数理解析研究所講究録
1041 巻 1998 年 9-11

n-cube 上の交差 antichain の個数の評価について

宮川正弘 (Masahiro Miyakawa)
筑波技術短期大学 mamiyaka@k.tsukuba-tech.ac.jp

要旨

7-cube 上の antichain の個数を求める問題は次数を還元する手法を使った数え上げにより解かれた (1965). 部分集合である交差 antichain の個数を求める未解決問題は、計算量的には解けると思われる. 同手法を吟味し, n-cube 上の交差 antichain の個数の上界と下界を還元的に評価する式と, 数え上げの問題点を示す.

1 はじめに

n-cube 上の antichain の数え上げ (Dedekind 問題) は, $n=6$ までは困難なく出来る. $n=7$ のときには backtrack プログラムによる手法では計算時間がかかりすぎて無理であり, 次数を還元する別法による. 交差 antichain の個数を求める問題は $n=7$ の場合については未解決である. n-cube 上の交差 antichain の個数は, n-変数単調交差 Boole 関数 (単調関数と交差関数の共通部分) の個数に等しい. また, この数は (一つ上の次元) 8 変数交差 Boole 関数の個数と関係している [MNPR97].

2 定義

$E=\{0,1\}$ とし n を正の整数とする. 集合 E^n は n 次元立方体といわれる. $\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n)\in E^n$ と $\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_n)\in E^n$ について, 全ての i, $1\leq i\leq n$ について $a_i\leq b_i$ が成立するとき $\boldsymbol{a}\preceq\boldsymbol{b}$ と書く. 任意の $\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}'\in A$ について $\boldsymbol{a}\prec\boldsymbol{a}'$ が成り立たないとき 集合 $A\subseteq E^n$ は *antichain* (反鎖) である呼ばれる. ある $1\leq i\leq n$ について $a_i=b_i=1$ となるとき, 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n)\in E^n$ と $\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_n)\in E^n$ は (i 軸で) 交差している (*intersecting*) と呼ばれる. 任意の対 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in A$ が交差しているとき集合 $A\subset E^n$ を交差していると呼ぶ.

n 変数 Boole 関数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ (写像 $f:\ E^n\ \to E$) は,

$$\boldsymbol{x}\preceq\boldsymbol{y}\ \text{ならば}\ f(\boldsymbol{x})\preceq f(\boldsymbol{y})$$

が成り立つとき単調と呼ばれる. また, 性質

$$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{y})=1\ \text{ならば}\ \boldsymbol{x}\ \text{と}\ \boldsymbol{y}\ \text{は交差する}$$

が成り立つとき, 関数 $f(\boldsymbol{x})$ は交差関数 (別名 clique 関数) と呼ばれる. n 変数の単調関数と交差関数, 単調交差関数をそれぞれ $M(n)$, $N(n)$, $MN(n):=M(n)\cap N(n)$ で表す. n-cube 上の antichain, 交差集合, 交差する antichan の個数は, それぞれ, $|M(n)|,|N(n)|,|MN(n)|$ に一致する.

2 つの Boole 関数 f と g について

$$\text{任意の}\ \boldsymbol{x}\ \text{に対して}\ f(\boldsymbol{x})\preceq g(\boldsymbol{x})$$

が成り立つとき, $f\leq g$ と書く.

3 単調関数 についての次数の還元法

単調関数を 1 つ次数の低い 2 つの単調関数の 2 段結合に分解する次の定理は, 集合 $M(n-1)^2$ のある部分集合から 集合 $M(n)$ の上への 1 対 1 全写を定め, 数え上げを 1 つ低い次数に還元する.

Theorem 1.(cf. [CzMo68]) *n 変数の任意の単調関数 $f(\boldsymbol{x})\in M(n)$ は式 (2) を満たす 2 つの $n-1$ 変数単調関数 g,h により, 一意に*

$$f(x_1,\ldots,x_n)=g(x_1,\ldots,x_{n-1})\wedge x_n\vee h(x_1,\ldots,x_{n-1}). \tag{1}$$

の形に表される．ここに

$$
\begin{aligned}
g(x_1,\ldots,x_{n-1}) &\geq h(x_1,\ldots,x_{n-1}). & (2)\\
g(x_1,\ldots,x_{n-1}) &= f(x_1,\ldots,x_{n-1},1), & (3)\\
h(x_1,\ldots,x_{n-1}) &= f(x_1,\ldots,x_{n-1},0). & (4)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．□

これにより，次の還元式が成り立つ，

$$|M(n)| = |\{<g,h>:\ g \geq h,\ g,h \in M(n-1)\}|. \quad (5)$$

文献 [BBK75] ではこの式を 2 度使って $|M(5)|$ より $|M(7)|$ を求め，[Chur65] の結果を確認している．

4　次数の還元法をによる 交差 antichain の個数の下界および上界の評価

単調交差関数 に対しては、定理 1 で成立した，次数の 1 つ低いそれへの還元の性質がそのままでは成り立たない．しかし、次ぎに示す 3 つの補題により数え上げの手間を減少できる．さらに式 (1) の還元の手法を修正して，$|MN(n)|$ に対する上界と下界を数え上げ的に求めることが出来る．

Lemma 2. 関数 f が *2* つの関数 u と h により

$$f = u \vee h \quad (6)$$

と書けるとき、関数 f が MN に属するならば、関数 u と h 　は共に MN に属しなければならない．

Proof. u か h が N に属さないとする．対称性から u が属さないとしてよい．すると，交差していない $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ に対して $u(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{y}) = 1$ が成り立つ．このとき，式 (6) から $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y}) = 1$ となり、f は Nに属さない。□

次の補題は Nの定義より明らかである．

Lemma 3.

$$u(\boldsymbol{x}) := g(\boldsymbol{x}) \wedge x_n \quad (7)$$

と置くとき，任意の $g(\boldsymbol{x})$ に対して $u(\boldsymbol{x}) \in N$ となる．□

Lemma 4.

$$h(x_1,\ldots,x_{n-1}) := f(x_1,\ldots,x_{n-1},0)$$

と置くとき，任意の $f(\boldsymbol{x}) \in N$ に対して $h(x_1,\ldots,x_{n-1})$ は N に属する．

Proof. 定数関数 $0 \in N$，また $f \in$ であり，N が関数の合成について閉じているから，$h \in N$ が成り立つ．□

Proposition 5. 任意の $f \in MN$ はある $g \in M(n-1)$ と $h \in MN(n-1)$ により式 *(1)* の形に一意に表現される．

Proof. 補題 3,4 と式 (1) による．一意性は式 (3),(4) による．□

これにより，明らかに次の不等式（上界）が成り立つ．

$$|MN(n)| \leq |\{<g,h>:\ g \geq h,\ g \in M(n-1),\ h \in MN(n-1)\}|. \quad (8)$$

Proposition 6. 式 *(1)* において、g と h が共に MN に属するならば f も MN に属する．

Proof. $h \notin N$ と仮定すれば，交差しないある$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ について，$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y}) = 1$ が成り立つ．すなわち

$$g(x') \wedge x_n \ \vee h(x') = 1, \tag{9}$$

$$g(y') \wedge y_n \ \vee h(y') = 1. \tag{10}$$

ここに $x' = x_1, \ldots, x_{n-1}$, $y' = y_1, \ldots, y_{n-1}$とし，$x'$ と y' も交差しないことに注意する．

(1) $x_n = y_n = 0$ のとき．式 (9),(10) から $h(x') = h(y') = 1$ であるが，これは $h \in N$ に反する．

(2) $x_n = 0$, $y_n = 1$ のとき．式 (9) から $h(x') = 1$ である．このとき 式 (2) より $g(x') = 1$ である．式 (10) から，$g(y') \vee h(y') = 1$，よって同じく $g(y') = 1$ であるが，これは $g \in N$ に反する．

(3) $x_n = 1$, $y_n = 0$ のとき．式 (9) より $g(x') = 1$．式 (10) より，$h(y') = 1$．同じく (2) より $g(y') = 1$．これは $g \in N$ に反する．□

これにより，明らかに次の不等式（下界）が成り立つ．

$$|\{< g, h > : \ g \geq h, \ g, h \in MN(n-1)\}| \leq |MN(n)|. \tag{11}$$

本方法による数え上げの問題点を述べる．式 (8) に基づいて $MN(n)$ を数え上げるとすれば，(1) 実際に関数を生成し，(2) $f \in N$を判定する，の 2 つの作業が必要となる．作業 (2) のためには，関数の単調性の判定と同程度の大きな手間を要する．現在の計算機の性能ではこの実行は困難と思われる．

例えば，$n = 4$ のとき，全ての単調関数の個数は 168 であるが，式 (8) の右辺による数え上げでは，このうち 142 の関数（上界値）が 数え上げられる．このうちで式 (11) の左辺に該当する 54 個（下界値）は bottom-up の性質から N に属すると容易に認識できる．残りの 88 (=142-54) 個については N に属するか否かを各関数について調べなければならない．このように必要条件による候補の絞り込みがそれほど有効でないことが判る．

次数還元の写像が全射となる原像を定めること，すなわち f が N を動くとき，式 (3) で定まる g の範囲（$\supset N$）を定めることが課題である．

表 1 に数え上げの数値データを示す [PMNR97].

表 1: n-cube 上の antichain と交差 antcichanin の個数

n	1	2	3	4	5	6	7
$\|M(n)\|$	3	6	20	168	7,581	7,828,354	2,414,682,040,998
$\|MN(n)\|$	2	4	12	81	2,646	1,422,564	求める数

文献を教えていただいた、巽久之氏、荒木智行氏（神奈川工科大学）に感謝します．

参考文献

[Chur40] Church R., "Numerical analysis of certain free distributive structure," Duke Math. J., 6 (1940),732-734.

[Chur65] Church R., "Enumeraion by rank of the elements of the free distributive lattice with seven generators", MR 65T-447, p.724, 1965.

[CzMo68] Czyżo E., Mostowski A. W., "An algorithm for generating free distributive lattices," Bull. Acad. Pol. Sci., ser. math., astr., et phys., XVI,7 (1968), 593-595.

[BBK75] Berman J., Burger A.J. and Kohler P., "The free distributive lattice on seven generators," MR 75T-A242, p.A622, 1975.

[BK76] Berman J. and Köhler P., "The free distributive lattice on seven generators," Mathem. Seminar Giessen, Heft 121, 103-124, 1976.

[PMNR97] Pogosyan G., Miyakawa M., Nozaki A. and Rosenberg I.G., "The number of clique Boolean functions," IEICE Trans. Fundamentals, E80-A, 8, 1502-1507, Auguts 1997.

[MNPR97] Miyakawa M., Nozaki A., Pogosyan G. and Rosenberg I.G., "A map from the lower-half of the n-cube onto the $(n-1)$-cube which preserves intersecting antichains," 計算理論とその応用（数理解析研究所講究 992, pp.1-4, 1997.