} \frac{1}{i!(k-2i)!\Gamma(\nu+i+1)} x^{k-2i} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i} \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{i=0}^{[k/2]} \frac{1}{i!\Gamma(k-2i+1)!\Gamma(\nu+i+1)2^{2i}} \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!\Gamma(k-2i+1)!\Gamma(\nu+i+1)2^{2i}}
\end{aligned}
$$

（Pochhammerの記号を用いて表わすと）

$$
= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-k/2)_i (1/2-k/2)_i}{i!(\nu+1)_i}
$$

上式にGaussの公式

$$
{}_2F_1(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}
$$

を用いれば次式が得られる.

$$
\begin{aligned}
e^x I_\nu(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+k+1/2)}{k!\Gamma(\nu+k/2+1/2)\Gamma(\nu+k/2+1)} x^k \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} (2x)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+k+1/2)}{k!\Gamma(2\nu+k+1)} (2x)^k
\end{aligned}
$$