

Quadratic Correspondences の力学系に関する Shaun Bullett の仕事の解説 (応用編)

小森 洋平 (大阪市立大学 理 数学)

Abstract

S.Bullett と C.Penrose の論文 Mating quadratic maps with the modular group, Invent math.115(1994) を補足解説する。

1 はじめに: mating とは?

mating という用語は Douady と Hubbard によって導入された。この言葉の意味は、2つの同じ次数の多項式のそれぞれの充填ジュリア集合 (filled-in Julia set) を境界、つまりジュリア集合 (Julia set) でありあわせて (位相的) 球面を作り、その際それぞれの多項式の、充填ジュリア集合上での作用がジュリア集合上でうまく一致して、球面上の1つの写像を定義することである。abstract mating ともいわれる。またはりあわせた写像が有理写像で実現できるための条件も研究されている。いま mating という言葉を2つの有理写像をはりあわせてできる写像の意味で用いたが、クライン群論でも同様の現象が考えられる。実際、擬フックス群は2つのフックス群を極限集合でありあわせてできていると理解することも可能である。

S.Bullett と C.Penrose は論文 [1] において、2次多項式写像とモジュラー群を、それぞれのジュリア集合と極限集合 (limit set) でありあわせることを考察している。一方は次数2の写像で、もう一方はディスクリート群 (discrete group) なので、一見突拍子もない考えのように思われるかもしれない。この2つの力学系がはり合う (mating) と彼等が考えた動機は、以下の実数の連分数展開と2進展開の、良く知られた関係である。閉区間 $[0, \infty]$ を、0 と ∞ を同一視した空間 $[0, \infty]/0 \sim \infty$ から、単位円周 \mathbf{R}/\mathbf{Z} への写像

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \mapsto 0 \cdot \underbrace{00..0}_{a_0} \underbrace{11..1}_{a_1} \underbrace{00..0}_{a_2} \dots$$

を考える。ここで有理数を連分数展開する際は、最後の展開係数は ∞ としておく。この写像は0を1にうつし、 $[0, \infty]$ 上の作用 $z \mapsto z + 1, z \mapsto z/z + 1$

を、単位円周 \mathbf{R}/\mathbf{Z} 上の作用 $\theta \mapsto \theta/2, \theta \mapsto \theta/2 + 1/2$ に移す、唯1つの向きを逆にする同相写像である。この写像の前に $z \mapsto -z$, 後ろに $\theta \mapsto (1-\theta)$ を合成することにより、同様の性質をみたす $[-\infty, 0]/-\infty \sim 0$ から単位円周 \mathbf{R}/\mathbf{Z} への同相写像が得られる。この2つの同相写像を用いて、次のようにして2次多項式とモジュラー群をはりあわせて、(位相的) 球面上の多価写像を構成することができる。モジュラー群 $PSL_2(\mathbf{Z})$ は上半平面 \mathbf{H}^2 に1次分数変換で作用し、 $z \mapsto z+1, z \mapsto z/z+1$ はモジュラー群のレベル2の主合同部分群の生成元である。この作用は極限集合 $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ まで延びる。一方ジュリア集合 J_c がジョルダン曲線であるような2次多項式 $q_c(z) = z^2 + c$ の J_c への作用は無窮遠点の周りのベットヒャー座標でみると、単位円周 \mathbf{R}/\mathbf{Z} 上の角度を2倍する写像 $\theta \mapsto 2\theta$ となる。そこで2次多項式 q_c の充填ジュリア集合 K_c のコピー K_c^+, K_c^- を2つ用意して、それぞれの境界であるジュリア集合 J_c^+, J_c^- と、 \mathbf{H}^2 の境界である実軸 (を0と ∞ , 0と $-\infty$ で同一視したもの) $[0, \infty]/0 \sim \infty, [-\infty, 0]/-\infty \sim 0$ を上の対応ではりあわせる。そして $K_c^+, \mathbf{H}^2, K_c^-$ それぞれの上の2価写像を次のように定義する。 K_c^+ 上では $q_c^{-1}: z^+ \mapsto \pm\sqrt{z^+ - c}$ 、 \mathbf{H}^2 上では $z \mapsto z+1$ と $z \mapsto z/z+1$ 、 K_c^- 上では q_c と $z^- \mapsto -z^+$ 。このようにして2次多項式とモジュラー群のはりあわせは、(位相的) 球面上の2価写像として実現できる。そこで S.Bullett と C.Penrose は 2:2 対応 (2:2 correspondence) でこのはりあわせを実現することをこの論文で考えた。グラフがリーマン球面であるような可逆な3対写像 (map of triples with graph a single sphere) という 2:2 対応のクラスで、すべての場合のはりあわせが実現出来る兆候があるということが、この論文の主結果である。正確には次の2つの定理の形で述べられている (詳しい用語は本文で説明する)。

Theorem 1.1 グラフがリーマン球面であるような可逆な3対写像 f が接触条件 (contact condition) をみたすとする。さらに f の2重点 (double point) は対合 (involution) の固定点でないとする。そのような f は、 a をパラメーターにもつ方程式

$$\left(\frac{az+1}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{az+1}{z+1}\right)\left(\frac{aw-1}{w-1}\right) + \left(\frac{aw-1}{w-1}\right)^2 = 3$$

で定義される 2:2 対応 $f: z \rightarrow w$ でかける。今パラメーター a が実数で $4 \leq a \leq 7$ とする。このときリーマン球面はそれぞれ f -完全不変 (f -completely invariant) な単連結開集合 Ω と閉集合 Λ に分割され、それぞれでの f の振る舞いは次の通り:

1. f の2つの枝が Ω 上1価に定まり、それらの作用はモジュラー群の上半平面への一次分数変換としての作用と双正則同値。
2. Λ は f -不変 (forward invariant) な連結閉集合 Λ_+ と、 f^{-1} -不変 (backward invariant) な連結閉集合 Λ_- の接触点 (contact point) での和集合でかけ

る。 f の枝の 1 つは Λ_- を Λ_- に次数 2 で移し、 f の枝のもう 1 つは Λ_- を Λ_+ に同相に移す。同様に f^{-1} の枝の 1 つは Λ_+ を Λ_+ に次数 2 で移し、 f^{-1} の枝のもう 1 つは Λ_+ を Λ_- に同相に移す。

Theorem 1.2 グラフがリーマン球面であるような可逆な 3 対写像 f で、 f の 2 重点は対合の固定点でないとする。そのような f は、 a と k をパラメーターにもつ方程式

$$\left(\frac{az+1}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{az+1}{z+1}\right)\left(\frac{aw-1}{w-1}\right) + \left(\frac{aw-1}{w-1}\right)^2 = 3k$$

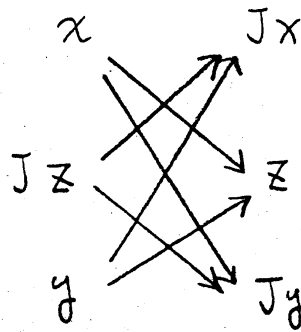
で定義される 2 : 2 対応 $f : z \rightarrow w$ でかける。このとき $1/4 \leq k \leq 1$ に対し、関数 $a_{min}, a_{max} : [1/4, 1] \rightarrow [1, 7]$ が存在し、 $a_{min}(1/4) = a_{max}(1/4) = 1$, $a_{min}(1) = 4, a_{max}(1) = 7$ かつ $1 < a_{min}(k) < a_{max}(k)$ をみだし、任意の $1/4 < k < 1$ と $a_{min}(k) \leq a \leq a_{max}(k)$ に対し、リーマン球面は f -完全不変な 2 重連結開集合 Ω と閉集合 Λ に分割され、それぞれでの f の振る舞いは次の通り：

1. f の Ω 上での作用は不連続 (discontinuous)。
2. Λ は f -不変な連結閉集合 Λ_+ と、 f^{-1} -不変な連結閉集合 Λ_- の disjoint な和集合である。充填ジュリア集合 K_c が連結であるような 2 次多項式 $q_c(z) = z^2 + c$ と Λ_- の近傍で hybrid 同値な f の枝が存在し、この hybrid 同型で Λ_- と K_c は擬等角同値になる。同様に、同じ 2 次多項式 $q_c(z) = z^2 + c$ と Λ_+ の近傍で hybrid 同値な f^{-1} の枝が存在し、この hybrid 同型で Λ_+ と K_c は擬等角同値になる。 f のもう 1 つの枝は Λ_- を Λ_+ に等角に移し、 f^{-1} のもう 1 つの枝は Λ_+ を Λ_- に等角に移す。

以上見てきたように、接触条件をおくとモジュラー群の作用は単連結開集合 Ω で実現できるが、 Λ_+ と Λ_- が接触点で繋がっているため、多項式類似写像の理論をそのままでは適応できず、2 次多項式の充填ジュリア集合同士が接触点で繋がっているような力学系が、実現されているかどうか分からない。また少し摂動を加えて接触条件をはずすと、多項式類似写像の理論が使えて、2 次多項式の充填ジュリア集合上の作用が実現されることが確かめられるが、今度はもはや Ω は単連結でないので f の 2 つの枝が Ω 上 1 価に定まらず、モジュラー群の作用そのものは見えなくなってしまう。このように悩ましい状況なのではあるが、論文に出ているコンピューターグラフィックの絵から 2 次多項式とモジュラー群のはりあわせが、接触条件を満たすグラフがリーマン球面であるような可逆な 3 対写像ですべて実現されていそうであるし、その場合のパラメーター空間もマンデルブロート集合と同相に見える。

2 グラフがリーマン球面であるような可逆な3対写像

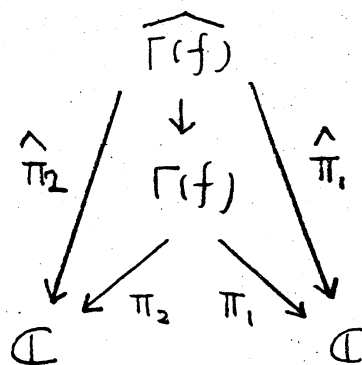
可逆な3対写像 f において、その対合を J とすると、以下のダイアグラムのように3つの点の組が f で動く。



また対応 f のグラフ $\Gamma(f)$ から、 z -球面、 w -球面への射影 π_2, π_1 をそれぞれ $\pi_2(z, w) = z, \pi_1(z, w) = w$ とすると、 $\Gamma(f)$ 上に次の3つの対合 I_1, I_2, \tilde{J} が定まる。

$$I_1(x, z) = (y, z), I_2(x, z) = (x, Jy), \tilde{J}(x, z) = (Jz, Jx).$$

このとき、関係式 $I_1 I_2 I_1 = I_2 I_1 I_2 = \tilde{J}$ が成り立ち、 I_1, I_2 で生成される群は位数6の正2面体群になる。これは3次の対称群とも同型である。さらにグラフ $\Gamma(f)$ に特異点があるとき、その特異点を解消して得られるリーマン面を $\widehat{\Gamma(f)}$ とする。このとき、 $\Gamma(f)$ から z -球面、 w -球面への射影 π_2, π_1 や $\Gamma(f)$ 上の3つの対合 I_1, I_2, \tilde{J} は、自然に $\widehat{\Gamma(f)}$ から z -球面、 w -球面への射影 $\hat{\pi}_2, \hat{\pi}_1$ や $\widehat{\Gamma(f)}$ 上の対合 $\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{J}$ に拡張される。



以下 $\widehat{\Gamma(f)}$ がリーマン球面となる可逆な3対写像を考え、これをグラフがリーマン球面であるような可逆な3対写像という。 \hat{I}_1, \hat{I}_2 の生成する位数6の

正2面体群は、リーマン球面 $\widehat{\Gamma}(f)$ の正則な自己同型群を引き起こし、それはメビウス変換での共役を除いて一意である。よって特に、

$$\hat{I}_1(x) = -(x+1), \hat{I}_2(x) = -\frac{x}{x+1}$$

とかけるような $\widehat{\Gamma}(f)$ の大域的座標 x を固定すると、この座標によって $\widehat{\Gamma}(f)$ から z -球面、 w -球面への射影 $\hat{\pi}_2, \hat{\pi}_1$ を具体的に書き下すことができる。

その前にグラフがリーマン球面であるような可逆な3対写像の標準型を求めるため、対応 f の特異点について考察する。一般に $n:n$ 対応 $f: z \rightarrow w$ において、 z_0 が f -特異点 (forward singular point) であるとは $f(z_0)$ の元の個数が n 個未満のとき、 w_0 が f^{-1} -特異点 (backward singular point) であるとは $f^{-1}(w_0)$ の元の個数が n 個未満のときとする。 z_0 が f -臨界点 (forward critical point) であるとは、 z_0 の近傍で f の1価の枝 F がとれて、 $\frac{dF}{dz}(z_0) = 0$ をみたすことであり、その値 $w_0 = F(z_0)$ を f -臨界値 (forward critical value) という。同様に w_0 が f^{-1} -臨界点 (backward critical point) であるとは、 w_0 の近傍で f^{-1} の1価の枝 G がとれて、 $\frac{dG}{dw}(w_0) = 0$ をみたすことであり、その値 $z_0 = G(w_0)$ を f^{-1} -臨界値 (backward critical value) という。 f^{-1} -臨界値は必ず f -特異点であるが、逆は必ずしも成立しない： f -特異点は、一般に f^{-1} -臨界値か多重点 (グラフ $\Gamma(f)$ の特異点) か退化点 (射影 π_1 と π_2 の共通の臨界点の π_2 での像) のどれかになる。

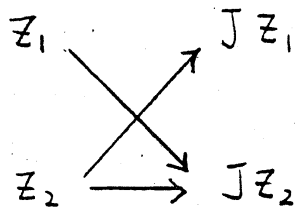
以下 f を可逆な3対写像 (reversible map of triples) とする。 f を定義する式 $p(z, w) = 0$ は各変数について次数が2より、 $p(z, w) = 0$ を w -変数の式と思うと判別式は z の4次式。よって f -特異点は重複度こみで4点になる。よって可能性は

1. 2重点2つ (グラフは2つのリーマン球面が横断的に交わる)
2. 2重点1つと (π_2 の) 分岐点2つ (グラフはノード特異点付きリーマン球面)
3. 4つの分岐点 (グラフはトーラス)
4. 4重点1つ (グラフは2つのリーマン球面が1点で接する)
5. 3重点と分岐点1つ (グラフはカusp特異点付きリーマン球面)

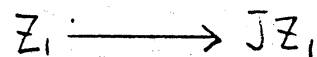
のいずれかになる。しかし (4) は標準型 $C(Jz) = C(w)$ で C は3次有理式より実際には起こらない。(5) は \hat{I}_1, \hat{I}_2 の $\widehat{\Gamma}(f)$ 上での固定点が相異なる4点になることから実際には起こらない。以上より実際に可逆な3対写像で起こりうるのは (1)、(2)、(3) の場合である。(3) が一番起こりうる一般的な状況である。(1) は $(w - Az)(a - Bz) = 0$ (ここで A, B はメビウス変

換)と同値になる(以下の「補足」参照)。よって我々が対象とする、グラフがリーマン球面であるような可逆な3対写像は、(2)をみたすような可逆な3対写像のクラスということになる。

以下、グラフがリーマン球面であるような可逆な3対写像の標準型を求めることを考える。まず z_1 が分岐点や2重点であるとき、ダイアグラムは以下のようなになる。



(z_1 が分岐点の時)



(z_1 が2重点の時)

よって、対応する Jz_2 や Jz_1 はそれぞれ3次有理式 $C(z)$ の臨界点や3重根になる。そこで、 $Jz_1 = C(Jz_1) = \infty$ とし、 $C(z)$ の2つの臨界点をそれぞれ $\{\pm 1\}$ とする。この条件の下で $C(z)$ は $C(z) = z^3 - 3z$ としてよい。同値な条件の自由度は $z \rightarrow -z$ (つまり ∞ を固定し $\{\pm 1\}$ を入れ替える) だけなので次の主張が成立する。

Lemma 2.1 任意のグラフがリーマン球面であるような可逆な3対写像はある対合 J を用いて

$$(Jz)^2 + (Jz)w + w^2 = 3$$

とかける。ただしこの対合は $z \rightarrow -z$ での共役を除いて一意的。

次に対合 J の2つの固定点を正規化して標準型を求めることを考える。まず2重点が J の固定点でもある場合、つまり J の2つの固定点が $\{c, \infty\}$ ($c \in \mathbb{C}$) の場合を考える。このとき対応 f は

$$(z - 2c)^2 - (z - 2c)w + w^2 = 3$$

と表わされ、 c_1 と c_2 は $c_2 = -c_1$ に限り同値である(このクラスは以下の議論では登場しない)。次に2重点が J の固定点でない場合、つまり J の2つの固定点 $\{p, q\}$ がともに有限な値の場合を考える。このとき、1を ∞ に、 $\{0, \infty\}$ を $\{p, q\}$ に移すメビウス変換は2つのみあり、一方を

$$M(z) = \frac{qz - p}{z - 1}$$

とすると、もう一方は $M(\frac{1}{z})$ とかける。 $MJM^{-1}(z) = -z$ より、対応 f は

$$M(-z)^2 + M(w)M(-z) + M(w)^2 = 3$$

で定まる対応と同値である。 ($M(\frac{1}{z})$ を考えることで) $p \neq 0$ としてよく、 $a = q/p (\neq 1)$, $k = 1/p^2 (\neq 0)$ とすると

$$\left(\frac{az+1}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{az+1}{z+1}\right)\left(\frac{aw-1}{w-1}\right) + \left(\frac{aw-1}{w-1}\right)^2 = 3k$$

と表わされる。 (a_1, k_1) と (a_2, k_2) は、 $a_2 = 1/a_1$ かつ $k_2 = k_1/a_1^2$ に限り同値である。 またこの標準型による f -特異点は、2重点が -1 、2つの分岐点は

$$-\frac{2\sqrt{k}-1}{2\sqrt{k}-a}, \quad -\frac{2\sqrt{k}+1}{2\sqrt{k}+a}$$

であり、 f^{-1} -特異点は、2重点が 1 、2つの分岐点は

$$\frac{2\sqrt{k}-1}{2\sqrt{k}-a}, \quad \frac{2\sqrt{k}+1}{2\sqrt{k}+a}$$

である。

さらに f と J が固定点を共有する (例えば $(M(\frac{1}{z}))$ を考えることで) 0 を共有する) という条件は $k = 1$, すなわち

$$\left(\frac{az+1}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{az+1}{z+1}\right)\left(\frac{aw-1}{w-1}\right) + \left(\frac{aw-1}{w-1}\right)^2 = 3$$

と表わされる。 この条件を接触条件という。 この名前の意味は次節で明らかになる。

では、次に $\widehat{\Gamma(f)}$ 上の対合 \hat{I}_1, \hat{I}_2 が

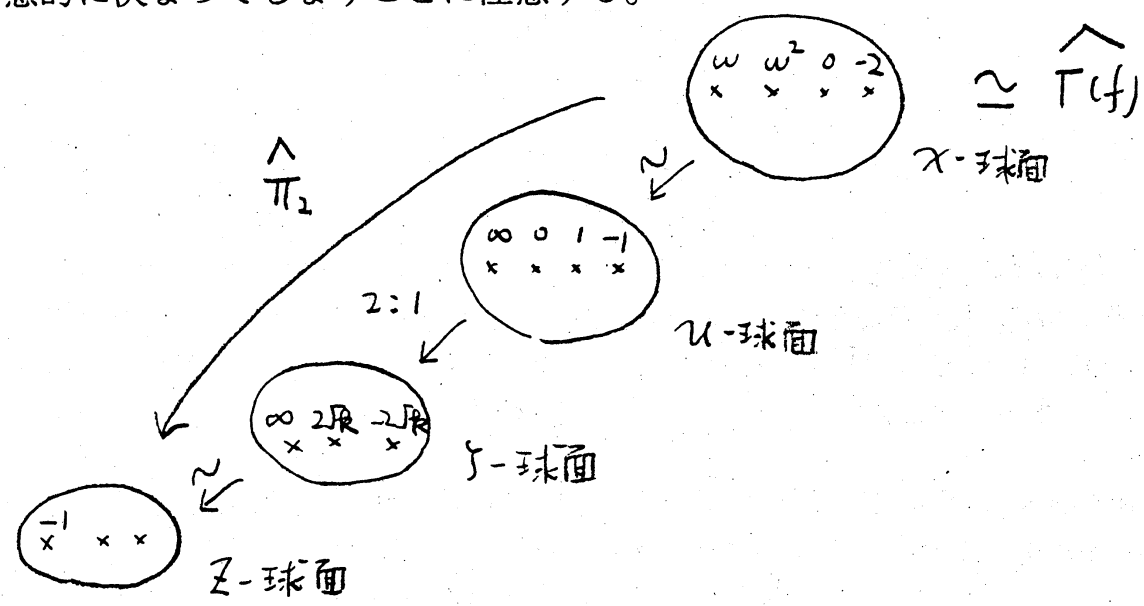
$$\hat{I}_1(x) = -(x+1), \quad \hat{I}_2(x) = -\frac{x}{x+1}$$

とかけるような $\widehat{\Gamma(f)}$ の大域的座標 x を固定して、この座標によって $\widehat{\Gamma(f)}$ から z -球面、 w -球面への射影 $\hat{\pi}_2, \hat{\pi}_1$ を具体的に書き下してみる。 まず $\hat{\pi}_2$ をもとめる。 x -球面上の \hat{I}_2 の固定点は $\{0, -2\}$ でこれは $\hat{\pi}_2$ で z -球面上の2つの分岐点にいく。 特に $\hat{\pi}_2(0) = -\frac{2\sqrt{k}-1}{2\sqrt{k}-a}$ と (自分で) 選ぶことにする。 また2重点の x -座標への持ち上げ2点は \hat{I}_1, \hat{I}_2 で移りあうので、位数3の元 $\hat{I}_1\hat{I}_2$ の固定点 $e^{2\pi i/3}, e^{-2\pi i/3}$ になり、 $\hat{\pi}_2$ で z -球面上の2重点 -1 にいく。 以上の考察から $z = \hat{\pi}_2(x)$ は次のようにかける。 まず x -球面から w -球面への写像として、

$e^{2\pi i/3}, e^{-2\pi i/3}, 0, -2$ を $\infty, 0, 1, -1$ に移すメビウス変換 $u = \frac{1 - e^{2\pi i/3} x}{1 - e^{-2\pi i/3} x}$ を考える。つぎに u -球面から ζ -球面へ、 $\infty, 0$ を ∞ に、 $1, -1$ をそれぞれ $2\sqrt{k}, -2\sqrt{k}$ に移す2次有理式 $\zeta = \sqrt{k}(u+1/u)$ を考える。最後に ζ -球面から z -球面への写像として、 $\infty, 2\sqrt{k}, -2\sqrt{k}$ を $-1, -\frac{2\sqrt{k}-1}{2\sqrt{k}-a}, -\frac{2\sqrt{k}+1}{2\sqrt{k}+a}$ に移すメビウス変換を考えこれら3つの変換を合成したものが $z = \hat{\pi}_2(x)$ である。同様にして $z = \hat{\pi}_1(x)$ が計算できる。ここで x -球面上の \hat{I}_2 の固定点を $\hat{\pi}_2$ で z -球面上の2つの分岐点に送る際、 $\hat{\pi}_2(0) = -\frac{2\sqrt{k}-1}{2\sqrt{k}-a}$ と選んだので、今度 x -球面上の \hat{I}_1 の固定点 $\infty, -\frac{1}{2}$ を $\hat{\pi}_1$ で w -球面上の2つの分岐点に送る際は

$$\hat{\pi}_1(\infty) = \hat{\pi}_1(\hat{J}(0)) = J\hat{\pi}_2(0) = \frac{2\sqrt{k}-1}{2\sqrt{k}-a}$$

と一意的に決まってしまうことに注意する。



また \hat{I}_1, \hat{I}_2 で生成される位数6の2面体群の基本領域が $\hat{\Gamma}(f)$ 上に具体的にかけることも以下の議論で重要である。このことは4節でみる。

「補足」(グラフが2つのリーマン球面であるような可逆な3対写像 (reversible map of triples with graph a pair of spheres) について) グラフが2つのリーマン球面であるような可逆な3対写像に対し、その2つの2重点を $\{0, \infty\}$ とすると、 $C(z) = z^3$ としてよい。このことから次がわかる。

Lemma 2.2 任意のグラフが2つのリーマン球面であるような可逆な3対写像はある対合 J を用いて

$$(Jz)^2 + (Jz)w + w^2 = 0$$

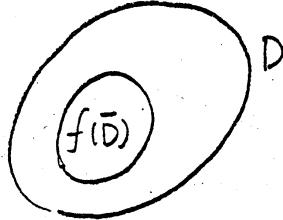
とかける。ただし対合 J はスカラー倍の共役を除いて一意的。

さらにこの式は1次式の積 $(w - e^{2\pi i/3} Jz)(w - e^{-2\pi i/3} Jz) = 0$ に分解でき、一方モジュラー群 $PSL_2(\mathbf{Z})$ は位数2と3の巡回群の自由積 $C_2 * C_3$ と同型なことから次がわかる。

Lemma 2.3 グラフが2つのリーマン球面であるような可逆な3対写像の同値類全体と $PSL_2(\mathbf{Z})$ の $PSL_2(\mathbf{C})$ 表現の $PSL_2(\mathbf{C})$ 共役類全体の間には自然な全単射がある。

3 対応 f の方向性と極限集合

Definition 3.1 リーマン球面 $\hat{\mathbf{C}}$ の部分集合 D が対応 f の方向性 (directionality) を定めるとは、 $f(\bar{D}) \subset D^\circ$ をみたすこととする。ここで \bar{D} はリーマン球面における D の閉包、 D° はリーマン球面における D の開核とする。



対応 f の方向性という考えは、McGehee によっではじめて導入された (彼自身は論文 [2] のなかで、attractor block とよんでいる)。条件 $f(\bar{D}) \subset D^\circ$ は、 $\Gamma(f) \cap (\bar{D} \times \bar{D}^c) = \emptyset$ と同値なので条件 $f^{-1}(\bar{D}^c) \subset (D^c)^\circ$ と同値である。つまり D^c は対応 f^{-1} の方向性を定める。

Definition 3.2 D が対応 f の方向性を定めるとする。このときアトラクター (attractor) $\Lambda_+(D)$ とリペラー (repeller) $\Lambda_-(D)$ をそれぞれ

$$\Lambda_+(D) := \bigcap_{n \geq 0} f^n(\bar{D}), \quad \Lambda_-(D) := \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(\bar{D}^c)$$

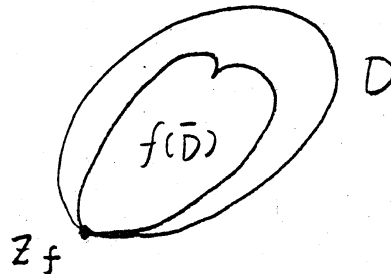
で定義する。 f の方向性の定義より、これらは *well-defined* である。

Claim 3.1 リーマン球面の部分集合 D が対応 f の方向性を定めているとする。このとき次が成り立つ。

- (1) $\Lambda_+(D) \cap \Lambda_-(D) = \emptyset$.
- (2) $f(\Lambda_+(D)) = \Lambda_+(D)$.
- (3) $f^{-1}(\Lambda_-(D)) = \Lambda_-(D)$.
- (4) 任意の $z \in D \setminus f(D)$ に対し、 $O_+(z) \cap (D \setminus f(D)) = \emptyset$.
- (5) 任意の $z \in D^c \setminus f^{-1}(D^c)$ に対し、 $O_-(z) \cap (D^c \setminus f^{-1}(D^c)) = \emptyset$.

次に方向性の条件を少し緩めた概念を導入する。

Definition 3.3 リーマン球面の部分集合 D が対応 f の接触方向性 (contact directionality) を定めるとは、 D の境界上の点 z_f が存在して、 $\Gamma(f) \cap (\overline{D} \times \overline{D}^c) = \{(z_f, z_f)\}$ をみたすこととする。



Claim 3.2 D が対応 f の接触方向性を定めているとする。このとき次が成り立つ。

- (1) $\Lambda_+(D) \cap \Lambda_-(D) = \{z_f\}$.
- (2) $f(\Lambda_+(D)) = \Lambda_+(D)$.
- (3) $f^{-1}(\Lambda_-(D)) = \Lambda_-(D)$.
- (4) z_f と異なる任意の $z \in D \setminus f(D)$ に対し、 $O_+(z) \cap (D \setminus f(D)) = \emptyset$.
- (5) z_f と異なる任意の $z \in D^c \setminus f^{-1}(D^c)$ に対し、 $O_-(z) \cap (D^c \setminus f^{-1}(D^c)) = \emptyset$.

次の定義は、実際に f の (接触) 方向性を構成する際有用である。

Definition 3.4 リーマン球面の部分集合 D が、グラフがリーマン球面であるような可逆な 3 対写像 f の同変 (接触) 方向性 (equivariant (contact) directionality) を定めるとは、 f のグラフ $\widehat{\Gamma}(f)$ に位数 6 の正 2 面体群 $D_6 \cong \langle \hat{I}_1, \hat{I}_2 \rangle$ の作用に関する基本領域 Δ が存在して、 $D = \hat{\pi}_2(\overline{\Delta})$ とかけて、かつ D は f の (接触) 方向性を定めることとする。

次に対応 f が「不連続に作用する」とか、 f の「基本領域」といった概念を定義する。そのため、まずはディスクリット群 G のリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ への作用に関する不連続性やその基本領域について復習することからはじめる。 $z \in \hat{\mathbb{C}}$ における G の作用が不連続であるとは、 z のある近傍 U が存在して、 $g(U) \cap U \neq \emptyset$ をみたす G の元は有限個かつ、そのような G の元 g は $g(z) = z$ をみたすこととする。 G -不変な開集合 Ω における G の基本領域とは、 Ω の開部分集合 Δ で、 Ω 上の任意の G -軌道 (G -orbit) は必ず $\overline{\Delta}$ とは交わるが、 Δ とはたかだか 1 点でしか交わらないものとする。

では、 f の作用が「不連続」と f の「基本領域」を定義する。その前に対応 f の反復合成の、 z_0 の連結近傍 U_0 での「枝 F 」を定義することからはじめる。まず符号列 $e_i \in \{\pm 1\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) をきめる。そして点列 z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) を $z_i \in f^{e_i}(z_{i-1})$ できめる。 z_i の連結近傍 U_i ($i = 1, 2, \dots, n$) を、 $f^{e_i}(U_{i-1})$ の z_i を含む連結近傍で帰納的に定義する。このとき U_0, U_1, \dots, U_n と順にたどる f^{e_i} の n 回合成を枝 F という。いくら U_0 を小さくとっても、枝は必ずしも 1 価にとれるとは限らないことに注意する。以上の準備の下で、 $z \in \hat{\mathbb{C}}$ における

f の作用が不連続であるとは、 z のある連結近傍 U が存在して、 $F(U) \cap U \neq \emptyset$ をみたす U 上の f の枝 F は有限個かつ $F(\{z\}) = \{z\}$ をみたすこととする。 f -完全不変な開集合 Ω における f の基本領域とは、 Ω の開部分集合 Δ で、 Ω 上の任意の点 z の f -grand orbit $GO_f(z)$ は必ず Δ とは交わるが、 Δ とはたかだか1点でしか交わらないものとする。

Theorem 3.1 f をグラフがリーマン球面であるような可逆な3対写像とする。 Δ を群 $\langle \hat{I}_1, \hat{I}_2 \rangle$ の作用の、 $\Gamma(f)$ における基本領域とする。いま $D = \hat{\pi}_2(\overline{\Delta})$ が f の同変な(接触)方向性を定めているとする。アトラクター $\Lambda_+(D)$ とリペラー $\Lambda_-(D)$ の和集合を $\Lambda(D)$ とし、 $\Lambda(D)$ の \hat{C} での補集合を $\Omega(D)$ とする。このとき、

1. f の $\Omega(D)$ への作用は不連続。
2. $\Lambda(D)$ と $\Omega(D)$ はともに f -完全不変集合。さらに $\Omega(D)$ は、

$$\Omega(D) = \bigcup_{z \in D \cap J(D) - \{z_f\}} GO_f(z)$$

とかける。

3. f^{-1} の枝の一方は $\Lambda_+(D)$ から $\Lambda_+(D)$ への2対1の写像で、もう一方の枝は $\Lambda_+(D)$ から $\Lambda_-(D)$ への全単射。同様に、 f の枝の一方は $\Lambda_-(D)$ から $\Lambda_-(D)$ への2対1の写像で、もう一方の枝は $\Lambda_-(D)$ から $\Lambda_+(D)$ への全単射。
4. J の $D \cap J(D)$ での基本領域は、 f の $\Omega(D)$ での基本領域。

(証明)

$D = \hat{\pi}_2(\overline{\Delta})$ は閉集合であり、 Δ は $\langle \hat{I}_1, \hat{I}_2 \rangle$ の基本領域であることから、

$$(f(D))^c = (JD)^\circ, Jf(D) = f^{-1}(JD), (f^{-1}(JD))^c = D^\circ$$

がわかる。よって、

$$D \setminus f(D) = D \cap (JD)^\circ, JD \setminus f^{-1}(JD) = D^\circ \cap JD.$$

特に

$$D^\circ \setminus f(D) = (JD)^\circ \setminus f^{-1}(JD) = D^\circ \cap (JD)^\circ.$$

一方 D は f の方向性を定めることから、 $f^{-1}(JD)$ は f^{-1} の方向性を定めることがわかり、 $\Omega(D)$ は $D^\circ \setminus f(D)$, $f^n(D) \setminus f^{n+1}(D) = f^n(D \setminus f(D))$ ($n \geq 1$), $f^{-n}(JD) \setminus f^{-(n+1)}(JD) = f^{-n}(JD \setminus f^{-1}(JD))$ ($n \geq 1$)の disjoint な和集合で

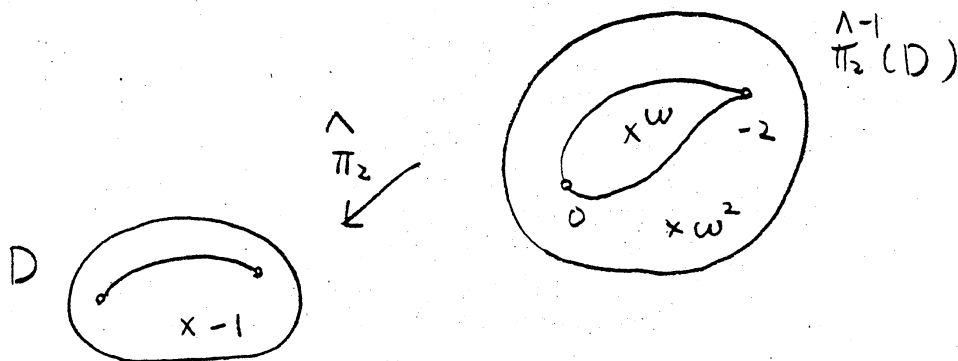
ある。特に $Jf^n(D) = f^{-n}(JD)$ から J で $f^n(D \setminus f(D))$ と $f^{-n}(JD \setminus f^{-1}(JD))$ はうつりあう。また $\Lambda_-(D) = \bigcap_{n \geq 1} f^{-n}(JD)$ とかけることから $J\Lambda_+(D) = \Lambda_-(D)$ 。ここで、 $f^n(D \setminus f(D))$ 上の f^{-1} の枝の一方は $f^{n-1}(D \setminus f(D))$ への 2対1の写像で、もう一方は $f^{-n}(JD \setminus f^{-1}(JD))$ への全単射である。以上より、 f の枝が固定点を持つとすると、 J の固定点か f, f^{-1} の特異点のみで、そのような枝も f のダイアグラムから 2つか3つしかないことがわかる。よって f の $\Omega(D)$ への作用は不連続である。

Theorem 3.2 f をグラフがリーマン球面であるような可逆な 3 対写像とする。 Δ を群 $\langle \hat{I}_1, \hat{I}_2 \rangle$ の作用の、 $\widehat{\Gamma}(f)$ における基本領域とする。いま $D = \hat{\pi}_2(\overline{\Delta})$ が f の同変な (接触) 方向性を定めているとする。さらにその境界がジョルダン曲線であるような位相的円板とする。このとき、

1. D は射影 $\hat{\pi}_2$ の臨界値を高々 1 つしか含まない。
2. $\Lambda_+(D)$ と $\Lambda_-(D)$ はともに full 集合、つまり $\hat{C} \setminus \Lambda_+(D)$ と $\hat{C} \setminus \Lambda_-(D)$ はともに連結。よってそれらの補集合 $\Omega(D)$ は連結集合。
3. $\Lambda_+(D)$ と $\Lambda_-(D)$ が連結になる必要十分条件は、 $\Lambda_+(D)$ が $\hat{\pi}_2$ の臨界値を含むことである。これはまた $\Lambda_-(D)$ が $\hat{\pi}_1$ の臨界値を含むことと同値である。また $\Lambda_+(D)$ と $\Lambda_-(D)$ が連結でなければ、その連結成分の数はともに非可算個になる。

(証明)

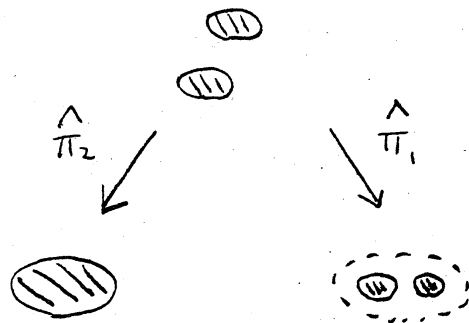
(1) D が $\hat{\pi}_2$ の臨界値を 2 つとも含むとすると、この 2 点を結ぶ D の内部 D° 内の弧で 2 重点の値を通らないものが存在する。この弧を f のグラフに持ち上げると $\hat{\pi}_2^{-1}(D^\circ) \cup \{0, -2\}$ 内のジョルダン曲線になり、それは $\hat{\pi}_2$ の臨界点 $\{0, -2\}$ を通り、2 重点を解消して現れた 2 点 $\{(-1 \pm i\sqrt{3})/2\}$ を分離する。一方 $\{(-1 \pm i\sqrt{3})/2\}$ 中心の 120 度回転である $\hat{I}_1 \hat{I}_2$ でのこのジョルダン曲線の像を考えると、 $\Delta \cap \hat{I}_1 \hat{I}_2(\Delta)$ は空でなくなり Δ が $\langle \hat{I}_1, \hat{I}_2 \rangle$ の基本領域であることに矛盾する。よって D は $\hat{\pi}_2$ の臨界値を高々 1 つしか含まない。



(2) (1) より、 D° 内のコンパクトな full 集合に対し、その $\hat{\pi}_2$ での逆像

もコンパクトな full 集合。またこの集合上 $\hat{\pi}_1$ は同相より、 D° 内のコンパクトな full 集合に対し、その f での像もコンパクトな full 集合。一方、方向性よりすべての $n \geq 0$ で $f^n(D)$ コンパクトな full 集合かつ nest するので、アトラクターもコンパクトな full 集合。リペラーは J によるアトラクターの像よりアトラクターもリペラーも full 集合。一方アトラクターとリペラーは f が接触条件をみたすときは 1 点 z_f のみで交わり、そうでないときは共通部分をもたない。よってそれらの補集合 Ω は連結集合。

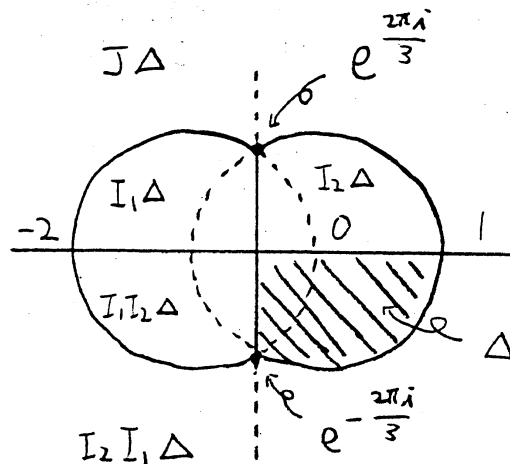
(3) $f(D) = J((D^\circ)^c)$ より $f(D)$ は閉円盤と同相より連結。 $f^{n+1}(D)$ が連結である必要十分条件は $f^n(D)$ が連結かつ $\hat{\pi}_2$ の臨界値を含むことである。また $f^n(D)$ が $\hat{\pi}_2$ の臨界値を含まないと任意の $m \geq n$ に対し、 $f^m(D)$ は $f^{m+1}(D)$ の 2 つの成分を含む。よってアトラクターの連結成分の数は非可算個になる。



Remark 3.1 一般にアトラクター $\Lambda_+(D)$ やリペラー $\Lambda_-(D)$ は方向性 D による。つまり対応 f だけから内在的に決まるものではない。

4 定理 1.1、1.2 の証明

Δ を複素平面上の閉集合で単位円と $-\frac{1}{2}$ から 1 までの実軸と $Re(x) = -\frac{1}{2}$ で囲まれた第 4 象限の領域とする。これは群 $\langle \hat{I}_1, \hat{I}_2 \rangle$ の x -球面への作用に関する基本領域になる。



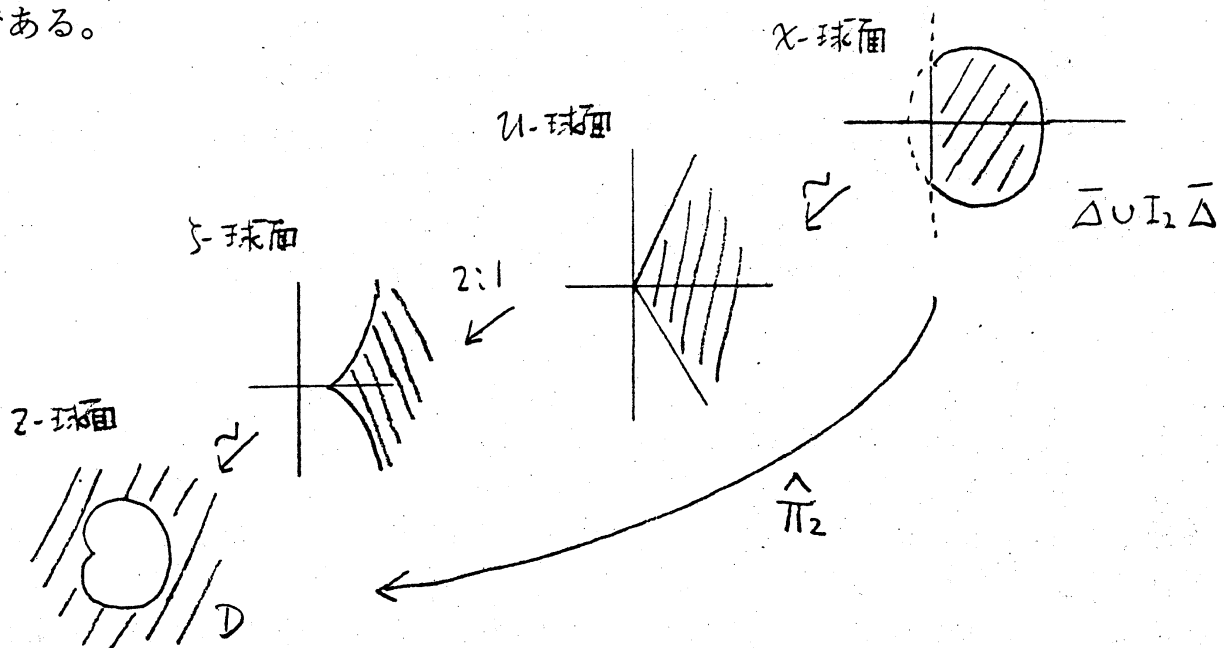
Lemma 4.1 $0 < k \leq 1$ かつ $a \neq 1$ は $|a - 4| \leq 3$ をみたすとする。このとき領域 $D = \hat{\pi}_2(\Delta)$ は方程式

$$\left(\frac{az+1}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{az+1}{z+1}\right)\left(\frac{aw-1}{w-1}\right) + \left(\frac{aw-1}{w-1}\right)^2 = 3k$$

で定義される対応 $f: z \rightarrow w$ の同変 (接触) 方向性を定義し、 $k = 1$ に限り接触点 $z_f = 0$ をもつ。

(証明)

$f(D) = (JD^\circ)^c$ より、 D が f の同変 (接触) 方向性を定義することと D° が J の基本領域の閉包を (接触点 z_f を除いて) 含むことは同値である。ここで2節でみた、 x -球面から z -球面への射影 $\hat{\pi}_2$ の、 u -球面と ζ -球面を経由する分解を思い出すと、 $\hat{\pi}_2(x) \in D^\circ$ と $x \in \Delta \cup \hat{I}_2(\Delta)$ は同値であり、さらにこの条件は、 $-\pi/3 \leq \arg(u) \leq \pi/3$ と同値になり、 $\operatorname{Re}(\zeta) \geq \sqrt{k + (\operatorname{Im}(\zeta))^2/3}$ と同値になる。よって ζ -平面において $\{1, a\}$ を固定点にもつ対合の基本領域の閉包が、領域 $\operatorname{Re}(\zeta) > \sqrt{k + \operatorname{Im}(\zeta)^2/3}$ に入るような a (と k) のときに、 D が f の同変 (接触) 方向性を定義する。特に a と k が仮定の条件をみたせば十分である。



Lemma 4.2 $1/4 < k \leq 1$ に対し、関数 $a_{\min}(k), a_{\max}(k)$ を次のように定義する。

$$a_{\min}(k) = 7 - 4\sqrt{3(1-k)}$$

$$a_{\max}(k) = \frac{9}{2}\sqrt{k} - 2 + \sqrt{3(1 - 3\sqrt{k} + \frac{11}{4}k)}$$

このとき条件 $2\sqrt{k} < a \leq a_{\max}(k)$ をみたす実数 a にたいし、方程式

$$\left(\frac{az+1}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{az+1}{z+1}\right)\left(\frac{aw-1}{w-1}\right) + \left(\frac{aw-1}{w-1}\right)^2 = 3k$$

で定義される対応 $f: z \rightarrow w$ は、ある閉区間 $[z_0, z_1]$ 上で単峰写像 (*unimodal*) な f^{-1} の枝をもつ (ここで閉区間 $[z_0, z_1]$ 上の単峰写像とは、閉区間 $[z_0, z_1]$ 上でただ1つ最大値をとり、 z_0 は固定点で z_1 は z_0 に移るような写像のこととする)。さらに $a_{\min}(k) \leq a \leq a_{\max}(k)$ ではこの閉区間は連結なアトラクターに含まれる。対応するリペラーも連結で閉区間 $[-z_0, -z_1]$ を含む。

1節で述べた主定理を以下示す。

Theorem 4.1 グラフがリーマン球面であるような可逆な3対写像 f が接触条件をみたすとする。さらに f の2重点は対合の固定点でないとする。そのような f は、 a をパラメーターにもつ方程式

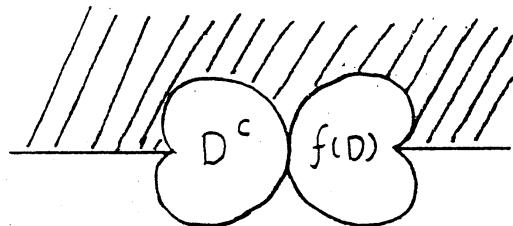
$$\left(\frac{az+1}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{az+1}{z+1}\right)\left(\frac{aw-1}{w-1}\right) + \left(\frac{aw-1}{w-1}\right)^2 = 3$$

で定義される2:2対応 $f: z \rightarrow w$ でかける。今パラメーター a が実数で $4 \leq a \leq 7$ とする。このときリーマン球面はそれぞれ f -完全不変な単連結開集合 Ω と閉集合 Λ に分割され、それぞれでの f の振る舞いは次の通り:

1. f の2つの枝が Ω 上1価に定まり、それらの作用はモジュラー群の上半平面への一次分数変換としての作用と双正則同値。
2. Λ は f -不変な連結閉集合 Λ_+ と、 f^{-1} -不変な連結閉集合 Λ_- の接触点での和集合でかける。 f の枝の1つは Λ_- を Λ_- に次数2で移し、 f の枝のもう1つは Λ_- を Λ_+ に同相に移す。同様に f^{-1} の枝の1つは Λ_+ を Λ_+ に次数2で移し、 f^{-1} の枝のもう1つは Λ_+ を Λ_- に同相に移す。

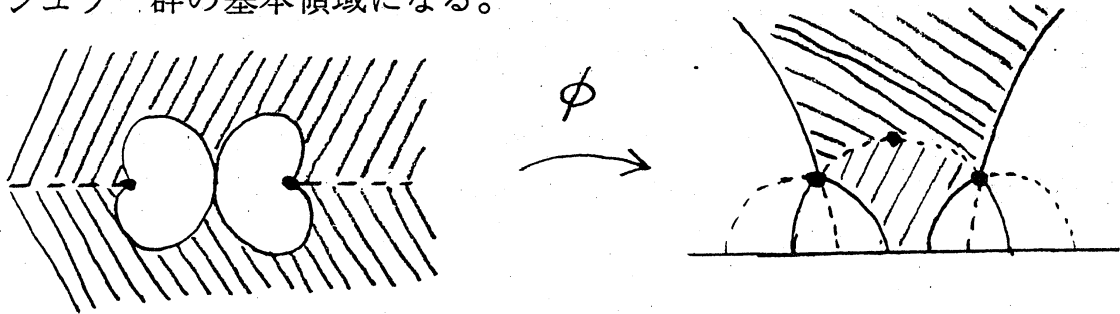
(証明)

仮定より、Theorem 3.1, Theorem 3.2, Lemma 4.1, Lemma 4.2 の条件をみたしている。よって $\Omega(D)$ は単連結。また f, f^{-1} の2重点 $\{\pm 1\}$ は $\Omega(D)$ に、 f, f^{-1} の臨界点は $\Lambda(D)$ に入ることが、Lemma 4.1 における f の方向性 D の構成からわかる。よって、 $\Omega(D)$ 上 f の2つの枝 f_1, f_2 が1価にとれる。よって $\Omega(D)$ 上 f は2元生成群の力学系と見て、 $f_1 f_2^{-1} f_1$ と $f_2^{-1} f_1$ が位数2と3なので、モジュラー群の作用と思える。 $\Omega(D)$ 上の f の基本領域は、Lemma 4.1 より、 $D \cap JD$ での J の基本領域より、次のようにかける。



次に $\Omega(D)$ から上半平面 H へのリーマン写像 ϕ をうまくとると、この ϕ によって、 $\Omega(D)$ 上のこのモジュラー群の作用が通常的作用になっていることを

示す。まず、 $\phi(\infty) = i$, $\phi(-1)$ が第 2 象限内の単位円周上にあるように ϕ を正規化する。このとき $\phi J \phi^{-1}(z) = -\frac{1}{z}$ となり、またパラメータ a が実数より、複素共役が ϕ で $\frac{1}{z}$ に移る。このことから、 $\Omega(D)$ と実軸の交わりは \mathbb{H} と単位円周の交わりに移ることがわかる。また第 1 象限内の単位円周の $\phi f^{-1} \phi$ での像とその $-\frac{1}{z}$ での像は $\phi(D \cap JD)$ になる (下図参照)。この領域は上半平面 \mathbb{H} 内の 4 つの測地線と実軸で囲まれているが、実軸に含まれている辺がもしあれば、 ϕ^{-1} で $z_f = 0$ に移るので、単葉関数の一般論より、矛盾。つまり実際はモジュラー群の基本領域になる。



Theorem 4.2 グラフがリーマン球面であるような可逆な 3 対写像 f で、 f の 2 重点は対合の固定点でないとする。そのような f は、 a と k をパラメータにもつ方程式

$$\left(\frac{az+1}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{az+1}{z+1}\right)\left(\frac{aw-1}{w-1}\right) + \left(\frac{aw-1}{w-1}\right)^2 = 3k$$

で定義される 2 : 2 対応 $f : z \rightarrow w$ でかける。このとき $1/4 \leq k \leq 1$ に対し、関数 $a_{\min}, a_{\max} : [1/4, 1] \rightarrow [1, 7]$ が存在し、 $a_{\min}(1/4) = a_{\max}(1/4) = 1$, $a_{\min}(1) = 4, a_{\max}(1) = 7$ かつ $1 < a_{\min}(k) < a_{\max}(k)$ をみだし、任意の $1/4 < k < 1$ と $a_{\min}(k) \leq a \leq a_{\max}(k)$ に対し、リーマン球面は f -完全不変な 2 重連結開集合 Ω と閉集合 Λ に分割され、それぞれでの f の振る舞いは次の通り：

1. f の Ω 上での作用は不連続。
2. Λ は f -不変な連結閉集合 Λ_+ と、 f^{-1} -不変な連結閉集合 Λ_- の disjoint な和集合である。充填ジュリア集合 K_c が連結であるような 2 次多項式 $q_c(z) = z^2 + c$ と Λ_- の近傍で hybrid 同値な f の枝が存在し、この hybrid 同型で Λ_- と K_c は擬等角同値になる。同様に、同じ 2 次多項式 $q_c(z) = z^2 + c$ と Λ_- の近傍で hybrid 同値な f^{-1} の枝が存在し、この hybrid 同型で Λ_+ と K_c は擬等角同値になる。 f のもう 1 つの枝は Λ_- を Λ_+ に等角に移し、 f^{-1} のもう 1 つの枝は Λ_+ を Λ_- に等角に移す。

(証明)

仮定より、Theorem 3.1, Theorem 3.2, Lemma 4.1, Lemma 4.2 の条件をみ

たしている。また方向性の定義より、多項式類似写像の理論が使えて、アトラクター、リペラーの近傍で2次多項式の逆写像と、擬等角同値になる。この際、アトラクターとリペラーは対合 J でうつりあうことから、両方同じ2次多項式がとれることに注意する。

References

- [1] S.Bullett and C.Penrose: Mating quadratic maps with the modular group, Invent math.115(1994)483-511.
- [2] R.McGehee: Attractors for Closed Relations on Compact Hausdorff Spaces, Indiana Univ. Math. Journal, Vol.41 No.4(1992)1165-1209.