

可能性情報のもとでのポートフォリオ選択

大阪大学大学院工学研究科 乾口 雅弘 (Masahiro Inuiguchi)
大阪大学大学院工学研究科 谷野 哲三 (Tetsuzo Tanino)

概要

本研究では、各証券の収益率がファジィ数として与えられた可能性ポートフォリオ選択問題において、分散投資解を導く最大リグレット最小化を取り上げる。従来、収益率が互いに独立な場合に、帰着問題が線形計画問題になることが示されているが、収益率間に従属性が存在するより一般的ないくつかの場合にも、帰着問題が線形計画問題になることを示す。

Key Words: ポートフォリオ選択, 最大リグレット最小化, 線形計画法, 可能性分布, シナリオ分解

1 はじめに

不確実性のもとでの計画問題の一つに、ポートフォリオ選択問題がある。不確実な証券の収益率を確率分布として表現し、確率計画法が適用されてきた [1]。不確実性のもとでの計画問題を扱う別の手法として、ファジィ数理計画法がある。一般に、確率計画法よりファジィ数理計画法を適用した方が、帰着問題が簡単になり、より容易に解ける場合が多い [2]。ところが、従来のファジィ数理計画法が主として不確実なパラメータが互いに独立である場合を取り扱っており、ポートフォリオ選択問題へ適用すると、少数の証券に集中投資する解が得られる。ポートフォリオ理論では、リスク軽減のため、分散投資が妥当とされており、集中投資解が得られる従来のファジィ数理計画法の適用は好ましくない。

分散投資解が得られる従来の確率計画法と同じ考え方で定式化しているにもかかわらず、ファジィ数理計画法では集中投資解が得られることから、この相違は採用した決定方式にあるのではなく、測度の性質にあると考えられる [3]。すなわち、収益率が互いに独立で同じ確率分布に従う二つの証券への投資を考えると、1対1の割合で両方に投資した方が、いずれか一方に全額投資するよりも、収益の分散は小さくなるという確率測度の性質から分散投資解が得られたのであって、採用した決定方式自体には、分散投資を好む性質はない。

このような観点から、著者ら [3] は、分散投資を好む決定方式として、最大リグレット最小化基準を採用することにより、ポートフォリオ選択問題にファジィ数理計画法を適用しても分散投資解が得られることを示すとともに、帰着問題が線形計画問題になることを示した。しかし、この方法では、従来のファジィ線形計画法と同様に、収益率間の独立性を仮定していた。独立である場合しか取り扱えないのでは、柔軟性に欠ける反面、一般に独立でない場合の帰着問題は複雑になる。

本報告では、ファジィポートフォリオ選択問題において、収益率間に従属性が存在するいくつかの場合を取り上げる。これらの場合に、最大リグレット最小化基準を導入しても、帰着問題の線形性が損なわれないことを示す。

2 ファジィポートフォリオ選択問題と最大リグレット最小化

2.1 一般の場合の帰着問題

収益率を可能性変数 γ_i により表現し、投資配分割合を x_i とすると、ポートフォリオ選択問題は、

$$\begin{aligned} & \text{maximize } \gamma^T \mathbf{x} \\ & \text{sub. to } \mathbf{e}^T \mathbf{x} = 1, \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

と書ける。ここで、 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)^T$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T$ であり、可能性変数ベクトル γ は、ファジィ集合 C に制限されるものとする。任意の $h \in (0, 1]$ について、ファジィ集合 C の h -レベル集合 $[C]_h = \{\mathbf{c} \mid \mu_C(\mathbf{c}) \geq h\}$ は有界閉集合になると仮定する。簡便のため、式(1)の制約条件を X と表す。

ある投資配分割合 \mathbf{x} でいくつかの証券へ投資した後、可能性変数ベクトル γ の実現値 \mathbf{c} を知ったとき、リグレットを $\rho = \max_{\mathbf{y} \in X} \mathbf{c}\mathbf{y} - \mathbf{c}\mathbf{x}$ と定義できる。決定段階では、可能性変数ベクトル γ の実現値を知ることはできないので、リグレットも不確実性を伴う。すなわち、 ρ も可能性変数となる。この可能性変数 ρ を制限する可能性分布 μ_R は、拡張原理より、 $r \geq 0$ に対して、

$$\mu_R(\mathbf{x}^0)(r) = \sup_{\mathbf{y} \in X} \mu_C(\mathbf{c}) \quad (2)$$

$$r = \max_{\mathbf{y} \in X} \mathbf{c}\mathbf{y} - \mathbf{c}\mathbf{x}^0$$

と定義される。これを用いて、リグレット最小化という概念により、ファジィポートフォリオ選択問題を定式化することができる。リグレットが z 以下である必然性の度合いが h 以上のもので、 z を最小化する満足水準最適化モデルを導入すると、式(1)の問題は、

$$\begin{aligned} & \text{minimize } z \\ & \text{sub. to } N_R(\mathbf{x})(\{r \mid r \leq z\}) \geq h^0 \\ & \quad \mathbf{e}^T \mathbf{x} = 1, \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

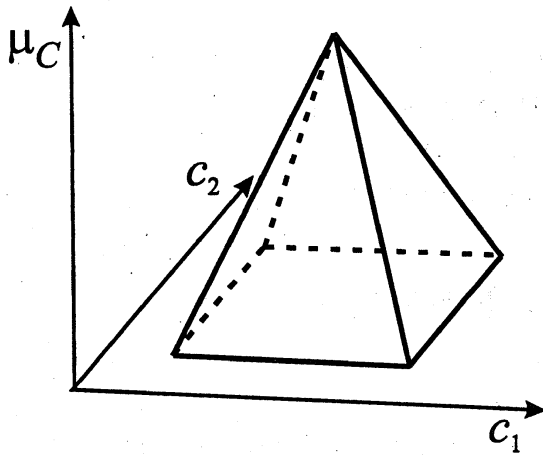
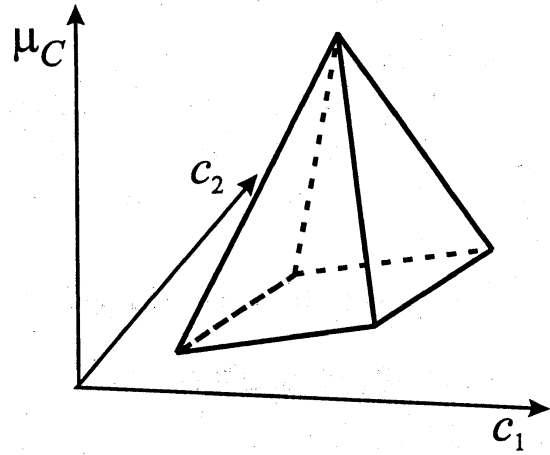
と定式化できる。ここで、必然性測度 $N_R(\mathbf{x})(\{r \mid r \leq z\})$ は次のように定められる。

$$N_R(\mathbf{x})(\{r \mid r \leq z\}) = \inf_{r > z} (1 - \mu_R(\mathbf{x})(r)) \quad (4)$$

式(3)の問題は、次の問題と等価になる。

$$\begin{aligned} & \text{minimize } z \\ & \text{sub. to } \max_{\mathbf{c} \in \text{cl}(C)_{1-h}} \mathbf{c}(\mathbf{e}_i - \mathbf{x}) \leq z, i = 1, 2, \dots, n \\ & \quad \mathbf{e}^T \mathbf{x} = 1, \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、 \mathbf{e}_i は第 i 成分を 1 とする n 次元単位ベクトルである。また、 $(C)_h = \{\mathbf{c} \mid \mu_C(\mathbf{c}) > h\}$ であり、 $\text{cl } Q$ は集合 Q の閉包を表す。一般に、緩和法を適用して、繰り返し部分問題を解くことにより、この問題を解くことができる。しかし、 C が特別な場合には、より容易に解くことも可能となる。以下では、帰着問題が線形計画問題となる場合について考察する。

図 1: 相互関係がない場合 ($n = 2$)図 2: 斜めに相互関係がない場合 ($n = 2$)

2.2 線形計画問題への帰着できる場合

2.2.1 相互関係がない場合

n 証券の収益率を制限するファジィ集合 C のメンバシップ関数 μ_C が、図 1 のように、

$$\mu_C(\mathbf{c}) = \min_{i=1,2,\dots,n} \mu_{C_i}(c_i) \quad (6)$$

と表現できるとき、 γ の各成分間には相互関係がないという。この場合、

$$c_i^L(h) = \inf\{c_i \mid \mu_{C_i}(c_i) > h\} \quad (7)$$

$$c_i^R(h) = \sup\{c_i \mid \mu_{C_i}(c_i) > h\} \quad (8)$$

と定義することにより、問題 (3) は次の線形計画問題に帰着される [3].

$$\begin{aligned} & \text{minimize } z \\ & \text{sub. to } c_i^R(1-h)(1-x_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j^L(1-h)x_j \leq z, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & \quad \quad \quad \mathbf{e}^T \mathbf{x} = 1, \quad \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

2.2.2 斜めに相互関係がない場合

メンバシップ関数 μ_C が、正則な $n \times n$ 行列 $D = (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n)$ の各列 \mathbf{d}_i を用いて、図 2 のように、

$$\mu_C(\mathbf{c}) = \min_{i=1,2,\dots,n} \mu_{C_i}(\mathbf{c}^T \mathbf{d}_i) \quad (10)$$

と表現できるとき、 γ の各成分間には斜めに相互関係がないということにする。この場合、問題 (3) は次の線形計画問題に帰着される。

$$\begin{aligned}
& \text{minimize } z \\
& \text{sub. to } (\mathbf{c}^R(1-h))^T \mathbf{p}_i^+ + (\mathbf{c}^L(1-h))^T \mathbf{p}_i^- \leq z, \quad i = 1, 2, \dots, n \\
& \quad D^{-1} \mathbf{e}_i - \mathbf{q} = \mathbf{p}_i^+ - \mathbf{p}_i^-, \quad i = 1, 2, \dots, n \\
& \quad \mathbf{e}^T D \mathbf{q} = 1, \quad D \mathbf{q} \geq 0, \quad \mathbf{p}_i^+, \mathbf{p}_i^- \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n
\end{aligned} \tag{11}$$

3 シナリオ分解表現と最大リグレット最小化

3.1 一般の場合の帰着問題

ファクターモデル [1] で取り扱われているように、各証券の収益率は経済指標や為替レート、GDP などに依存すると考えることができる。また、各証券の収益率に対して、複数の専門家や仮説による異なった情報や結果が得られる場合もある。このような場合、経済指標、為替レート、GDP、専門家、仮説などをシナリオ変数 (ベクトル) \mathbf{s} として、証券の収益率のファジィ集合を \mathbf{s} に依存して、 $C(\mathbf{s})$ と表現することが考えられる。

このとき、 $C(\mathbf{s})$ のメンバシップ関数 $\mu_C(\mathbf{s})$ は、 \mathbf{s} の実現値に依存した条件付き可能性分布となる。したがって、各シナリオの実現可能性を示す周辺可能性分布 $\mu_S(\mathbf{s})$ を用いることにより、シナリオと収益率との同時可能性分布は、

$$\mu_{(S,C)}(\mathbf{s}, \mathbf{c}) = \min(\mu_S(\mathbf{s}), \mu_C(\mathbf{s})(\mathbf{c})) \tag{12}$$

と得られる。また、シナリオに応じた任意の実行可能解 \mathbf{x}^0 におけるリグレットの分布は、

$$\mu_{R(\mathbf{x}^0|\mathbf{s})}(r) = \sup_{\mathbf{c} = \max_{\mathbf{y} \in X} \mathbf{c}\mathbf{y} - \mathbf{c}\mathbf{x}^0} \mu_C(\mathbf{s})(\mathbf{c}) \tag{13}$$

となるので、シナリオとリグレットとの同時可能性分布は、

$$\mu_{(S,R(\mathbf{x}^0))}(\mathbf{s}, r) = \min(\mu_S(\mathbf{s}), \mu_{R(\mathbf{x}^0|\mathbf{s})}(r)) \tag{14}$$

となり、リグレットの周辺可能性分布は次式で与えられる。

$$\mu_{R(\mathbf{x}^0)}(r) = \sup_{\mathbf{s}} \mu_{(S,R(\mathbf{x}^0))}(\mathbf{s}, r) \tag{15}$$

したがって、問題 (3) を変形すると、

$$\begin{aligned}
& \text{minimize } z \\
& \text{sub. to } \max_{\mathbf{c} \in \text{cl}(C(\mathbf{s}))_{1-h}} \mathbf{c}(\mathbf{e}_i - \mathbf{x}) \leq z, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \forall \mathbf{s} \in (S)_{1-h} \\
& \quad \mathbf{e}^T \mathbf{x} = 1, \quad \mathbf{x} \geq 0
\end{aligned} \tag{16}$$

となる。ただし、 $(S)_{1-h} = \{\mathbf{s} \mid \mu_S(\mathbf{s}) > 1-h\}$ と定義される。

3.2 線形計画問題へ帰着できる場合

3.2.1 離散シナリオ変数の場合

経済状態などのシナリオ変数を定性的に「良い」、「悪い」と分けたり、複数の専門家の情報や複数の仮説に基づく場合には、シナリオ変数 s は離散値をとる。特に、この場合、得られている情報は、

$$\text{If } s = s_k, \text{ then } \gamma \in C^k, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (17)$$

のように、有限個 (m 個) の If... then... ルールで表現することができる。ここで、 $C^k = C(s_k)$ である。

問題 (16) は、問題 (6) に $\forall s \in (S)_{1-h}$ が加わった形になっていることと、 $(S)_{1-h}$ の要素が有限個であることに注意すると、 C^k が式 (6) や式 (10) の C ように表される場合には、問題 (16) は線形計画問題に帰着される。実際、 μ_{C^k} が、

$$\mu_{C^k}(c) = \min_{i=1,2,\dots,n} \mu_{C_i^k}(c_i) \quad (18)$$

と表されるとき、 $K(h) = \{k \mid \mu_S(s_k) > h\}$ と定めると、問題 (16) は線形計画問題、

$$\begin{aligned} & \text{minimize } z \\ & \text{sub. to } c_i^{kR}(1-h)(1-x_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j^{kL}(1-h)x_j \leq z, \\ & \qquad \qquad \qquad i = 1, 2, \dots, n, \quad k \in K(1-h) \end{aligned} \quad (19)$$

$$e^T x = 1, \quad x \geq 0$$

に帰着できる。ただし、 $c_i^{kL}(h)$ 、 $c_i^{kR}(h)$ は次式で定められる。

$$c_i^{kL}(h) = \inf\{c_i \mid \mu_{C_i^k}(c_i) > h\} \quad (20)$$

$$c_i^{kR}(h) = \sup\{c_i \mid \mu_{C_i^k}(c_i) > h\} \quad (21)$$

3.2.2 ファジィルールに基づく内挿表現による場合

シナリオ変数が連続である場合、 $\mu_C(s)$ を s と c との関数として完全に表現することは煩雑であり、容易でないことが多い。現実には、いくつかの特徴的な場合を選び、線形補完により全体を表現することが考えられる。本報告では、このような内挿モデルとして、簡略型ファジィ推論モデル [4] と同様なファジィルールに基づくモデルを考える。すなわち、 v 次元のシナリオ変数ベクトル s の各成分 s_l が取りうる領域 ($\subseteq \mathbf{R}$) を、

$$(i) \quad \sum_{j=1}^{m(l)} \mu_{S_j^l}(s_l) = 1,$$

$$(ii) \quad |\{l \mid \mu_{S_j^l}(s_l) > 0\}| \leq 2$$

なる $m(l)$ 個の正規かつ凸なファジィ集合 S_j^l でファジィ分割することにより、シナリオ変数ベクトルの取りうる範囲を $m (= \prod_{l=1}^v m(l))$ 個にファジィ分割し、各ファジィ領域の代表点 (メンバシップ値が 1 となる点) に対する、収益率のファジィ集合を定める。これにより、

$$\text{If } s \in S_k, \text{ then } \gamma \in C^k, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (22)$$

なる m 個のファジィルールが得られる。ただし、商と余りをとる演算記号を、それぞれ、 $\%$, mod とし、

$$j(k:l) = (\kappa(k:l) \text{ mod } m(l)) + 1 \quad (23)$$

$$\kappa(k:l) = \begin{cases} k; & l = v \text{ のとき,} \\ \kappa(k:l+1) \% m(l); & l < v \text{ のとき,} \end{cases} \quad (24)$$

と定義すると、ファジィ集合 S_k は

$$\mu_{S_k}(s) = \prod_{l=1}^v \mu_{S_j^{(k:l)}}(s_l) \quad (25)$$

なるメンバシップ関数で定められる。結局、任意のシナリオ s に対する収益率のファジィ集合は次式で与えられる。

$$C(s) = \sum_{k=1}^m \mu_{S_k}(s) C^k \quad (26)$$

したがって、任意のシナリオ s に対する収益率のファジィ集合 $C(s)$ は、 $\mu_{S_k}(s) > 0$ なる 2^v 個のルールで定められる。

上述のファジィルールによる内挿表現のもとで、次の補題が得られる。

補題 1 任意の $l^0 \in \{1, 2, \dots, v\}$ について、 $\mu_{S_j^{l^0}}(s_{l^0}^0) < 1$, $j = 1, 2, \dots, m(l^0)$ なる $s_{l^0}^0$ を考える。仮定 (i), (ii) より、 $\mu_{S_j^{l^0}}(s_{l^0}^0) > 0$ なる j が 2 個存在するので、それぞれ、 j_1, j_2 とする。このとき、

$$\mu_{S_{j_1}^{l^0}}^{\text{new}}(s_{l^0}^0) = \begin{cases} \mu_{S_{j_1}^{l^0}}^{\text{old}}(s_{l^0}^0); & \mu_{S_{j_2}^{l^0}}^{\text{old}}(s_{l^0}^0) = 0 \text{ のとき,} \\ f_1 \left(\mu_{S_{j_1}^{l^0}}^{\text{old}}(s_{l^0}^0) \right); & \text{その他,} \end{cases} \quad (27)$$

$$\mu_{S_{j_2}^{l^0}}^{\text{new}}(s_{l^0}^0) = \begin{cases} \mu_{S_{j_2}^{l^0}}^{\text{old}}(s_{l^0}^0); & \mu_{S_{j_1}^{l^0}}^{\text{old}}(s_{l^0}^0) = 0 \text{ のとき,} \\ f_2 \left(\mu_{S_{j_2}^{l^0}}^{\text{old}}(s_{l^0}^0) \right); & \text{その他,} \end{cases} \quad (28)$$

$$m^{\text{new}}(l^0) = m^{\text{old}}(l^0) + 1 \quad (29)$$

とメンバシップ関数 $\mu_{S_{j_1}^{l^0}}$, $\mu_{S_{j_2}^{l^0}}$ および $m(l^0)$ を更新した後、次のメンバシップ関数をもつファジィ集合を新たに追加する。

$$\mu_{S_{m^{\text{new}}(l^0)}^{l^0}}^{\text{new}}(s_{l^0}^0) = 1 - \sum_{j=1}^{m^{\text{new}}(l^0)} \mu_{S_j^{l^0}}^{\text{new}}(s_{l^0}^0) \quad (30)$$

ただし、 $f_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $i = 1, 2$ は、次式で定義される。

$$f_i(r) = \left(r - \mu_{S_{j_i}^{l^0}}^{\text{old}}(s_{l^0}^0) \right) / \left(1 - \mu_{S_{j_i}^{l^0}}^{\text{old}}(s_{l^0}^0) \right) \quad (31)$$

さらに、更新したファジィ分割に基づく m^{new} 個のファジィルールにおける C^k を次のように、更新・追加する。

$$(C^k)^{\text{new}} = \begin{cases} (C^{p(k)})^{\text{old}}; & j^{\text{new}}(k:l^0) < m^{\text{new}}(l^0) \text{ のとき,} \\ \sum_{i=1}^2 \mu_{S_{j_i}^{l^0}}^{\text{old}}(s_{l^0}^0) (C^{q(k:j_i)})^{\text{old}}; & j^{\text{new}}(k:l^0) = m^{\text{new}}(l^0) \text{ のとき,} \end{cases} \quad (32)$$

ただし, $p(k)$, $q(k : j_i)$ は次のように定められる.

$$p(k) = \sum_{l=1}^v (j(k:l) - 1) \prod_{z=l+1}^v m^{\text{old}}(z) + 1 \quad (33)$$

$$q(k : j_i) = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq l^0}}^v (j(k:l) - 1) \prod_{z=l+1}^v m^{\text{old}}(z) + (j_i - 1) \prod_{z=l_0+1}^v m^{\text{old}}(z) + 1 \quad (34)$$

このとき, 更新前と更新後の任意のシナリオ s に対する収益率のファジィ集合は一致する. すなわち, 次式が成立する.

$$C^{\text{new}}(s) = C^{\text{old}}(s) \quad (35)$$

(証明) 定義より, $\mu_{S_{j_1}^{l^0}}^{\text{old}}(s_{l^0}) > 0$ かつ $\mu_{S_{j_2}^{l^0}}^{\text{old}}(s_{l^0}) > 0$ なるシナリオ s についてのみ, 式 (35) を示せば十分である. 定義より,

$$C^{\text{old}}(s) = \sum_{i=1}^2 \mu_{S_{j_i}^{l^0}}^{\text{old}}(s_{l^0}) \sum_{\substack{k=1 \\ j^{\text{new}}(k:l^0)=j_i}}^{m^{\text{new}}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq l^0}}^v \mu_{S_{j^{\text{new}}(k:l)}^{l^0}}^{\text{old}}(s_l) (C^{p(k)})^{\text{old}} \quad (*)$$

一方, 定義および, $j(k_1 : l^0) = j_i$, $j(k_1 : l) = j(k_2 : l)$, $\forall l \neq l^0$ のとき, $p(k_1) = q(k_2 : j_i)$ であることより,

$$\begin{aligned} C^{\text{new}}(s) &= \sum_{i=1}^2 \mu_{S_{j_i}^{l^0}}^{\text{new}}(s_{l^0}) \sum_{\substack{k=1 \\ j^{\text{new}}(k:l^0)=j_i}}^{m^{\text{new}}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq l^0}}^v \mu_{S_{j^{\text{new}}(k:l)}^{l^0}}^{\text{new}}(s_l) (C^k)^{\text{new}} \\ &\quad + \mu_{S_{m^{\text{new}}(l^0)}^{l^0}}^{\text{new}}(s_{l^0}) \sum_{\substack{k=1 \\ j^{\text{new}}(k:l^0)=m^{\text{new}}(l^0)}}^{m^{\text{new}}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq l^0}}^v \mu_{S_{j^{\text{new}}(k:l)}^{l^0}}^{\text{new}}(s_l) (C^k)^{\text{new}} \\ &= \sum_{i=1}^2 f_i \left(\mu_{S_{j_i}^{l^0}}^{\text{old}}(s_{l^0}) \right) \sum_{\substack{k=1 \\ j^{\text{new}}(k:l^0)=j_i}}^{m^{\text{new}}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq l^0}}^v \mu_{S_{j^{\text{new}}(k:l)}^{l^0}}^{\text{old}}(s_l) (C^{p(k)})^{\text{old}} \\ &\quad + \left(1 - \sum_{i=1}^2 f_i \left(\mu_{S_{j_i}^{l^0}}^{\text{old}}(s_{l^0}) \right) \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{\substack{k=1 \\ j^{\text{new}}(k:l^0)=j_i}}^{m^{\text{new}}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq l^0}}^v \mu_{S_{j^{\text{new}}(k:l)}^{l^0}}^{\text{old}}(s_l) \mu_{S_{j_i}^{l^0}}^{\text{old}}(s_{l^0}) (C^{p(k)})^{\text{new}} \right) \end{aligned}$$

f_i の定義, および, $f_1 \left(\mu_{S_{j_1}^{l^0}}^{\text{old}}(s_{l^0}) \right) f_2 \left(\mu_{S_{j_2}^{l^0}}^{\text{old}}(s_{l^0}) \right) = 0$ となることより, $C^{\text{new}}(s)$ を更に変形すれば, 式 (*) の右辺になり, 補題が得られる. (証明終)

補題 1 の m^{new} 個のファジィルールによる表現は, 元の m^{old} 個のファジィルールによる表現より冗長になっている. 補題 1 より, 次の定理が得られる.

定理 1 $\mu_{S_k}^{\text{old}}(s) < 1$, $k = 1, 2, \dots, m^{\text{old}}$ なる s^0 について, $\mu_{S_k}^{\text{new}}(s^0) = 1$ なる $k \in \{1, 2, \dots, m^{\text{new}}\}$ が存在し, すべてのシナリオ s について, $C^{\text{new}}(s) = C^{\text{old}}(s)$ となるような m^{new} 個のファジィルールを構成することができる.

(証明) $s^0 = (s_1^0, s_2^0, \dots, s_v^0)$ とすると, $l = 1, 2, \dots, v$ の順に, $\mu_{s_j^0}^{\text{old}}(s_l^0) < 1$, $j = 1, 2, \dots, m^{\text{old}}(l)$ であれば, 補題 1 に基づき, ファジィルールを更新していけば良い.

(証明終)

さて, 与えられた m 個のファジィルールのファジィ集合 C^k , $k = 1, 2, \dots, m$ が, それぞれ, 任意の $h \in (0, 1]$ について, $[C^k]_h$ が有界閉集合となり, 式 (18) のように表されるとすると, $C(s)$ についても, 任意の $h \in (0, 1]$ について, $[C(s)]_h$ が有界閉集合となり,

$$\mu_{C(s)}(c) = \min_{i=1,2,\dots,n} \mu_{C_i(s)}(c_i) \quad (36)$$

と表せる. ただし, $C_i(s)$ は次のように定義される.

$$C_i(s) = \sum_{k=1}^m \mu_{S_k}(s) C_i^k \quad (37)$$

このとき, 問題 (16) は次の問題と等価になる.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } z \\ & \text{sub. to } c_i^R[s](1-h)(1-x_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j^L[s](1-h)x_j \leq z, \\ & \quad \quad \quad i = 1, 2, \dots, n, \forall s \in (S)_{1-h} \\ & \quad \quad \quad e^T x = 1, x \geq 0 \end{aligned} \quad (38)$$

ただし, $c_i^R[s](h)$, $c_i^L[s](h)$ は次のように定義される.

$$c_i^L[s](h) = \inf\{c_i \mid \mu_{C_i(s)}(c_i) > h\} \quad (39)$$

$$c_i^R[s](h) = \sup\{c_i \mid \mu_{C_i(s)}(c_i) > h\} \quad (40)$$

$\mu_{S^k}(s) = 1$ なる任意の s を $\hat{s}^k = (\hat{s}_1^k, \hat{s}_2^k, \dots, \hat{s}_v^k)$ と表記すると, 次の定理が得られる.

定理 2 任意のシナリオ s について,

$$L(s) = \{k \mid \mu_{S^k}(s) > 0\} \quad (41)$$

と定義すると, すべての $k \in L(s^0)$ について, $s = \hat{s}^k$ を代入した不等号,

$$c_i^R[s](1-h)(1-x_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j^L[s](1-h)x_j \leq z \quad (42)$$

が成立するとき, $s = s^0$ を代入した式 (42) も成立する.

一般に, すべての $k \in L(s^0)$ について, $s = \hat{s}^k$ を代入した式 (42) が成立するとき, $L(s) = L(s^0)$ なる任意の s について, 式 (42) が成立する.

(証明) 定義より,

$$\begin{aligned} c_i^L[s^0](h) &= \sum_{k \in L(s^0)} \mu_{S^k}(s^0) c_i^L[\hat{s}^k](h) \\ c_i^R[s^0](h) &= \sum_{k \in L(s^0)} \mu_{S^k}(s^0) c_i^R[\hat{s}^k](h) \end{aligned}$$

となり, $\sum_{k \in L(s^0)} \mu_{S^k}(s^0) = 1$ となることより明らかである. また, 定理の後半は, 前半より明らかである. (証明終)

μ_S の h -レベル集合 $[S]_h$ が任意の $h \in (0, 1]$ に対して有界閉集合となり,

$$\mu_S(s) = \min_{l=1,2,\dots,v} \mu_{S_l}(s_l) \quad (43)$$

と表せる場合を考える.

$$s_l^L(h) = \inf\{s_l \mid \mu_{S_l}(s_l) > h\} \quad (44)$$

$$s_l^R(h) = \sup\{s_l \mid \mu_{S_l}(s_l) > h\} \quad (45)$$

$$K_+(h) = \{k \mid \exists s \in \text{cl}(S)_h, \mu_{S^k}(s) > 0\} \quad (46)$$

と定め, $k \in K_+(h)$ について, $s^k(h) = (s_1^k(h), s_2^k(h), \dots, s_v^k(h))$ を次のように定義する.

$$s_i^k(h) = \begin{cases} \hat{s}_i^k; & \exists s = (s_1, s_2, \dots, s_v) \in \text{cl}(S)_h, \mu_{S^k}(s) = 1 \text{ のとき,} \\ s_i^L(h); & \nexists s = (s_1, s_2, \dots, s_v) \in \text{cl}(S)_h, \mu_{S^k}(s) = 1 \\ & \text{かつ } \mu_{S^k}(s_i^L(h)) \geq \mu_{S^k}(s_i^R(h)) \text{ のとき,} \\ s_i^R(h); & \text{その他,} \end{cases} \quad (47)$$

定理 1, 2 より, $k \in K_+(1-h)$ なるすべての $s^k(1-h)$ を考えればよいから, 問題 (16) は次の問題に帰着される.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } z \\ & \text{sub. to } c_i^R[C(s^k(1-h))](1-x_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j^L[C(s^k(1-h))]x_j \leq z, \\ & \quad \bullet \\ & \quad \quad \quad i = 1, 2, \dots, n, k \in K_+(1-h) \\ & e^T x = 1, x \geq 0 \end{aligned} \quad (48)$$

4 おわりに

ファジィポートフォリオ選択問題において, 収益率間に従属性が存在するいくつかの場合を取り上げ, これらの場合にも, 最大リグレット最小化基準に基づいた問題が, 線形計画問題に帰着されることを示した. 提案手法の有用性の検討や, 帰着問題の線形性を損なわない範囲での最大リグレット最小化基準の一般化などが今後の課題となろう.

参考文献

- [1] 今野浩: “理財工学 I : 平均・分散モデルとその拡張”, 日科技連 (1995).
- [2] 乾口雅弘: “多様化時代の数理計画法 第 5 回 確率計画法 v.s. 可能性計画法”, オペレーションズ・リサーチ, Vol.41, No.11, pp.641-645 (1996).
- [3] M. Inuiguchi and M. Sakawa: “Portfolio selection under independent possibilistic information”, *Proceedings of the Fifth IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 187-193 (1996).
- [4] 市橋秀友: “ニューロ的的手法によるファジィルールの調整”, 日本ファジィ学会誌, Vol.5, No. 2, pp.191-203 (1993).