数理解析研究所講究録
1042 巻 1998 年 147-155

Quadratic Correspondences の力学系に関する Shaun Bullett の仕事の解説（入門編）

大阪市立大学　理学研究科　中井　武 (Takeshi Nakai)

平成 9 年 12 月 15 日

概要

関数の拡張として、多価関数がある。このノートは特殊な２価の関数による力学系についての Shaun Bullett の仕事を紹介するための入門編である。quadratic correspondence の定義は２次関数及びその逆関数を内包しているが (1.4 例)、ここでは forward image も preimage も２価になるような 2:2-correspondence を扱う。以下、Shaun Bullett の論文 “Dynamics of quadratic correspondences” (Nonlinearity 1 (1988) 27-50), “Mating quadratic maps with the modular group” (*Inventiones mathematicae* 115 (1994) 483-511) にしたがって quadratic correspondences の定義及び基本性質を解説する。

1 Introduction

1.1 Quadratic Corrspondence の定義

z, w の両方について１次か２次の多項式

$$\begin{aligned} g(z,w) &= (Az^2+Bz+C)w^2+(Dz^2+Ez+F)w+(Gz^2+Hz+J) \\ &= (z^2 \quad z \quad 1)\begin{pmatrix} A & D & G \\ B & E & H \\ C & F & J \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w^2 \\ w \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(A,B,C,D,E,F,G,H,J \in \mathbf{C})$$

で、(z^2+az+b) や (w^2+aw+b) や $(z+c)$ や $(w+c)$ （a,b,c は定数）のような z のみあるいは w のみの多項式を因数にもたないものを考える。¶ このような $g(z,w)$ に関して, z を $z=z_1$ と固定し $g(z_1,w)=0$ を w について解くと、２つ（$A=B=C=0$ のときは１つ）の $w=w_1,w_2$ が得られる。z_1 にたいしてこれら２つの w_1,w_2 を対応させると決めると、$\widehat{\mathbf{C}}(:=\mathbf{C}\cup\{\infty\})$ から $\widehat{\mathbf{C}}$ への２価 ($A=B=C=0$ のときは１価) の写像が決まる。

$$z_1 \begin{array}{l} \nearrow w_1 \\ \searrow w_2 \end{array}$$

このような対応を $g(z,w)=0$ により定義される quadratic correspondence といい、$f: z \mapsto w$ で表わすことにする；

$$f(z) := \{w \in \widehat{\mathbf{C}} \mid g(z,w)=0\}。$$

¶ たとえば、$g(z,w)$ が因数 $(z+c)$ をもつとすると、$z_1=-c$ に対し任意の $w \in \widehat{C}$ が対応することになるので、このようなものは扱わないことにする。

逆に、$f^{-1}(w) := \{z \in \hat{\mathbf{C}} \mid g(z,w) = 0\}$ とすれば、$f^{-1} : w \mapsto z$ も quadratic correspondence である；

$$f(z) \ni w \Leftrightarrow g(z,w) = 0 \Leftrightarrow z \in f^{-1}(w)。$$

$f(z)$ を z の $g(z,w) = 0$ による像 (forward image) 、$f^{-1}(z)$ を z の $g(z,w) = 0$ による逆像 (preimage, backward image) という。

注意 1　一般に（$A = B = C = 0$ でなければ）$f \circ f^{-1} \neq id$ である（map との違いに注意；図 1 参照)。

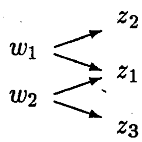


図 1: $f \circ f^{-1}(z_1)$

注意 2　（∞ の扱いについて）

$f(\infty) \ni w_0$ ($\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} \infty \in f^{-1}(w_0)$) であることを、「$g(1/z', w) = 0$ の分母を払って新たにそれを $g'(z', w) = 0$ と書き直したとき、$g'(0, w_0) = 0$ となる」で定義する。

同様に、$f(z_0) \ni \infty$ ($\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} z_0 \in f^{-1}(\infty)$) であることを、「$g(z, 1/w') = 0$ の分母を払って新たにそれを $g'(z, w') = 0$ と書き直したとき、$g'(z_0, 0) = 0$ となる」で定義する。

1.2　力学系としての同値関係

quadratic correspondence $g_2(z,w) = 0$ が $g_1(z,w) = 0$ と同値であることを、「ある $M \in PSL(2, \mathbf{C})$ が存在して、$g_1(z,w) = 0$ ならば $g_2(Mz, Mw) = 0$ となる」すなわち、「g_1 と g_2 は Möbius 変換で移り合う」で定義する。

1.3　grand orbits

$S \subset \hat{\mathbf{C}}$ としたとき、$f(S) := \{w \in \hat{\mathbf{C}} \mid \exists z \in S \text{ s.t. } g(z,w) = 0\}$ とする。quadratic correspondence f に関する z の grand orbit $GO(z; f)$ を次のように帰納的に定義する；

$$GO(z; f) := \bigcup_{n \geq 0} O_n; \quad \text{ただし } O_0 := \{z\},\ O_{n+1} := f(O_n) \cup f^{-1}(O_n)。$$

1.4　例

(i) $\hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$ の双正則写像を quadratic correspondence で表現すると

$$g(z,w) = czw + dw - az - b$$

となる。実際、f を $\hat{\mathbf{C}}$ から $\hat{\mathbf{C}}$ への双正則写像とすると、f は Möbius 変換だから、$f : z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d} = w$ とおいて分母を払うと $czw + dw - az - b = 0$ となる ($g(z,w) = (czw + dw - az - b)^2$ とも書ける)。

(ii) 2 次関数 $z \mapsto z^2 + c$ は　$g(z,w) = w - (z^2 + c)$　で与えられる。

(iii) (ii) の逆関数は　$g(z,w) = z - (w^2 + c)$　で与えられる。

(iv) $g(z,w) = (w - (z+1))(w(z+1) + 1)$ の grand orbit $GO(z, f)$ は z の $PSL(2, \mathbf{Z})$ による orbit になる。

1.5 2:2-correspondences

quadratic correspondence のうち、$g(z,w)$ が z と w の両方について２次式であるものを 2:2-correspondence ということにする。

注意 3 2:2-correspondence

$$g(z,w) = (Az^2 + Bz + C)w^2 + (Dz^2 + Ez + F)w + (Gz^2 + Hz + J) = 0$$

において、$w_1 = w_2$ （重解）となる z は

$$(Dz^2 + Ez + F)^2 - 4(Az^2 + Bz + C)(Gz^2 + Hz + J) = 0 \tag{1}$$

の解である。この (1) 式の解となる z を f の singular point と呼び、その集合 $\{z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid \#f(z) = 1\}$ を $\mathcal{S}(f)$ で表す。$\#\mathcal{S} \leq 4$ である。

1.6 quadratic correspondences のグラフからの観点

(z,w) が $g(z,w) = 0$ で定義される quadratic correspondence f のグラフ

$$\Gamma(f) := \{(z,w) \in \widehat{\mathbb{C}} \times \widehat{\mathbb{C}} \mid g(z,w) = 0\}$$

上の点であることと、$f : z \mapsto w$ であることは同値である。

ここで、代数曲線としての $\Gamma(f)$ の形状は $\mathcal{S}(f)$ により、次の３つに分類される。

(i) (1) が異なる４つの解を持つとき、$\Gamma(f)$ はトーラスである。

(ii) (1) が１つの２重解と２つの異なる解を持つとき、$\Gamma(f)$ は１点で自己交差する球面になる。また、１つの３重解と１つの他の解をもつときも $\Gamma(f)$ は特異点を１つもつ球面になる。

(iii) (1) が２つの２重解を持つとき、$\Gamma(f)$ は２点を共有する２つの球面になる。また、１つの４重解をもつときは、$\Gamma(f)$ は１点を共有する２つの球面になる。

射影 $\pi_1 : \Gamma(f) \to \widehat{\mathbb{C}}, \pi_2 : \Gamma(f) \to \widehat{\mathbb{C}}$ を $\pi_1(z,w) = w,\ \pi_2(z,w) = z$ （違和感が感じられるが、S.Bullett に従い、「π_1 は第１成分を忘れる」、「π_2 は第２成分を忘れる」と覚える）として、I_1, I_2 を π_1, π_2 の covering involution とする。すなわち、$f^{-1}(w) = \{z_1, z_2\},\ f(z) = \{w_1, w_2\}$ とすると、

$$\begin{tikzcd}
(z_1,w) \arrow[rr, leftrightarrow, "I_1"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & (z_2,w) \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& w &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(z,w_1) \arrow[rr, leftrightarrow, "I_2"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & & (z,w_2) \arrow[dl, "\pi_2"] \\
& z &
\end{tikzcd}$$

図 2: グラフからの射影と covering involution

である。$\pi_1,\ \pi_2$ を用いると、$f,\ f^{-1}$ は $f = \pi_1 \circ \pi_2^{-1},\ f^{-1} = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ と表現できる。

2 Maps of Pairs

2.1 定義

2:2-correspondence $f : \widehat{\mathbf{C}} \ni z \mapsto w \in \widehat{\mathbf{C}}$ が map of pairs であることを、「任意の $z_1 \in \widehat{\mathbf{C}}$ にたいして $f(z_1) = \{w_1, w_2\}$, $f^{-1}(w_1) = \{z_1, z_2\}$, $f^{-1}(w_2) = \{z_1, z_3\}$ としたとき、$z_3 = z_2$ となる」で定義する。(右下の図式を $f : \{z_1, z_2\} \mapsto \{w_1, w_2\}$ で表わすことにする。)

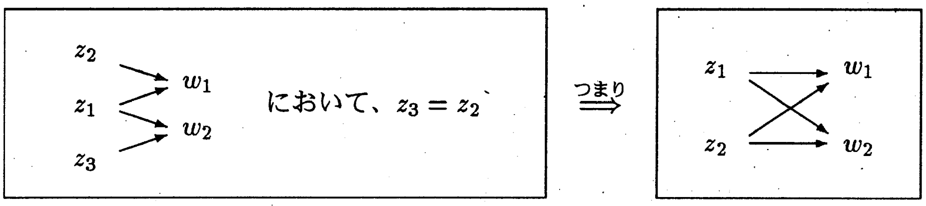


図 3: map of pairs

注意 4 f を 2:2-correspondence とすると $f : z \mapsto w$ が map of pairs であることと $f^{-1} : w \mapsto z$ が map of pairs であることは同値である。

(証明) ($\Rightarrow$) 任意の $w_1 \in \widehat{\mathbf{C}}$ にたいし、$f^{-1}(w_1) = \{z_1, z_2\}$, $f(z_1) = \{w_1, w_2\}$, $f^{-1}(w_2) = \{z_1, z_3\}$ とすると f が map of pairs であることから、$z_2 = z_3$ である。よって $f(z_2) = \{w_1, w_3\}$ とすると $w_3 = w_2$ 。ゆえに、f^{-1} は map of pairs である。

($\Leftarrow$) ($\Rightarrow$) と同様の方法で示すことができる。

【命題】 方程式 $g(z, w) = (Az^2 + Bz + C)w^2 + (Dz^2 + Ez + F)w + (Gz^2 + Hz + J) = 0$ で定義される 2:2-correspondence $f : z \mapsto w$: に対して、次の (1) ~ (4) は同値である。

(1) f は map of pairs である。

(2) $\begin{vmatrix} A & D & G \\ B & E & H \\ C & F & J \end{vmatrix} = 0$ である。

(3) ある 2 次有理式 p, q があって、$g(z, w) = 0$ は $p(z) = q(w)$ と変数分離できる。

(4) グラフ $\Gamma(f)$ の covering involution I_1, I_2 は可換である。すなわち、$I_1 I_2 = I_2 I_1$ である。

(証明) ((1) $\Longrightarrow$ (2)) map of pairs $f : \{z_1, z_2\} \mapsto \{w_1, w_2\}$ において、写像 $\Psi : w_1 \mapsto w_2$ は双正則な involution だから、Ψ はつぎの (i),(ii) のいずれかである。

(i) $\Psi(w) = \dfrac{(a+b)w - 2ab}{2w - (a+b)}$ ($\infty \notin Fix(\Psi) = \{a, b\}$ のとき)。

(ii) $\Psi(w) = 2c - w$ ($Fix(\Psi) = \{\infty, c\}$ のとき)。

(i) のとき、$w_2 = \dfrac{(a+b)w_1 - 2ab}{2w_1 - (a+b)}$ より、$w_1 w_2 = \dfrac{a+b}{2}(w_1 + w_2) - ab$ ($*$)。解と係数の関係より

$$w_1 w_2 = \frac{Gz_1^2 + Hz_1 + J}{Az_1^2 + Bz_1 + C}, \quad w_1 + w_2 = -\frac{Dz_1^2 + Ez_1 + F}{Az_1^2 + Bz_1 + C}。$$

これらを上の ($*$) に代入して整理すると、

$$(Gz_1^2 + Hz_1 + J) = -\frac{a+b}{2}(Dz_1^2 + Ez_1 + F) - ab(Az_1^2 + Bz_1 + C)$$

これが任意の $z_1 \in \mathbf{C}\backslash\{z \in \mathbf{C} \mid (Az^2+Bz+C)=0\}$ で成立するから、ベクトル $(G\ H\ J),(D\ E\ F),(A\ B\ C)$ は $\mathbf{C}$ 上 1 次従属である。よって題意は成立する。(ii) のとき、(i) と同様の方法で示せる。

((2) $\Longrightarrow$ (3)) 仮定 (2) より、ある $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$ が存在して

$$\alpha(A\ B\ C)+\beta(D\ E\ F)+\gamma(G\ H\ J)=(0\ 0\ 0)。$$

$\gamma \neq 0$ のとき、$(G\ H\ J)=-\left(\frac{\alpha}{\gamma}(A\ B\ C)+\frac{\beta}{\gamma}(D\ E\ F)\right)$ 、すなわち任意の $z \in \mathbf{C}$ にたいし、

$$(Gz^2+Hz+J)=-\left(\frac{\alpha}{\gamma}(Az^2+Bz+C)+\frac{\beta}{\gamma}(Dz^2+Ez+F)\right)。$$

これを $g(z,w)=0$ に代入すれば、$(Az^2+Bz+C)(w^2-\frac{\alpha}{\gamma})+(Dz^2+Ez+F)(w-\frac{\beta}{\gamma})=0$。

$$\therefore \quad -\frac{w^2-\alpha/\gamma}{w-\beta/\gamma}=\frac{Dz^2+Ez+F}{Az^2+Bz+C}$$

ゆえに題意は成立する。$\gamma=0,\beta\neq 0$ のときも上と同様の方法で変数分離できる。
$\gamma=0,\beta=0$ のとき、$(A\ B\ C)=(0\ 0\ 0)$ 。このとき $f: z \mapsto w$ が 1 価となり f が 2:2-correspondence であることに矛盾する。

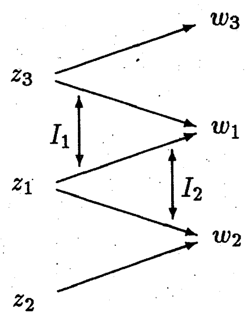
((3) $\Longrightarrow$ (4)) p,q は 2 次有理式だから $\widehat{\mathbf{C}} \to \widehat{\mathbf{C}}$ の double covering になっている。これらの covering involution をそれぞれ Φ,Ψ として、$p(z)=q(w)$ すなわち $(z,w)\in\Gamma(f)$ とすると、

$$I_1(z,w)=(\Phi(z),w),\quad I_2(z,w)=(z,\Psi(w))$$

ゆえに、$I_1I_2(z,w)=I_1(z,\Psi(w))=(\Phi(z),\Psi(w))=I_2(\Phi(z),w)=I_2I_1(z,w)$。

（**注意** p の critical point の集合は Φ の固定点の集合と等しい。また、q の critical point の集合は Ψ の固定点の集合と等しい。）

((4) $\Longrightarrow$ (1))
$f(z_1)=\{w_1,w_2\}$, $f^{-1}(\{w_1,w_2\})=\{z_1,z_2,z_3\}$, $f(z_3)=\{w_1,w_3\}$ とする。$(z_1,w_1)\in\Gamma(f)$ にたいして $I_1I_2=I_2I_1$ を適用して



$$\begin{array}{l} I_1I_2(z_1,w_1)=I_1(z_1,w_2)=(z_2,w_2) \\ \quad \| \\ I_2I_1(z_1,w_1)=I_2(z_3,w_1)=(z_3,w_3) \end{array}$$

したがって $z_2=z_3,\ w_2=w_3$。ゆえに f は map of pairs である。 ∎

3 Maps of Triples

3.1 定義

2:2-correspondence $f : z \mapsto w$ のうち次の図式を満足するものを map of triples と呼ぶ。

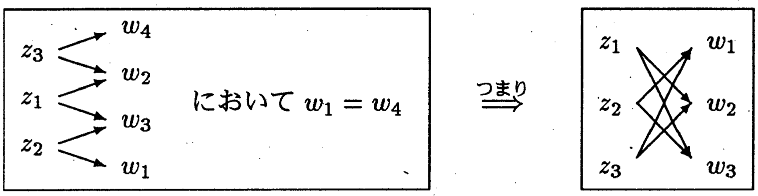


図 4: map of triples

すなわち、map of triples f は任意の $z_1 \in \hat{\mathbf{C}}$ にたいし $f(z_1) = \{w_2, w_3\}$, $f^{-1}(w_2) = \{z_1, z_3\}$, $f^{-1}(w_3) = \{z_1, z_2\}$, $f(z_2) = \{w_3, w_1\}$, $f(z_3) = \{w_2, w_4\}$ とすると、$w_1 = w_4$ となる 2:2-correspondence である。

【命題】 f を 2:2-correspondence とし、I_1, I_2 を小節 1.6 のように定義する。このとき f が map of triples であることと、$I_1 I_2 I_1 = I_2 I_1 I_2$ であることは同値である。
（証明は map of triples の定義より明らかなので略。）

注意 5 $\langle I_1, I_2 \rangle \cong D_6$（$D_6$ は dihedral group （正２面体群））である。

【命題】 i) C を３次有理式とし、$M \in$Möb$(\mathbf{C})$ とする。

$$f(z) := \{w \in \hat{\mathbf{C}} \mid C(Mz) = C(w); w \neq Mz\}$$

$$f^{-1}(w) := \{z \in \hat{\mathbf{C}} \mid C(Mz) = C(w); z \neq M^{-1}w\}$$

とすると、f は map of triples になる。

ii) 逆に、任意の map of triples $f : z \mapsto w$ に対し、ある３次有理式 C とただひとつの $M \in$Möb$(\mathbf{C})$ が存在して、

$$\Gamma(f) \ni (z, w) \Longrightarrow C(Mz) = C(w)$$

となり、更に C はメビウス変換を左から施したものを同一視して unique である。

(証明) i) $C(w) - C(Mz) = 0$ を $(w - Mz)$ で割ったものが f を 2:2-correspondence で表現したものである。任意の $z_1 \in \hat{\mathbf{C}}$ を固定し、$C(Mz_1) = \zeta$ とし、

$$(CM)^{-1}(\zeta) := \{z_1, z_2, z_3\} \;,\; C^{-1}(\zeta) := \{w_1, w_2, w_3\}$$

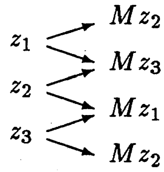
とする。$\{w_1, w_2, w_3\} = C^{-1}(\zeta) = MM^{-1}C^{-1}(\zeta) = M(CM)^{-1}(\zeta) = M\{z_1, z_2, z_3\} = \{Mz_1, Mz_2, Mz_3\}$ より、$w_i = Mz_i \quad (i = 1, 2, 3)$ としてよい。

f の定義より、

$$f(z_1) = \{Mz_2, Mz_3\}$$

$$f(z_2) = \{Mz_3, Mz_1\}$$

$$f(z_3) = \{Mz_1, Mz_2\}。$$



したがって f は map of triples である。

ii) の証明

$f : z \mapsto w$ を 2:2-correspondence $g(z,w) = 0$ により定義される map of triples とする。$z_1 \in \hat{\mathbb{C}}$ にたいして map of triples f と f^{-1} を交互に施して得られるすべての orbit は次の3つの図式のいずれかしか満たさない（1つ目の図は一般の点におけるもので、2つ目、3つ目の図は singular point におけるもの)。

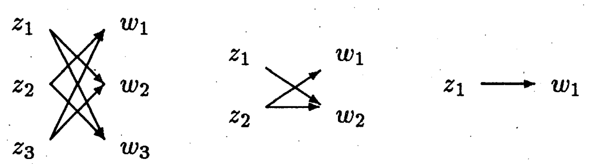


図 5: $f(z_1), f^{-1}f(z_1), ff^{-1}f(z_1), \ldots$

ここで M を次のように定義する。

$$M(z) = \begin{cases} f(z) & (\ z\text{ が singular point のとき}) \\ ff^{-1}f(z) \setminus f(z) & (\ z\text{ が singular point でないとき}) \end{cases}$$

すなわち、上の図式において、 $M(z_1) = w_1$ とすると、M は $\hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ への1対1双正則写像であるから、M は Möbius 変換である。したがって、上の図式のすべての $w_i (i = 1,2,3)$ について $w_i = Mz_i$ となる。そこで、$g(M^{-1}z, w) = 0$ により定義される 2:2-correspondence h を考える。h は $h = f \circ M^{-1}$ であり、更に map of triples である。

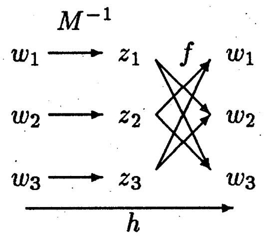


図 6: $h = f \circ M^{-1}$

ここで、$w_1, w_2 \in \hat{\mathbb{C}}$ の間に関係 $w_1 \sim w_2$ があることを

$$hh^{-1}(w_1) \ni w_2$$

で定義すると、h が map of triples であることから関係 $\sim$ は同値関係になる（ $w_1 \sim w_2$ であることと $h^{-1}h(w_1) \ni w_2$ であることは同値である)。$\hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}/\!\sim$ への自然な射影 $w \mapsto [w]$ を $\tilde{p}$ とし、これを用いて $\hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}/\!\sim$ へ自然な位相を入れると $\hat{\mathbb{C}}/\!\sim$ には単連結コンパクトリーマン面の構造がはいるから、ある双正則写像 φ が存在して

$$\varphi : \hat{\mathbb{C}}/\!\sim \ \xrightarrow{\cong} \hat{\mathbb{C}}$$

となる。よって、$C := \varphi\tilde{p}$ とすれば、C は $\hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ への被覆度3の holomorphic covering map になっているので C は3次有理式である。

3点 $\{w_1, w_2, w_3\}$ は h により不変であるので、$(z,w) \in \Gamma(h)$ ならば

$$C(z) = C(w)$$

すなわち、$(Mz, w) \in \Gamma(h)$ ならば $C(Mz) = C(w)$ 。$(Mz, w) \in \Gamma(h)$ と $(z,w) \in \Gamma(f)$ は同値であるから、$(z,w) \in \Gamma(f)$ ならば $CM(z) = C(w)$ がいえる。

M の unique 性については作り方より明らか。また、C が左から Möbius 変換を施したものを同一視すれば unique であることは、次のようにして分かる。任意の $w_1 \sim w_2$ なる点 $w_1, w_2 \in \widehat{\mathbf{C}}$ にたいし、$C_1(w_i) = C_2(w_i)$ $(i = 1, 2)$ となる C_1, C_2 が存在すれば、$\mu := C_2 C_1^{-1}$ は 1 価正則な写像であり、また $\mu^{-1} = C_1 C_2^{-1}$ となる。μ も 1 価正則な写像であるので、μ は Möbius 変換である。したがって、$\zeta_1 := C_1(w)$, $\zeta_2 := C_2(w)$ とすると、対応 $\zeta_1 \mapsto \zeta_2$ は μ によるものだから、$C_2 := \mu C_1$ となる。以上により、命題は証明できた。 ∎

このことから、上の図式は図 7 のように描ける。

$$\begin{array}{rcl}
M^{-1}(w_1) = z_1 & & w_1 = M(z_1) \\
M^{-1}(w_2) = z_2 & & w_2 = M(z_2) \\
M^{-1}(w_3) = z_3 & & w_3 = M(z_3)
\end{array}$$

図 7: map of triples

以降、$C \circ M(z) = C(w)$ と書けば、map of triples のこととする。

3.2 reversible maps of triples

map of triples $C \circ M(z) = C(w)$ において M が involution のとき、$M =: J$ と書いて、reversible map of triples と呼ぶ。

注意 6 $C \circ M(z) = C(w)$ で表わされる map of triples $f : z \mapsto w$ が「reversible である」ことと、「$f : z \mapsto w \overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} f : Mw \mapsto Mz$」であることは同値である。
（略証） $C \circ J(J(w)) = C(w) = C(J(z))$.

注意 7 $\Gamma(f)$ を f のグラフとし、$(z, w) \in \Gamma(f)$ に対し $\pi_1(z, w) = w$, $\pi_2(z, w) = z$ とする。I_1, I_2 をそれぞれ π_1, π_2 の covering involutions とすると、

$$f \text{ が reversible map of triples である。} \overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} I_1 I_2 I_1(z, w) = I_2 I_1 I_2(z, w) = (Jw, Jz) \text{ である。}$$

注意 8 （“reversible” と呼ぶ由故）
$f : z \mapsto w$ を $C(J(z)) = C(w)$ で表わされる reversible map of triples とし、$O_+(z; f) := \bigcup_{n>0} f^n(z)$, $O_-(z; f) := \bigcup_{n<0} f^n(z)$ とすると

$$J(O_+(z; f)) = O_-(Jz; f)$$

である。なぜなら、f は reversible map of triples であるから、$f : z \mapsto w \overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} f : Jw \mapsto Jz$ 。すなわち $w \in f(z) \overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} Jw \in f^{-1}(Jz)$ 。よって $f(z) = J^{-1} f^{-1} J(z)$ 。これを用いて任意の $n \in \mathbf{N}$ にたいして $f^n(z) = J^{-1} f^{-n} J(z)$ がいえる。したがって $J(O_+(z; f)) = O_-(Jz; f)$ となる。

【命題】 $f : z \mapsto w$ を $C(Jz) = C(w)$ で表わされる reversible map of tripes とし、$O_\pm(z; f) := O_+(z; f) \cup \{z\} \cup O_-(z; f)$ (uni-directional orbit) とすると、

$$GO(z; f) = O_\pm(z; f) \cup O_\pm(Jz; f)\text{。}$$

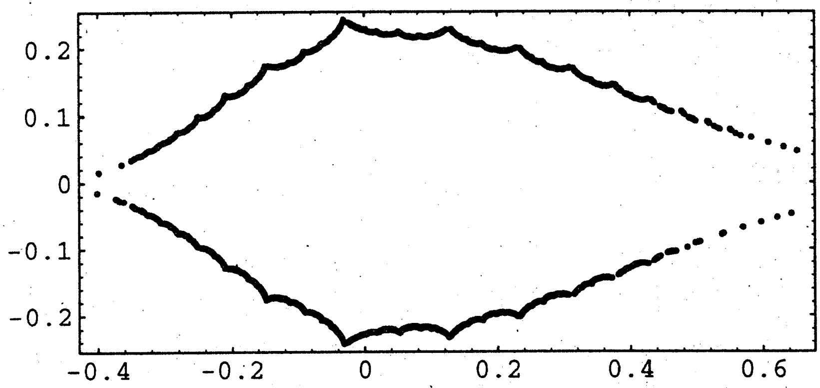
（証明） $GO(z; f)$, $O_+(z; f)$, $O_-(z; f)$, $O_\pm(z; f)$ をそれぞれ $GO(z)$, $O_+(z)$, $O_-(z)$, $O_\pm(z)$ と略記する。

(⊃) $O_\pm(z) \subset GO(z)$ は明らか。また、$J(z) \in f \circ f^{-1} \circ f(z) \subset GO(z)$ より、$O_\pm(Jz) \subset GO(z)$. よって、$GO(z;f) \supset O_\pm(z;f) \cup O_\pm(Jz;f)$。

(⊂) $\zeta \in O_\pm(z) \cup O_\pm(Jz) \Longrightarrow f(\zeta) \cup f^{-1}(\zeta) \subset O_\pm(z) \cup O_\pm(Jz)$（$**$） がいえれば、帰納法より $GO(z) \subset O_\pm(z) \cup O_\pm(Jz)$ がいえる。（$**$）を示す。$\zeta = z$ のときは自明。よって $\zeta \in O_+(z)$ としてよい ($\zeta \in O_-(z)$, $\zeta \in O_\pm(Jz)$ のときも同様に示せる)。

$\zeta \in O_+(z)$ のとき、$f(\zeta) \subset O_+(z)$ であり、$f^{-1}(\zeta) = \{\xi, \eta\}$ の一方は $O_+(z) \cup \{z\}$ の元であるから、それを ξ として η が $O_\pm(z) \cup O_\pm(Jz)$ の元であることを示せばよい。右図より $f(\xi) = \{\zeta, J\eta\}$ となっていて、$\xi \in O_+(z) \cup \{z\}$ より、$J\eta \in O_+(z)$。また、$J(O_+(z)) = O_-(Jz)$ (上の注意 8 より) であるから、$\eta = J \circ J(\eta) \in J(O_+(z)) = O_-(Jz)$。ゆえに、$f(\zeta) \cup f^{-1}(\zeta) \subset O_+(z) \cup \{z\} \cup O_-(Jz)$。すなわち、（$**$）は示された。 ▮

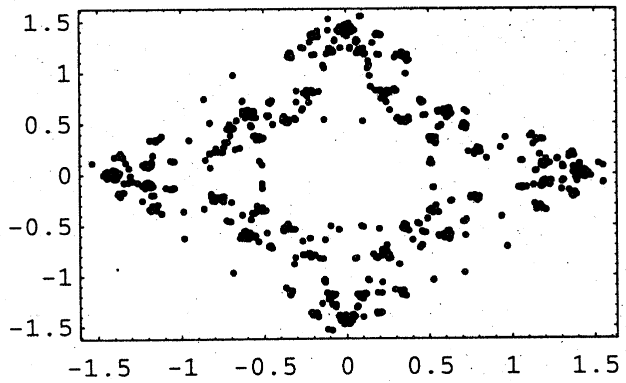
$$\begin{tikzcd}
O_+(z) \cup \{z\} \ni \xi \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & J\xi \\
J\zeta & \zeta \in O_+(z) \\
\eta \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[r] & J\eta \in O_+(z)
\end{tikzcd}$$



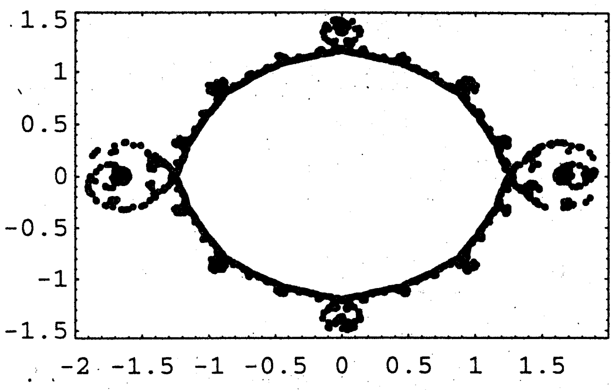
map of pairs

$$\frac{z(z+1)}{4} = \frac{w^2}{w+1}$$

による $z \mapsto w$ (forward 方向) の uni-directional orbits



$$-z^2 = w + \frac{1}{w}$$ による $w \mapsto z$ 方向の uni-directional orbits



$$z^2 = w\left(\frac{1 - 1.1w/(1.1^2 - 0.5^2)}{1 - w/1.1}\right)$$

による $w \mapsto z$ 方向の uni-directional orbits