数理解析研究所講究録
1043 巻 1998 年 122-127

最適問題における決定ベクトルの‘高効率領域’とその応用

李雪*, 山崎源治†, 飯村清明‡

High-efficiency range of decision vectors in optimization problems

Li Xue*, YAMAZAKI Genji†, IIMURA Kiyoaki‡

Abstract

The three fundamental evaluation criteria, (i) *the maximum-production rate criterion*, (ii′) *the minimum-cost one*, and (iii) *the maximum-profit-rate one*, have been utilized in manufacturing optimization, especially, in the optimal machining speed problems of machine tools. It is well-known that the optimal machining speed under (iii) lies between those under (i) and (ii′). A speed range between the two optimal speeds under (i) and (ii′) is called ‘*high-efficiency range.*’ The main purpose of this paper is to extend such property to more general OR models (including stochastic ones). To do this, we introduce (ii) *the maximum-unit-profit criterion,* instead of (ii′). The (ii) is a generalization of (ii′). It is shown that if the dimension of a decision vector is one or two then there exists a high-efficiency range for some special cases which are of great importance in practice. As an application, we apply some results to the optimal numbers of AGVs problem and the machining speed problem.

Keywords: Optimization problem, Decision vector, High-efficiency range, Peaked function.

1 序論

いろいろな分野で生じる意思決定問題を‘解く’ということは，大抵の場合これを数学的に定式化し，最適解を求めることに帰着する．この‘最適解を求める’ことは，大ざっぱにいうと個々の問題で必然的に課せられる制約条件の下で‘目標関数’を最大あるいは最小にする決定ベクトルを求めることである．この目標関数は，一つの評価基準あるいは幾つかの評価基準の混合により定められる．得られた最適解が実際に受け入れられるか否か，はその評価基準の選択による，といっても過言ではない．有効で重要な評価基準は何か？機械加工の最適切削速度問題では，評価基準の選択が古くから議論され，結果として次の三つが有効であることが認められ，使われてきている．

*東京都立科学技術大学大学院工学研究科電子情報システム工学専攻
†東京都立科学技術大学生産情報システム工学科
‡東京都立科学技術大学一般教育自然系

(i) 最大能率基準，(ii′) 最小費用基準，(iii) 最大利潤率基準．

単一工程機械加工におけるこの三つの基準下での最適切削速度を順に v_r，v_c，v_pで表す．この時，次の不等式が成立することはよく知られている．

$$v_c < v_p < v_r. \tag{1.1}$$

この不等式は応用上極めて重要である．なぜなら，(1.1) は切削速度は領域 (v_c, v_r) 内に設定すべきであることを示唆しているからである．実際上は，v_pが最も重要な速度かもしれないが，これを厳密に求めることは，v_c，v_rを求めることよりもはるかに難しい．(1.1) は，この v_pが ‘切削速度の高効率領域’ と呼ばれる $[v_c, v_r]$ 内に存在することを保証している．

問題のモデリングの立場では，この最適切削速度問題はいわゆる決定論的モデルに属する．確率モデルを用いた最適問題で (i)，(ii′)，(iii) を導入した研究結果も最近幾つか発表されている．それらの研究では，確率モデルに関しても (i), (ii′), (iii) の下での決定変数間の大小関係は，(1.1) のアナロヂとなることを示している．本論文は，この決定論的及び確率モデルに対して導かれてきた (1.1) のような決定変数の大小関係を統一的に論ずることを目的とする．このため，決定論的及び確率モデルでの最適問題を広義の生産システムとして定式化し，(ii′) の代わりに「(ii) 最大単位利潤基準」を導入する．最初に，1 決定変数 (スカラー) の場合を考える．(i), (ii), (iii) の基準下での評価関数がそれぞれ，(a) (決定変数の) 単調関数，及び (b) 単峰関数のクラスに属するとき，(1.1) のような大小関係— 決定変数の高効率領域— の存在を明らかにする (評価関数の凸性等を必要としないに注意する)．これにより，従来のこの問題に関する結果を統一的に説明することができる．

決定変数が 2 (ベクトル) の場合について，(b) の拡張を試みる．すなわち，評価関数がそれぞれ 2 変数単峰関数の場合の決定ベクトルの高効率領域の存在を明らかにする．さらに，そこで得られたわれわれの結果を「機械加工における速度ベクトル問題」に応用する．

2 モデル

いろいろな分野で生じる最適化問題を一つのモデルにより定式化することは難しい問題である．我々は，いわゆる広義の生産システムとして提唱されている ‘input-output system’ によりかなり広範囲な問題をカバーできると考えている (このシステムの詳細に関しては例えば人見[1])をみよ)．このシステムはインプットの集合，アウトプットの集合及び一つの変換過程からなる．その変換過程は，インプットの集合をアウトプット (の集合) に変換するためのものである (図 1)．最適化問題をこのシステムでモデル化したとき，対象となるのはほとんどその変換過程である．幾つかのインプットをこの過程で一つのアウトプット (製品と呼ぶ) に変換し，その製品は N 種類 (種類 $1, \cdots$ 種類 N) あるとする．この変換過程の中の決定 (制御) ベクトルを $\bar{x}$ とする．$\bar{x}$ の下での単位時間当たりにこの過程を経て出てくる製品 i の平均数を $r_i(\bar{x})$(¥/個) で表し，これを製品 i の生産率と呼ぶ．この生産率の下での製品 i 1 個当たりの粗収入或いは販売価格を $a_i(\bar{x})$(¥/個) とすると，この過程を通し

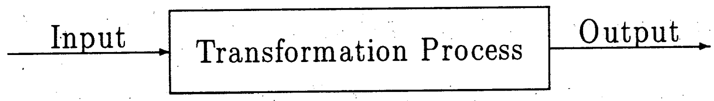

図 1: Input-output system

ての製品 1 個当たりの平均収入 $a(\bar{x})$ は，次式で与えられる．

$$a(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{N}[a_i(\bar{x})r_i(\bar{x})] \Big/ \sum_{i=1}^{N} r_i(\bar{x})$$

この $a(\bar{x})$ を用いた重みづけ生産率 $r(\bar{x})$ を

$$r(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i(\bar{x})}{a(\bar{x})} r_i(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{N} r_i(\bar{x})$$

として定義する．$\bar{x}$の下での変換過程で単位時間当たり要する総コストを $f(\bar{x})$(¥/個) で表す．
この時，製品 1 個当たりの利潤 $u(\bar{x})$(the unit-profit; ¥/個) 及び単位時間当たりの利潤 $p(\bar{x})$(the profic rate; ¥/時間) は，

$$u(\bar{x}) = a(\bar{x}) - [f(\bar{x})/r(\bar{x})],$$
$$p(\bar{x}) = u(\bar{x})r(\bar{x})$$

として表すことができる．

3 最適ベクトルの定義と基本仮定

本研究の中で使っている評価基準は，(i) 最大能率基準，(ii) 最大単位利潤基準及び (iii) 最大利潤率基準である．最大能率基準は単位時間当たりに最も多量に生産するための基準であり，最大単位利潤基準は単位製品から利潤を最大に獲得するための基準であり，最大利潤率基準は単位時間当たりに最大の利潤をあげるための基準である．$S \subset \mathbb{R}^M$を決定ベクトル$\bar{x}$の定義域とする．

$$V_*(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{x} | \bar{x} \in S, *(\bar{x}) = \sup *(S)\}, \quad * = r, u, p$$

と置くと，基準 (i), (ii) 及び (iii) の下での準最適ベクトルは次のように定義される．

定義 3.1. もし$\bar{x} \in V_r(S)$ であれば，この$\bar{x}$を基準 (i) の下での準最適ベクトルと言う．基準 (ii), (iii) の下での準最適ベクトルも同じように定義できる．

$$V_r^*(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{x} | \bar{x} \in V_r(S), u(\bar{x}) = \sup u(V_r(S))\},$$
$$V_u^*(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{x} | \bar{x} \in V_u(S), r(\bar{x}) = \sup r(V_u(S))\},$$
$$V_p^*(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{x} | \bar{x} \in V_p(S), u(\bar{x}) = \sup u(V_p(S))\}$$

と置くと，基準 (i), (ii) 及び (iii) の下での最適ベクトルは次のように定義される．

定義 3.2. もし$\bar{x} \in V_r^*(S)$ であれば，この$\bar{x}$を基準 (i) の下での最適ベクトルと言う．基準 (ii), (iii) の下での最適ベクトルも同じように定義できる．

注意 3.1. 準最適ベクトルがいくつか存在するとき，定義 3.2 を用いて生産システムをさらに厳密的に評価することできる．

仮定 3.1. 1. 決定ベクトル$\bar{x}$の定義域Sは，有界な閉集合である．

2. $u(\bar{x}_0) > 0$ となる$\bar{x}_0 \in S$が存在する．
3. $r(\bar{x})$, $u(\bar{x})$ は上半連続関数である．上半連続関数の定義は次の通り：

   $f(\bar{x})$ はS上の関数とする．任意の$\bar{x}_0 \in S$に対して $f(\bar{x}_0) = \lim_{\delta \to 0} \sup f(U(\bar{x}_0; \delta; S))$ が成立すれば，$f(\bar{x})$ はS上の上半連続関数と呼ばれる．但し，$U(\bar{x}_0; \delta; S)$ はSにおける$\bar{x}_0$のδ-近傍である．

注意 3.2. 1. 仮定 3.1 の下で，基準 (i), (ii), (iii) の下での最適ベクトルは必ず存在する．

2. 仮定 3.1 の 2 が成り立たないときに生産の利潤はいつも負であるから，議論の意味はない．
3. 仮定 3.1 の‘上半連続’の仮定は比較的に緩いものであり，いろいろなケースをカバーする事ができる．例えば，評価関数が連続の場合，定義域Sが有限な集合，あるいは有界で可算な閉集合の場合などである．

4 決定ベクトルがスカラーのときの‘高効率領域’

本節では，単調関数と単峰関数を対象とする．単峰関数は次のように定義される．

定義 4.1. $f(x)$ がS上の関数とする．もし次の二つの条件を満たす$\alpha \in S$が存在すれば，$f(x)$ を単峰関数と言い，αを $f(x)$ の峰点と言う．さら条件式中の等号が成立しないとき，狭義の単峰関数という．

$$\text{任意の } x < x' < \alpha \text{ に対して } f(x) \leq f(x') < f(\alpha),$$
$$\text{任意の } x > x' > \alpha \text{ に対して } f(x) \leq f(x') \leq f(\alpha).$$

基準 (i), (ii), (iii) の下での準最適解と最適解は，注意 3.2 の 1 により，仮定 3.1 の下で必ず存在する．Li ら[8]により，これらの最適解の間に次の大小関係がある．

定理 4.1. 仮定 3.1 の下で次のことが成り立つ．

(i) $r(x)(u(x))$ が単調関数のとき，任意の $x_r \in V_r^*(S)$, $x_u \in V_u^*(S)$ に対して，

1. もし $x_u \leq x_r$であれば，$x_u \leq x_p \leq x_r$を満たすような $x_p \in V_p^*(S)$ が必ず存在する．
2. もし $x_u \geq x_r$であれば，$x_r \leq x_p \leq x_u$を満たすような $x_p \in V_p^*(S)$ が必ず存在する．

(ii) $r(x)$, $u(x)$ がともに単峰関数のとき，任意の $x_r \in V_r^*(S)$, $x_u \in V_u^*(S)$ に対して (i) と同じ結論が成立する.

実際上は，x_pが最も重要なものかもしれないが，これを求めることは，x_u, x_rを求めることよりはるかに難しい．定理 4.1 は，x_pが x_u, x_rの間に存在することを保証する.

定義 4.1. もし最適変数の間に定理 4.1 のような順序関係があれば，x_r, x_uにより定められた領域

$$[\min\{x_r, x_u\}, \max\{x_r, x_u\}]$$

を生産の'高効率領域' という.

今度は決定変数$\bar{x}$の定義域Sが上に有界でないケースを考える．このケースは実際上よく出てくる．例えば，単一機械加工における最適切削速度問題 (高桑[5])，FMS 生産システムにおける AGV の最適台数問題 (人見[2]) などである．Li ら[8]により，次の定理 4.2 が成立する.

定理 4.2. 決定変数 x の定義域Sが上に有界でない閉集合であり，評価関数 $r(x)$, $u(x)$, $p(x)$ が仮定 3.1 の 2, 3 を満たすとする.

(i) $r(x)$ ($u(x)$) が増加関数のとき，次の二つのことは等値である.

1. $V_u^*(S) \neq \emptyset$ ($V_r^*(S) \neq \emptyset$) であり，さらに任意の $x_u \in V_u(S)$ ($x_r \in V_r(S)$) に対して $x_u \leq x_p$ ($x_r \leq x_p$) を満たすような $x_p \in V_p(S)$ が存在する.
2. $p(x_0) \geq \overline{\lim_{x\to\infty}} p(x)$ を満たす $x_0 \in S$が存在する.

(ii) $r(x)$, $u(x)$ がともに単峰関数のとき，任意の $x_r \in V_u(S)$, $x_u \in V_r(S)$ に対して次を満たすような $x_p \in V_p^*(S)$ が存在する.

$$x_u \leq x_r \text{のとき，} x_u \leq x_p \leq x_r,$$
$$x_u \geq x_r \text{のとき，} x_r \leq x_p \leq x_u.$$

定理 2 の応用例として，FMS 生産システム (flexble manufacturing system) における AGV の最適台数問題 (高桑[5]) を考える．FMS 生産システムは，コンピュータによりコントロールされた m 台の加工機械，n 台の AGV 及び自動倉庫からなる．AGV は自動倉庫と加工機械間で被加工品を搬送する自動搬送車 (automatic guided vehicles) である．問題は，この m 台の加工機械に対して AGV を何台用意すればいいのか，ということである．多製品生産のとき，この問題は確率モデルとして定式化されている．明らかに，この問題における決定変数は AGV 台数 n であり，n の定義域は $S = \{1, 2, \cdots\}$ である．さらに，生産率関数，単位製品利潤関数及び利潤率関数をそれぞれ $r(n)$, $u(n)$, $p(n)$ で表すと，次の三つのことが成立する：(i) 評価関数 $r(n)$, $u(n)$ は仮定 3.1 の 2, 3 を満たす，(ii) $r(n)$ は S上の単調増加関数である，(iii) $\lim_{n\to\infty} p(n) = -\infty$ である．Sが上に有界でない閉集合であるから，定理 4.2 により次の結論が得られる：

単位利潤関数 $u(n)$ を正にするような AGV の台数 n_0が存在するとき，基準 (ii) の下での最適台数 n_uは存在し，さらに任意の基準 (ii) の下での最適台数 n_uに対して $n_p \geq n_u$を満たすような基準 (iii) の下での最適台数 n_pも存在する．

5 決定変数が 2 次元ベクトルのときの‘高効率領域’

決定変数が 2 個以上 (ベクトル) の場合，最適ベクトルの高効率領域が存在するか否か，は応用上非常に重要な問題である．例えば人見[2)]の最適切削速度問題では，決定変数は厳密にいうと，送り量 (mm/rev)，削り速度 (m/min) の 2 つである．本節の目的は，この決定ベクトルの高効率領域問題に関する数学的な手がかりを与えることである．すなわち，決定変数を 2 個とし，(i)，(ii)，(iii) の下での目標関数が応用上重要な‘単峰関数’に属する場合の決定ベクトルの高効率領域存在を明らかにする．本節で得られた結果を用いて，人見[2)]の問題の決定ベクトル (送り量，削り速度) の高効率領域の存在を示すことができる．まず，本節の研究対象となる 2 変数単峰関数の概念を導入する．

定義 5.1 $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$上で定義された 2 変数関数とする．ここで $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ である． $f(x,y)$ は，任意に x を固定したとき yに関する狭義の単峰関数，逆に yを固定したとき x に関する狭義の単峰関数である場合に，2 変数単峰関数と呼ばれる．

yを固定したとき $f(x,y)$ の x に関する峰点を $x_f(y)$，x を固定したとき $f(x,y)$ の yに関する峰点を $y_f(x)$ で表す．$x_f(y)$ の yに関する軌跡を $f(x,y)$ の yに関する極大線と呼び $L(x_f(y))$ で表す．すなわち $L(x_f(y)) = \{(x_f(y),y) | y \in \mathbb{R}^+\}$ である．同様に $f(x,y)$ の x に関する極大線を $L(y_f(x)) = \{(x,y_f(x)) \, | x \in \mathbb{R}^+\}$ で表す．極大線間の位置関係の概念は高効率領域を導くとき重要な役割を果たす．このような位置関係は次のように定義される．

定義 5.2. もし $L(x_f(y)) \subset L^+(y_f(x))$ であれば，$L(x_f(y))$ が $L(y_f(x))$ の右辺にあると言う．もし $L(x_f(y)) \subset L^-(y_f(x))$ であれば，$L(x_f(y))$ が $L(y_f(x))$ の左辺にあると言う．但し，

$$L^+(y_f(x)) = \{(x,y) | x \in \mathbb{R}^+, y_f(x) < y < \infty\},$$
$$L^-(y_f(x)) = \{(x,y) | x \in \mathbb{R}^+, 0 < y < y_f(x)\}.$$

2 変数ベクトルの高効率領域を導くために次の定理 5.1 が必要である．この定理を証明するために，仮定 3.1 のほかに次の仮定 5.1 も必要とする．

仮定 5.1. 評価関数 $r(x,y)$, $u(x,y)$, $p(x,y)$ は次の条件を満たす．

1. $x_*(y)$, $y_*(x)$ $(* = r,u,p)$ は $\mathbb{R}^+$上の連続関数であり，さらに極大線 $L(x_*(y))$ と $L(y_*(x))$ $(* = r,u,p)$ は共通点を持たない，すなわち $L(x_*(y)) \cap L(y_*(x)) = \emptyset$ $(* = u,r,p)$ である．
2. $x_*(y)$, $y_*(x)$ $(* = u,r,p)$ はともに $\mathbb{R}^+$上の単調減少関数である．