

到達可能性判定問題の計算量について (縮約版)

垂井淳* 戸田誠之助†

1 はじめに

無向グラフならびに有向グラフの到達可能性判定問題 (各々を, UGAP および GAP と略す) は, 1970 年代から研究されている古い問題であるが, 領域量が限定された計算過程を具体的な計算問題という形に表現し直したものであり, 領域量に関わる計算量理論にとっては中心的な問題である.

本稿ではまず, 無向グラフのパス幅を $\text{pw}(G)$ で表すとき, UGAP が決定性 $O(\text{pw}(G)^2 \log n)$ 領域で判定可能であることを示す. ここで, n は入力として与えられた無向グラフの頂点数を表す. また, これと同じ結果が GAP についても成立する. パス幅は最大で $n-1$ になるので, この結果が極めて良好なものとは言えないが, それでも, パス幅が定数のグラフからなるクラスに対しては, UGAP や GAP が決定性対数領域で判定可能であることを示している. これまで, UGAP や GAP が決定性対数領域で判定可能となるようなクラスとしては無閉路的なグラフ (つまり, 森) のクラス以外には知られていなかった. 従って, 本稿の結果はこれ以外の新たなクラスを初めて提示している. 更に本稿では, 入力を二本の道からなるグラフに制限したとしても, UGAP が決定性対数領域困難 (DLOG-hard) になることを示す. この結果は, 入力対象となる無向グラフの構造をどのように制限したとしても, (制限された) UGAP が DLOG より下位のクラス (例えば, NC^1 や TC^0 など) に属することはないことの強い根拠を与えている.

2 準備

本稿では, 無向グラフを単にグラフと呼ぶ. 有向グラフの辺を有向辺と呼ぶことにするが, 無向グラフの辺は単に辺と呼ぶことにする. 以下, $G = (V, E)$ を任意のグラフとする.

任意の $X, Y \subseteq V$ に対して, 「 X に属するある頂点と Y に属するある頂点を結ぶ G 上の道」のことを, 以後は単に, 「 X と Y を結ぶ G 上の道」と呼ぶ. また更に, X と Y を結ぶ G 上の道が存在するとき, Y は X から G において (もしくは, G の上で) 到達可能であるという.

任意の $U \subseteq V$ に対して, U に属する頂点すべてとこれらに接続するすべての辺を G から削除して得られるグラフを $G-U$ で表す. また, 任意の $F \subseteq E$ に対して, F に属するすべての辺を G から削除して得られるグラフを $G-F$ で表す.

本稿では, 「隣接する」という用語をやや拡大した意味で使用する. 任意の $X, Y \subseteq V$ に対して, X と Y が隣接するとは, X のある頂点と Y のある頂点を接続する辺が存在するか, もしくは, X と Y が共通の頂点を含むときをいう. 更に, $X \subseteq V$ と G の部分グラフ H が隣接するとは, X と H の頂点集合が隣接するときをいう. また, G の部分グラフ H_1 と H_2 が隣接すると言ったときには, 各々の頂点集合が隣接していることを意味する.

また, 本稿では, 「近傍」を普通とは少しだけ異なる意味で用いる. 任意の $X \subseteq V$ に対して, G における X の近傍 $N_G(X)$ を $N_G(X) = \{v \in V : \exists x \in X [vx \in E]\} \cup X$ で定める. また更に, 任意の頂点 $x \in V$ に対して, $N_G(\{x\})$ を $N_G(x)$ と略記する.

任意の $X \subseteq V$ に対して, $E_G[X]$ を
$$E_G[X] = \{uv \in E : u \in X \vee v \in X\}$$
 で定める. 逆に, 任意の $F \subseteq E$ に対して, $V_G[F]$ を
$$V_G[F] = \{v \in V : \exists u \in V [uv \in F]\}$$
 で定める.

任意の有向グラフ $G = (N, A)$ の基礎グラフ (underlying graph) $\hat{G} = (V, E)$ を G の各有向辺の向きを取り去って得られる無向グラフのことと定める.

定義 任意の集合 A に対して, A の部分集合全体を 2^A で表す. また更に, 任意の非負整数 k に対して, $2^{A,k}$ を,

$$2^{A,k} = \{X \subseteq A : |X| \leq k\}$$

と定める.

Σ を任意の集合とすると, Σ の要素からなる有限列全体を Σ^* で表す. また, Σ^* に属する任意の列 a_1, a_2, \dots, a_m を $\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$ もしくは $\langle a_i \rangle_{i=1}^m$ で表す. なお, 添え字の範囲が文脈から明確であるか任意性があるときには, $\langle a_i \rangle_{i=1}^m$ を $\langle a_i \rangle$ と略記することもある.

整数からなる任意の集合 N に属する整数の中の最大値と最小値を, 各々, $\max N$ と $\min N$ で表す. ■

*電気通信大学電子情報学科, 東京調布市調布ヶ丘 1-5-1, jun@sw.cas.uec.ac.jp

†日本大学文理学部応用数学科, 東京都世田谷区桜上水 3-25-40, toda@am.chs.nihon-u.ac.jp

定義 2.1 $G = (V, E)$ を任意のグラフとし, $\alpha = (V_1, V_2,$

$\dots, V_m)$ を V の部分集合からなる任意の列とする. この列が G のパス分解(path decomposition) であるとは, 次の条件が成り立つときをいう.

- (1) $\bigcup_i V_i = V$.
- (2) 任意の辺 $uv \in E$ に対して, ある V_i が存在して, $u, v \in V_i$ が成り立つ.
- (3) 任意の $i, j, k (1 \leq i \leq j \leq k \leq m)$ に対して, $V_i \cap V_k \subseteq V_j$ が成り立つ.

このパス分解 α のもとでの G のパス幅 $\text{pw}_\alpha(G)$ を

$$\text{pw}_\alpha(G) = \max \{|V_i| - 1 : 1 \leq i \leq m\}$$

と定める. また更に, G のパス幅 $\text{pw}(G)$ を

$$\text{pw}(G) = \min_\alpha \text{pw}_\alpha(G)$$

で定める. ここで, 最小値は G のあらゆるパス分解に関して取られる. 有向グラフのパス幅を, その基礎グラフのパス幅のことと定める. ■

定義 2.2 $G = (V, E)$ を任意のグラフとする. G の頂点集合 V から集合 $\{1, 2, \dots, |V|\}$ への任意の全単射をグラフ G の線型配置 (レイアウトともいう) という. また, 本稿では, 線型配置に関して議論するときに限って, 集合 $\{1, 2, \dots, |V|\}$ の要素を順位 (location) と呼ぶ. また, 順位からなる集合 $\{1, 2, \dots, |V|\}$ を Λ_G で表す.

辺 $uv \in E$ が順位 i を横切るとは, $\varphi(u) \leq i < \varphi(v)$ または $\varphi(v) \leq i < \varphi(u)$ が成り立つときをいう. 更に, G 上の道が順位 i を横切るとは, この道が順位 i を横切る辺を含んでいるときをいう.

φ を G の任意の線型配置とする. このとき, 任意の $U \subseteq V$ に対して, $\varphi(U) = \{\varphi(u) : u \in U\}$ と定める. また, 任意の順位 i に対して, $E_\varphi(i)$ と $V_\varphi(i)$ を, 各々,

$$E_\varphi(i) = \{uv \in E : \varphi(u) \leq i < \varphi(v)\}$$

$$V_\varphi(i) = \{u \in V : \varphi(u) \leq i, \exists v \in V [uv \in E_\varphi(i)]\}$$

で定める.

φ のもとでの G の頂点分離数 (vertex separation number) $\text{vs}_\varphi(G)$ を $\text{vs}_\varphi(G) = \max \{|V_\varphi(i)| : i \in \Lambda_G\}$ と定める. 更に, G の頂点分離数 $\text{vs}(G)$ を $\text{vs}(G) = \min_\varphi \text{vs}_\varphi(G)$ と定める. ここで, 最小値は G のあらゆる線型配置に関して取られる. 有向グラフの頂点分離数をその基礎グラフの頂点分離数のことと定める. ■

命題 2.3 [Kin92] 任意のグラフ G に対して, $\text{vs}(G) = \text{pw}(G)$. ■

G を任意のグラフとし, φ を G の任意の線形配置とする. 本稿では, 頂点分離数を中心に議論を進めるので, 特に断らない限り, φ が G の最適配置であるといったときには, G の頂点分離数を与える (すなわち, $\text{vs}_\varphi(G) = \text{vs}(G)$ が成り立つ) 線型配置のことと定める.

3 アルゴリズムとその正当性

本節では, 任意のグラフ G に関する到達可能性判定問題が, 決定性 $O(\text{vs}(G)^2 \log_2 n)$ 領域で判定できることを示す. ここで, n は G の頂点数を表す. 以下では, アルゴリズムの動作仕様を定義し, この動作仕様に基づいてアルゴリズムの正当性を証明していく.

定義 3.1 アルゴリズムの動作仕様を表す (記号論理学の意味での) 述語 REACH_k と SIDE_k , および, 関数 NEXT_k の定義を図 1 (本稿の最後のページ) に示す. ■

$\text{REACH}_k, \text{NEXT}_k, \text{SIDE}_k$ を $O(k^2 \log_2 n)$ 領域 (n は頂点数) の再帰的なアルゴリズム (を決定性 Turing machine) として実現することは, さほど難しくはない. 従って, その実現方法については読者に任せる. 本節の主な目的は次の定理を証明することである.

定理 3.2 k を任意の非負整数, $G = (V, E)$ を任意のグラフ, S と T を V の任意の部分集合とする. このとき, 次が成り立つ.

- (a) $\text{REACH}_k(G, S, T)$ が成り立つならば, S と T を結ぶ G 上の道が存在する.
- (b) 逆に, $\text{vs}(G) \leq k$, かつ, S と T を結ぶ道が存在するならば, $\text{REACH}_k(G, S, T)$ が成り立つ.
- (c) C を G 内の任意の連結成分, V_C を C の頂点集合, H を C を含む G の任意の部分グラフとする. このとき, 任意の $s, t \in V_C$ に対して,

$$\text{REACH}_k(G, s, t) \Leftrightarrow \text{REACH}_k(H, s, t)$$

が成り立つ. ■

この定理は k に関する帰納法によって証明される. REACH_0 の定義と頂点分離数の定義より, $k = 0$ のときに (a)~(c) が成り立つことは明らかなので, 今後は $k \geq 1$ の場合について議論していく.

この定理の証明はやや込み入っているため, 議論を簡略化するための便法として, 非負整数 k に対して定理 3.2 が成り立つことを, 以下では, 「**Th**[k] が成り立つ」と言うことにする. この言い回しを用いると帰納法の仮定は次のようになる. これ以後, 本節の最後まで, この帰納法の仮定を前提に議論している点に注意されたい. また更に, 本節の最後まで, k は帰納段階のパラメタを表す正整数として用いていることにも注意されたい.

帰納法の仮定 適当な正整数 k に対して, **Th**[$k-1$] が成り立つ. ■

Th[k](a) と (c) は, 簡単に証明できるので読者に任せる. 以後は, **Th**[k](b) を証明していくことになる. このために, まず, SIDE_k に関する基本的な性質を示そう.

補題 3.3 G を任意のグラフ, w を G の任意の頂点, C_w を w を含む G 内の連結成分, V_w を C_w の頂点集合, H を C_w を含む G の任意の部分グラフとする. このとき, 次が成り立つ.

- (a) $\text{SIDE}_k(G, w) \Leftrightarrow \forall u, v \in V_w[\text{REACH}_{k-1}(G, u, v)]$.
 (b) $\text{SIDE}_k(G, w) \Leftrightarrow \forall u \in V_w[\text{SIDE}_k(G, u)]$.
 (c) $\text{vs}(C_w) < k \Rightarrow \text{SIDE}_k(G, w)$.
 (d) $\text{SIDE}_k(G, w) \Leftrightarrow \text{SIDE}_k(H, w)$. ■

この補題の (a) と帰納法の仮定 $\text{Th}[k-1](a)$ (の対偶) より, G の任意の頂点 w に対して $\text{SIDE}_k(G, w)$ が成り立つならば, 頂点 w を含む連結成分の上の到達可能性が REACH_{k-1} を用いて正しく判定できることが分かる. これをもっと直感的に言い換えると, G のある頂点 w に対して, $\text{SIDE}_k(G, w)$ が成り立つならば, REACH_{k-1} を用いることによって w を含む連結成分内のすべての頂点を過不足なく拾い集めることができる, と言える. SIDE_k の役割は, 各連結成分に関してこのような意味での収集が可能か否かを, その連結成分内の適当な頂点を介して判定することにある. 従ってまた, 以後の議論を読み進めるに当たって, SIDE_k の第二引数を単なる頂点とは考えずに, その頂点を含む連結成分を表しているものと考えて欲しい.

上記の補題 (c) より, $\text{vs}(G) < k$ ならば, 前段落で述べたような意味での収集が可能であることが分かる. しかしながら, $\text{vs}(G) = k$ のときには, REACH_{k-1} は一般に上で述べたような効力を失う可能性がある. より正確に言うと, $\text{vs}(G) = k$ のときには, G のある頂点 w に対して $\text{SIDE}_k(G, w)$ が偽となってしまう可能性があり, このような w を含む連結成分内のある 2 頂点 u, v に対して, $\text{REACH}_{k-1}(G, u, v)$ が偽になってしまう. 従って, このような連結成分については, REACH_{k-1} に再び活力を与えるための何か別の方策を講じる必要がある. 以下, $\text{SIDE}_k(G, w)$ が偽になるような頂点 w を含む任意の連結成分を肥満成分と呼ぶことにしよう.

本稿のアルゴリズムでは, 肥満成分に対して次のような方策を講じている. 任意の肥満成分 $C = (V_C, E_C)$ に対して, V_C の部分集合からなる列 X_0, X_1, \dots, X_m を用いて C をスリムにする. ここで, 「スリムにする」とは, 各 X_j に接続する辺を C から削除することによって, C を幾つかのより小さな連結成分に細分化し, 更に, 細分化してできた各連結成分内の各頂点 w に対して, $\text{SIDE}_k(G, w)$ が成り立つようにしてしまうことを意味する.

以下で定める「 k -脂肪組織」は, 前段落で述べたような意味で肥満成分を「スリムにする」ための集合列を概念化したものである. まず, これ以後の議論を容易に進めるための便法として, 次で定義される述語 path を用意する.

定義 3.4 $G = (V, E)$ を任意のグラフとする. 任意の $X, Y \subseteq V$ に対して, X と Y を結ぶ G 上の道が存在するとき真となり, そうでないとき偽となる述語を $\text{path}(G, X, Y)$ で表す. ■

定義 3.5 $G = (V, E)$ を任意のグラフとする. このとき, 集合列 $(X_j)_{j=0}^m \in (2^V)^*$ が G の k -脂肪組織 (k -fatty tissue) であるとは, 次の条件が成り立つときをいう.

- (0) G の最適配置 φ が存在して $X_0 = \{\varphi^{-1}(1)\}$, かつ, 任

意の j に対して $|X_j| \leq k$.

- (1) 任意の $p(0 \leq p \leq m)$ と任意の $w \in N_G(X_p)$ に対して,
 $\text{SIDE}_k(G - E[\bigcup_{j=0}^m X_j], w)$.
 (2) 任意の $p(0 \leq p < m)$ と任意の $v \in X_{p+1}$ に対して,
 $\text{path}(G - E[\bigcup_{j=0}^m X_j], N_G(X_p), N_G(v))$.
 (3) 任意の $p(0 < p < m)$ に対して,
 $\neg \text{path}(G - E[X_p], \bigcup_{j=0}^{p-1} X_j, \bigcup_{j=q+1}^m X_j)$.

各 X_j をこの k -脂肪組織の k -脂肪細胞 (k -fatty cell) と呼び, 任意の $p, q(p \leq q)$ に対して, $E[\bigcup_{j=p}^q X_j]$ をこの k -脂肪組織内の k -脂肪 (k -fat) と呼ぶ. ■

k -脂肪組織の定義の中で述べた各条件の役割を直感的に述べておこう.

条件 (0) 中の「 $|X_j| \leq k$ 」は, 各 k -脂肪細胞のサイズがパラメタ k に比べてあまり大きくならないことを述べており, ここでは便宜的に k 自身を使用している. 実際, 各 k -脂肪細胞のサイズの上界は, 各肥満成分に対する k -脂肪組織の存在性が保証されさえすれば, k に関する自然数上の任意の関数でよい.

条件 (0) 中の「 $\{\varphi^{-1}(1)\}$ 」と条件 (2) は, k -脂肪組織全体が G のある一つの連結成分に含まれていることを述べている (なお, この事実をあとで補題として述べ直す). 更に, この 2 条件は, 任意の肥満成分に対してその k -脂肪組織が存在すること, ならびに, 各 k -脂肪細胞 X_j を添え字の小さいほうから順に計算できることを保証している. 今後の議論を直感的に理解していくためにも, この点について, 少しだけ先走った話をしておこう. いま k -脂肪細胞 X_0, \dots, X_p (ただし, $0 \leq p < m$) を (何らかの方法を用いて) 計算できたとする. しかしながら, k -脂肪 $E[\bigcup_{j=0}^p X_j]$ を削除しても肥満成分がスリムにならなかった (つまり, k -脂肪組織の条件 (2) が成立しなかった) としよう. この場合, 肥満な部分が残っているわけだが, この 2 条件は肥満な (連結した) 部分が一つしか存在しないことを保証する. そして, このこと (と $\text{vs}(G) \leq k$ であること) が X_{p+1} の存在性を保証している. 更に, k -脂肪 $E[\bigcup_{j=0}^p X_j]$ を削除したあと, k -脂肪細胞 X_{p+1} をどの部分に向かって求めていけばよいかも同時に決めている.

条件 (1) は, k -脂肪組織に張り付いている k -脂肪をすべて削除することによって, この k -脂肪組織を含む連結成分をスリムにできることを述べている. なお, 削除後にできる各連結成分が $\bigcup_{j=0}^m X_j$ の隣接点を含んでいることに注意すると, 条件 (1) の意味を理解し易くなるだろう.

条件 (3) は, 各肥満成分に対して, ある k -脂肪組織が小さな領域量で計算できることを保証するためのものである. 少しだけ先走って言うと, のちほど G, X_{p-1}, X_p だけを用いて, X_{p+1} (の一つ) が計算できること (つまり, NEXT_k が k -脂肪細胞を正しく計算すること) を示すが, 条件 (3) はこのような局所的な計算が可能であることを保証している.

これ以後は, G の任意の連結成分に対して, k -脂肪組織が

存在すること, ならびに, $NEXT_k$ を使用することによって, k -脂肪組織 (の一つ) が計算できることを示していく. このために, k -脂肪組織の条件 (1) を僅かに緩めて得られる「 k -脂質」と呼ばれる概念を用意する.

定義 3.6 グラフ G の頂点部分集合からなる列 $\langle X_j \rangle_{j=0}^m$ が G の k -脂質 (k -fatty substance) であるとは, k -脂肪組織の条件 (0),(2),(3) が成り立ち, かつ, 次の (1') が成り立つときをいう.

(1') 任意の $p(0 \leq p < m)$ と任意の $w \in N_G(X_p)$ に対して,
 $SIDE_k(G - E[\bigcup_{j=0}^m X_j], w)$. ■

備考 「 k -脂質である」ことは「ある k -脂肪組織の接頭列である」ことと同値である. ただし, この同値性は自明ではない. この同値性を定理 3.10 で証明する. ■

次の補題は任意の k -脂質全体がある連結成分に含まれることを述べている. 以後の議論では, この補題を特に断ることなく使用するので注意されたい.

補題 3.7 任意のグラフ G と G の任意の k -脂質 $\langle X_j \rangle$ に対して, この集合列全体は G のある連結成分に含まれる. 更に, $\bigcup_j X_j$ から到達可能な頂点すべてからなる集合は, その連結成分の頂点集合である. ■

この補題と k -脂肪組織の条件 (1) より, 任意の k -脂肪組織がそれ自身を含む連結成分を (先に述べた意味で) スリムにしていることが分かるだろう. そこでこれ以後, k -脂肪組織の存在性を証明し終わるまでは, 連結グラフを議論の対象とする.

頂点分離数が高々 k の任意の連結グラフに対する k -脂肪組織の存在性は, 次の方針に基づいて証明される. まず, (初期的な) k -脂質の存在性を示す. 次に, 任意の k -脂質がある系統的な方法でより長い k -脂質に拡大できること, ならびに, その方法を用いることによっていつかは k -脂肪組織に到達することを証明する. まず, (初期的な) k -脂質の存在性を示そう.

命題 3.8 C を任意の連結グラフとし, φ を C の任意の最適配置とする. このとき, $\langle \{\varphi^{-1}(1)\} \rangle$ は C の k -脂質である (注: この場合, $vs(C) \leq k$ という条件は不要である). 特に, $vs(C) < k$ ならば, この集合列は C の k -脂肪組織である. ■

次の補題は, 連結グラフ C の任意の k -脂質 $\langle X_j \rangle_{j=0}^p$ に対して, k -脂肪 $E[\bigcup_{j=0}^p X_j]$ を削除してもまだ, この k -脂質に隣接する肥満成分が存在するとき, この肥満成分は最後尾に位置する k -脂肪細胞 X_p だけに隣接していることを述べている.

補題 3.9 $C = (V, E)$ を任意の連結グラフ, $\langle X_j \rangle_{j=0}^p$ を C の任意の k -脂質, $w \in V$ を任意の頂点とする. また, $C - E[\bigcup_{j=0}^p X_j]$ 内の w を含む連結成分の頂点集合を V_w で表す. このとき, $\neg SIDE_k(C - E[\bigcup_{j=0}^p X_j], w)$ ならば $\neg path(C -$

$E[X_p], \bigcup_{j=0}^{p-1} X_j, V_w)$. ■

定理 3.10 $C = (V, E)$ を任意の連結グラフとし, $vs(C) \leq k$ を満たしているとする. また, $\alpha = \langle X_j \rangle_{j=0}^p \in (2^{V,k})^*$ を C の任意の k -脂質とする. このとき, 次が成り立つ.

- (I) 次の 3 条件を満たす集合 $X_{p+1} \in 2^{V,k} \cup \{\emptyset\}$ が存在する.
- (i) 任意の $z \in X_{p+1}$ に対して,
 $\neg SIDE_k(C - E[\bigcup_{j=0}^p X_j], z)$
 - (ii) 任意の $w \in N_C(X_p)$ に対して,
 $SIDE_k(C - E[\bigcup_{j=0}^p X_j \cup X_{p+1}], w)$.
 - (iii) 任意の $z \in X_{p+1}$ に対して,
 $path(C - E[\bigcup_{j=0}^p X_j \cup X_{p+1}], N_C(X_p), N_C(z))$.
- (II) 上の条件 (i)~(iii) を満たす任意の集合 $X_{p+1} \in 2^{V,k} \cup \{\emptyset\}$ に対して, 集合列 $\beta = \langle X_0, \dots, X_p, X_{p+1} \rangle$ も k -脂質である.
- (III) $X_{p+1} = \emptyset$ が上記の条件 (i)~(iii) を満たしていたとする. このとき, 条件 (i)~(iii) を満たす集合は, $X_{p+1} = \emptyset$ だけである. またこのとき, α は k -脂肪組織である. ■

以上の命題 3.8 と定理 3.10 から, 頂点分離数が k 以下の任意の連結グラフ C に対して, k -脂肪組織の存在性が保証される. この事実を系として記しておこう.

系 3.11 C を任意の連結グラフとし, $vs(C) \leq k$ が成り立っていたとする. このとき, C の k -脂肪組織が存在する. ■

ある最適配置の先頭頂点が分かれば k -脂肪組織が計算できるわけだが, 先頭頂点を事前に知っておく必要はない. 単に, すべての頂点を列挙しながら, 各頂点から開始して, k -脂肪組織が求まったかどうかを検査していけばよい. 先に定義した, $REACH_k, NEXT_k, SIDE_k$ はこの方針に基づいて定義されている. 特に, $NEXT_k$ は, 定理 3.10 を背景に, k -脂質を拡張していく機能を実現している. 実際, $NEXT_k$ の定義の中で述べた条件 (N1)~(N3) が定理 3.10(I) で述べた条件 (i)~(iii) に酷似している点に着目されたい.

定理 3.12 $G = (V, E)$ を任意のグラフとし, $vs(G) \leq k$ が成り立っていたと仮定する. また, 集合列 $\alpha = \langle X_j \rangle_{j=0}^p \in (2^{V,k})^*$ を G の任意の k -脂質とする. このとき, 次が成り立つ.

- (I) $NEXT_k(G, X_{p-1}, X_p) = X_{p+1}$ を満たす集合 $X_{p+1} \in 2^{V,k} \cup \{\emptyset\}$ が存在する (つまり, $NEXT_k(G, X_{p-1}, X_p) = \perp$ となるようなことはない).
- (II) $NEXT_k(G, X_{p-1}, X_p) = X_{p+1}$ を満たす集合 $X_{p+1} \in 2^{V,k} \cup \{\emptyset\}$ に対して, 集合列 $\beta = \langle X_0, \dots, X_p, X_{p+1} \rangle$ も G の k -脂質である.
- (III) $NEXT_k(G, X_{p-1}, X_p) = \emptyset$ が成り立つとき, $NEXT_k(G, X_{p-1}, X_p) = X_{p+1}$ を満たす集合 $X_{p+1} \in 2^{V,k} \cup \{\emptyset\}$ は $X_{p+1} = \emptyset$ だけである. またこのとき, α は k -脂肪組織である. ■

系 3.13 $G = (V, E)$ を任意のグラフとし, $vs(G) \leq k$ が成

り立っていたと仮定する。また、 φ を G の任意の最適配置とし、 $\alpha = \langle X_j \rangle_{j=0}^p$ を $(2^{V,k})^*$ に属する任意の集合列とする。また更に、 α が次の条件を満たしていたと仮定する (ただし、 $X_{-1} = X_{m+1} = \emptyset$ とする)。

(R1) $X_0 = \{\varphi^{-1}(1)\}$.

(R2) 任意の $p(0 \leq p \leq m)$ に対して $\text{NEXT}_k(G, X_{p-1}, X_p) = X_{p+1} \neq \emptyset$.

このとき、この集合列は G の k -脂肪組織である。

さて、いよいよ $\text{Th}[k](b)$ の証明を行おう。

(Th[k](b) の証明) $\text{vs}(G) \leq k$ かつ S と T を結ぶ G 上の道が存在したと仮定する。また、 S のある頂点と T のある頂点を同時に含む G の連結成分を $C = (V_C, E_C)$ とおく。 $\text{vs}(C) < k$ のときには、 $\text{Th}[k-1](b)$ より、 $\text{REACH}_{k-1}(C, S, T)$ が成り立ち、更に、 $\text{Th}[k-1](c)$ より、 $\text{REACH}_{k-1}(G, S, T)$ が成り立つ。また更に、この場合には、 REACH_k の定義より、 $\text{REACH}_k(G, S, T)$ が成り立つ。そこで以下では、 $\text{vs}(C) = k$ であった場合について考えていく。

$\alpha = \langle X_j \rangle_{j=0}^m$ を C の任意の k -脂肪組織とすると、 S と T を結ぶ C 上の道が存在することから、 $C - E[\cup_{j=0}^m X_j]$ 内のある連結成分が S に属するある頂点を含み、更に、この連結成分はある X_p に隣接している。以下、この連結成分を D_p とおくことにしよう。同様に、 $C - E[\cup_{j=0}^m X_j]$ 内のある連結成分は T のある頂点を含み、かつ、ある X_q に隣接している。この連結成分を D_q とおくこととする。

このとき、 α に関する k -脂肪組織の条件 (1) より、 D_p と $N_G(X_p)$ に共通の頂点 w に対して、 $\text{SIDE}_k(C - E[\cup_{j=0}^m X_j], w)$ が成り立つ。これと補題 3.3(a) より、次が成り立つ。

(a) ある $p(0 \leq p \leq m)$ が存在して、

$$\text{REACH}_{k-1}(C - E[\cup_{j=0}^m X_j], S, N_G(X_p)).$$

同様に、次が成り立つことも示せる (詳細は読者に任せる)。

(b) ある $q(0 \leq q \leq m)$ が存在して、

$$\text{REACH}_{k-1}(C - E[\cup_{j=0}^m X_j], N_G(X_q), T).$$

以下、この (a) と (b) を $G - E[\cup_{j=p-1}^{p+1} X_j]$ に関する同値な条件に書き換える。

D_p が $\cup_{j=0}^m X_j$ に属する頂点を含んでいるときには、 D_p は X_p に属する頂点からなる孤立点である。従って、この場合、 D_p が $G - E[\cup_{j=p-1}^{p+1} X_j]$ 内の連結成分であることが分かる。一方、 D_p が $\cup_{j=0}^m X_j$ に属する頂点を全く含まないときには、 α に関する k -脂肪組織の条件 (3) より、 D_p は $C - E[\cup_{j=0}^m X_j]$ において、 $\cup_{j=0}^{p-2} X_j$ および $\cup_{j=p+2}^m X_j$ に隣接していないことが分かる。従って、この場合にも、 D_p は $C - E[\cup_{j=p-1}^{p+1} X_j]$ 内の連結成分であることが分かる。更に、 D_p が $G - E[\cup_{j=p-1}^{p+1} X_j]$ 内の連結成分であることは明らかであろう。以上と $\text{Th}[k-1](c)$ より、次の (R3) が成り立つ。

(R3) ある $p(0 \leq p \leq m)$ が存在して、

$$\text{REACH}_{k-1}(G - E[\cup_{j=p-1}^{p+1} X_j], S, N_G(X_p)).$$

同様の論法によって、次の (R4) が成り立つことを示せる (詳細は読者に任せる)。

(R4) ある $q(0 \leq q \leq m)$ が存在して、

$$\text{REACH}_{k-1}(G - E[\cup_{j=q-1}^{q+1} X_j], N_G(X_q), T).$$

以上の結論と系 3.13 より、 $\text{REACH}_k(G, S, T)$ の定義の中で述べた条件が成り立つことは容易に理解できることと思う。よって、 $\text{REACH}_k(G, S, T)$ が成り立つ。

定理 3.2 から次の系が直ちに得られる。

系 3.14 任意の非負整数 k 、任意のグラフ G 、任意の頂点部分集合 S, T に対して、 $\text{vs}(G) \leq k$ ならば次が成り立つ： $\text{REACH}_k(G, S, T)$ が成り立つときかつそのときに限り、 S と T の間に G 上の道が存在する。

非負整数 k と各頂点 v に関して、 $\text{SIDE}_k(G, v)$ を計算したとき、 $k \leq \text{vs}(G) + 1$ を満たすある k に関して $\text{SIDE}_k(G, v)$ が (すべての頂点に関して) 必ず成立する。このことは補題 3.3(c) によって保証される。更にこのとき、上の系より、 REACH_k を用いることによって、 G に関する到達可能性を正しく判定できることも分かる。これより、次の系が得られる。

系 3.15 任意のグラフ G に関する到達可能性を決定性 $O(\text{vs}(G)^2 \log_2 n)$ 領域で判定できる。ここで、 n は G の頂点数を表す。

最後に、有向グラフについても本節と同様の結果を示すことができることを述べておく。

定理 3.16 任意のグラフ G に関する到達可能性を決定性 $O(\text{vs}(G)^2 \log_2 n)$ 領域で判定できる。ここで、 n は G の頂点数を表す。

4 DLOG-困難性

本節では、入力グラフの構造をどのように制限したとしても (自明な場合を除いて)、無向グラフの到達可能性判定問題が決定性対数領域に対して「困難」であることを示す。

定義 L_1, L_2 を任意の判定問題とし、 D_1, D_2 を、各々、 L_1, L_2 の入力データ集合とする。このとき、 L_1 が L_2 に $\leq_m^{\text{NC}^1}$ -還元可能であるとは、 $O(\log_2 n)$ 段数の組み合わせ論回路族によって計算できる関数 $f: D_1 \rightarrow D_2$ が存在して、任意の入力データ $x \in D_1$ に対して、 $x \in L_1$ のときかつそのときに限り、 $f(x) \in L_2$ となることをいう。関数 f を L_1 から L_2 への $\leq_m^{\text{NC}^1}$ -還元関数という。

C を任意の (判定問題からなる) 計算量クラスとする。判定問題 L が C -困難であるとは、任意の判定問題 $X \in C$ に対して、 X が L に $\leq_m^{\text{NC}^1}$ -還元可能であるときをいう。また、 L が C -完全であるとは、 L が C -困難であり、かつ、 L が C に属するときをいう。

次に、グラフの構造を制限した場合の計算量を分析するための枠組みを与えよう。ある種の入力条件を設定した問題の計算量を分析する際に注意すべき点は、入力条件の計算量が判定条件の計算量に悪影響を与えないようにすることであ

る。入力条件の計算量が判定条件の計算量より明らかに小さい（正確には、入力条件の計算量が還元可能性の計算量以下になる）ときには、入力条件と判定条件の論理積で定義される判定問題の計算量を分析すればよい。しかしながら、入力条件の計算量が判定条件の計算量以上になるとき（正確には、判定条件が入力条件に還元可能であるとき）には、以下で定義する「約定問題（promise problem）」と呼ばれる枠組みを用いる。

定義 4.1 [GS88] 約定問題（promise problem）とは、判定条件 Q と入力条件 R の対 (Q, R) のことと定める（ここでは、 Q, R はともに適当な入力データ集合 D の部分集合として考えている）。入力データの部分集合 $S \subseteq D$ が約定問題 (Q, R) の解であるとは、

$$\{x \in S : x \in R\} = \{x \in D : x \in Q \wedge x \in R\}$$

が成り立つときをいう。

L を任意の判定問題とし、 D_L を L の入力データからなる集合とする。更に、 $P = (Q, R)$ を任意の約定問題とし、その入力データからなる集合を D_P で表す。このとき、 L が (Q, R) に $\leq_m^{NC^1}$ -還元可能であるとは、 $O(\log_2 n)$ 段数の組み合わせ論理回路族によって計算できる関数 $f : D_L \rightarrow D_P$ が存在して、次が成り立つときをいう。

- (1) 任意の $x \in D_L$ に対して、 $f(x) \in R$ 。
- (2) 任意の $x \in D_L$ に対して、 $x \in L \Leftrightarrow f(x) \in Q$ 。

C を任意の（判定問題からなる）計算量クラスとする。このとき、約定問題 $P = (Q, R)$ が C -困難であるとは、任意の判定問題 $X \in C$ が約定問題 P に $\leq_m^{NC^1}$ -還元可能であるときをいう。更に、約定問題 P が C -完全であるとは、 P が C -困難であり、かつ、 P のある解が C に属するときをいう。■

次の命題は上の定義から容易に得られる。

命題 4.2 約定問題 $P = (Q, R)$ が C -困難ならば、 $P = (Q, R)$ の任意の解は C -困難である。■

この命題から、 $P = (Q, R)$ の C -困難性には入力条件 R の計算量が全く影響を与えていないことが分かる。この点に関するより詳しい議論については [GS88, Tod90] を参照されたい。

約定問題の間の還元可能性も定義しておこう。

定義 4.3 $P_1 = (Q_1, R_1)$ と $P_2 = (Q_2, R_2)$ を任意の約定問題とする。また、 D_1 を P_1 の入力データ集合、 D_2 を P_2 の入力データ集合とする。このとき、 P_1 が P_2 に $\leq_m^{NC^1}$ -還元可能であるとは、 $O(\log_2 n)$ 段数の組み合わせ論理回路族によって計算できる関数 $f : D_1 \rightarrow D_2$ が存在して、次の2条件が成り立つときをいう。

- (1) 任意の $x \in D_1$ に対して、 $x \in R_1$ ならば $f(x) \in R_2$ 。
- (2) $x \in R_1$ に対して、 $x \in Q_1 \Leftrightarrow f(x) \in Q_2$ 。■

次の命題は上の定義から容易に得られるものである

命題 4.4 $P_1 = (Q_1, R_1)$ と $P_2 = (Q_2, R_2)$ を任意の約定問

題とし、 C を任意の計算量クラスとする。このとき、 P_1 が C -困難であり、かつ、 P_1 が P_2 に $\leq_m^{NC^1}$ -還元可能ならば、 P_2 も C -困難である。■

表記法 以下では、約定問題 (Q, R) を次のような形式で記述する。なお、固有名称を（特に必要としないときには）省略することがある。

名前 約定問題の固有名称。
 入力 入力データの記述。
 条件 入力条件 R に関する記述。
 質問 判定条件 Q に関する記述。■

これ以後、決定性対数領域で判定可能な判定問題のクラスを DLOG で表す。以下の命題は、決定性対数領域の定義から簡単に証明できる。

命題 4.5 次の約定問題は DLOG-困難である。

名前 DGAP[FOREST].
 入力 有向グラフ G 、 G の2頂点 s, t .
 条件 (i) G の各頂点の出次数は高々1である。(ii) s の入次数は0である。(iii) t の出次数は0である。
 質問 s から t への G 上の有向道が存在するか? ■

定理 4.6 次の約定問題は DLOG-完全である。

名前 UGAP[TwoPaths].
 入力 (無向) グラフ H 、 H の2頂点 s_H, t_H .
 条件 H は高々2本の単純道からなる。
 質問 s_H と t_H を結ぶ H 上の道が存在するか?

(略証) UGAP[TwoPaths] のある解が DLOG に属することは明らかなので、以下では、困難性を証明する。そこで、 $G = (V, E)$ と s, t を DGAP[FOREST] への任意の入力データとする。またこの入力データは UGAP[FOREST] の入力条件を満たしているものと仮定する。このとき、その入力条件より、 G が幾つかの根付き有向木からなり、更には、頂点 t はある根付き有向木の根になっていることに注意されたい。そこで、 T_1, T_2, \dots, T_m を G に含まれる根付き有向木を表すものとし、各 T_i の根を r_i で表すことにする。また更に、 $r_1 = t$ であると仮定する。このように仮定しても一般性を失うことはない。以下では、グラフ H を構成するために4段階の変換を行う。

まず、有向グラフ G から次で定義される有向グラフ $G_1 = (V_1, E_1)$ を構成する。以下では、頂点 u と v を結ぶ有向辺を (u, v) で表す。

- (1) $V_1 = V \cup \{r\}$ (ただし、 $r \notin V$)。
- (2) $E_1 = E \cup \{(r_i, r) : 2 \leq i \leq m\}$ 。

G_1 が二つの根付き有向木からなり、その一つの根が $t (= r_1)$ であり、もう一つの根が r であることは明らかであろう。また更に、 G 上に s から t への有向道が存在するときかつそのときに限り、 G_1 上に s から t への有向道が存在することも

明らかであろう。一方、この到達可能性に関する判定結果が、 G_1 の各辺から向きを取り去ってしまっても、保存されることも (s の入次数と t の出次数がともに0であることから) 明らかであろう。そこで、以下では、 G_1 の underlying graph を用いることにし、これを $G_2 = (V_2, E_2)$ で表す。

次に、 G_2 から新たな有向グラフ $G_3 = (V_3, E_3)$ を構成する必要があるのだが、このためにいくばくかの記法を定義する必要がある。まず、頂点 $v \in V_2$ の近傍を $N(v)$ で表すことにする。すなわち、 $N(v) = \{u \in V_2 : uv \in E_2\}$ と定義される。更に、各 $v \in V_2$ に対して、 $N(v)$ 内の頂点が適当に順序付けられているものと仮定する (もっと分かり易く言うと、 V_2 の頂点すべてに1番から $|V_2|$ 番までの番号が付いているものと考え、各 $N(v)$ の中でもこの番号の小さい順に順位が付いている、と考えればよい)。以下、 $N(v)$ の中の第 i 番目の頂点を $v^{(i)}$ で表す。

以上の記法を用いて、次で定義される有向グラフ $G_3 = (V_3, E_3)$ を G_2 から構成する (参考: 以下では、並列アルゴリズムの分野で「Eulerian Method」と呼ばれている手法を焼き直したものになっている)。

- (1) $V_3 = \{[uv]_v, [vu]_v : u, v \in V_2, uv \in E_2\}$.
- (2) $E_3 = \{([vu]_v, [uv]_u) : u, v \in V_2, uv \in E_2\}$
 $\cup \{([v^{(i)}]_v, [vv^{(i+1)}]_v) : v \in V, 1 \leq i < |N(v)|\}$
 $\cup \{([v^{(|N(v)|)}]_v, [vv^{(1)}]_v)\}$.

この有向グラフの各頂点の入次数と出次数はともに1である。従って、 G_3 の各連結成分は単純な有向閉路になっていることが分かる。更には、もともと G_2 が二つの木から構成されていたために、 G_3 は二つの有向閉路からなる有向グラフになっている。更にまた、 $t (= r_1)$ を変形して作った各頂点 (つまり、 $[ut]_t$ や $[tu]_t$)と r を変形して作った各頂点は別々の有向閉路に属していることも明らかであろう。

最後に、 G_3 から有向辺

$$([t^{(|N(t)|)}]_t, [tt^{(1)}]_t) \text{ と } ([r^{(|N(r)|)}]_r, [rr^{(1)}]_r)$$

を削除し、各辺の向きを除去したもの (すなわち、underlying graph) を H とおく。更に、 $s_H = [ss^{(1)}]_s$ および $t_H = [t^{(|N(t)|)}]_t$ と定める。

このとき、 H がちょうど二つの道からなるグラフであることは容易に理解されよう。また、 G 上に s から t への有向道が存在するときかつそのときに限り、 H 上にも s_H と t_H を結ぶ道が存在することも容易に理解できると思う。 ■

定義 4.7 任意の非負整数 n, m に対して、長さ n の単純道と長さ n の単純道だけからなるグラフを $H_{n,m}$ で表す。また更に、 $H_{n,m}$ すべてからなるグラフのクラスを $\mathcal{G}_{\text{TwoPaths}}$ で表す。 ■

次の系は上の定理から直ちに得られる。

系 4.8 \mathcal{G} を $\mathcal{G}_{\text{TwoPaths}}$ を包含する任意のグラフのクラスとする。このとき、次の約定問題は DLOG-困難である。

名前 UGAP[\mathcal{G}].

入力 (無向) グラフ H , H の 2 頂点 s_H, t_H .
 条件 $H \in \mathcal{G}$.

質問 s_H と t_H を結ぶ H 上の道が存在するか? ■

更に、次のような定理も示すことができる。

定理 4.9 次の約定問題は DLOG-完全である。

名前 DGAP[OnePath].

入力 有向グラフ H , H の 2 頂点 s_H, t_H .

条件 H の基礎グラフ \hat{H} は 1 本の単純道からなる。

質問 s_H と t_H を結ぶ H 上の有向道が存在するか?

名前 ListRanking.

入力 有向グラフ H , H の 2 頂点 s, v , 非負整数 r .

条件 H は 1 本の有向道からなる。

質問 s から v への H 上の距離は r 以下か? ■

謝辞

渡辺治氏 (東京工業大学) および陳致中氏 (東京電機大学) から、有益な助言を頂いたり、誤りなどを指摘して頂きました。ここで、これらお二人の方々に深く感謝致します。

参考文献

- [AKL79] R. Alileiunas, R. Karp, R. Lipton, L. Lovasz and C. Rackoff: Random walks, universal sequences and the complexity of maze problems, FOCS, 1979.
- [ATW97] R. Armoni, A. Ta-Shma, A. Wigderson and S. Shou: $SL \subseteq L^{4/3}$, STOC, 1997.
- [GS88] J. Grollman and A. L. Selman: Complexity measures for public-key cryptosystems, SIAM J. on Comput., bf 17, 1988.
- [Nis92] N. Nisan: $RL \subseteq SC$, STOC, 1992.
- [NSW92] N. Nisan, E. Szemerédi and A. Wigderson: Undirected connectivity in $O(\log^{1.5} n)$ space, FOCS, 1992.
- [Kin92] N. G. Kinnersley: The vertex separation number of a graph equals its path-width, IPL, 42, 1992.
- [Sav70] W. J. Savitch: Relationships between nondeterministic and deterministic space complexities, JCSS, 4, 1970.
- [Tod90] S. Toda: On the complexity of topological sorting, IPL, 35(8), 1990.

$G = (V, E)$ を任意のグラフ, S と T を V の任意の部分集合, k を任意の非負整数とする. このとき, $\text{REACH}_k(G, S, T)$ で表される述語を帰納的に次で定める.

- (I) $\text{REACH}_0(G, S, T) \Leftrightarrow S \cap T \neq \emptyset$.
 (II) 任意の $k \geq 1$ に対して: $\text{REACH}_k(G, S, T)$

\Downarrow

$\text{REACH}_{k-1}(G, S, T)$ が成り立つか, もしくは, 頂点 $u \in V$ と集合 $X_0, X_1, \dots, X_m \in 2^{V,k}$ が存在して, 次に示す (R1) から (R4) のすべての条件が成立する (なお, $X_{-1} = X_{m+1} = \emptyset$ とする):

- (R1) $X_0 = \{u\}$.
 (R2) 任意の $p(0 \leq p \leq m)$ に対して, $\text{NEXT}_k(G, X_{p-1}, X_p) = X_{p+1}$.
 (R3) ある $p(0 \leq p \leq m)$ が存在して,
 $\text{REACH}_{k-1}(G - E[X_{p-1} \cup X_p \cup X_{p+1}], S, N_G(X_p))$.
 (R4) ある $q(0 \leq q \leq m)$ が存在して,
 $\text{REACH}_{k-1}(G - E[X_{q-1} \cup X_q \cup X_{q+1}], N_G(X_q), T)$.

図 1(a) REACH_k の定義.

$G = (V, E)$ を任意のグラフとする. NEXT_k を定義するに当たり, 以下の 2 条件を満たす $2^{V,k} \cup \{\emptyset\}$ 上の適当な線形順序を仮定する.

- グラフ G と任意の $X, Y \in 2^{V,k} \cup \{\emptyset\}$ が入力として与えられたとき, X と Y の間の順序関係を決定性 $O(\log_2 |V|)$ 領域で判定できる.

このような線形順序の存在性を示すことは容易である.

さて, NEXT_k ($k \geq 1$) を定義しよう. 任意の $X, Y \subseteq V$ に対して, 以下の (N1) から (N3) を満たす集合 $Z \in 2^{V,k} \cup \{\emptyset\}$ の中で, 上で述べた線型順序の意味で最も小さなものを $\text{NEXT}_k(G, X, Y)$ と定める.

- (N1) 任意の $z \in Z$ に対して, $\neg \text{SIDE}_k(G - E[X \cup Y], z)$.
 (N2) 任意の $w \in N_G(Y)$ に対して, $\text{SIDE}_k(G - E[X \cup Y \cup Z], w)$.
 (N3) 任意の $z \in Z$ に対して, $\text{REACH}_{k-1}(G - E[X \cup Y \cup Z], N_G(Y), N_G(z))$.
 なお, 上のような $Z \in 2^{V,k} \cup \{\emptyset\}$ が存在しないときには, $\text{NEXT}_k(G, X, Y) = \perp$ と定める.

図 1(b) NEXT_k の定義.

任意の頂点 $w \in V$ に対して: $\text{SIDE}_k(G, w)$ ($k \geq 1$)

\Downarrow

- (S1) 任意の $v \in V$ に対して, $\text{REACH}_{k-1}(G, w, N_G(v)) \Rightarrow \text{REACH}_{k-1}(G, w, v)$, かつ
 (S2) 任意の $u, v \in V$ に対して,
 $\text{REACH}_{k-1}(G, w, u)$ かつ $\text{REACH}_{k-1}(G, w, v) \Rightarrow \text{REACH}_{k-1}(G, u, v)$.

図 1(c) SIDE_k の定義.