

一般化された価値と費用をもつ縄張りのゲーム

大阪府大総科 寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)

大阪府大総科 北條仁志 (Hitoshi Hohjo)

1. 問題とモデル

ここで扱う問題は、2個の動物がある縄張りの独占を競図して対立する現象の理論的説明づけから示唆されたゲームであり、対立する2企業間の新製品の独占をめぐる競争や広告の問題といった市場内の対立に適用できるゲームである。

2人のプレーヤ (Player I, II) がある縄張りをめぐって対立する。その対立とは、その縄張りを独占するための努力を投入し、その努力投入をどこまで維持できるかということである。[0, ∞) の中で長く維持できた方のプレーヤがその縄張りを独占できる。この縄張りの時刻 $t \in [0, \infty)$ における価値はプレーヤによって異なり Player i にとっては $v_i(t) \geq 0$, $i = 1, 2$, となっている。そして勝者は独占できた時点以後価値の総和を手に入れることになる。しかしながら、Player i が時刻 t まで努力投入を維持するためには $H_i(t)$ の累積費用

を使わなければならぬ。各プレイヤーにとっては、どの時点まで努力投入を維持すべきかを考えなければならぬ。

この種の問題にあつては、プレイヤーにとって利用できる情報様式に2つの型がある。各プレイヤーが相手プレイヤーの行動を常に観測でき、どの時刻においても相手がまだ努力投入を続けているのかもう既に断念してしまつたのかが情報として知らされる場合を Noisy 型とよび、反対に相手が情報防護を行い、相手がもう断念してしまつたのかまた「頑張っているのか」については、縄張りを独占できた時点ではじめて知らされる場合を Silent 型とよぶ。

後の議論のため、以下のような仮定を設ける。

- (1) 各プレイヤーにとって許された行動区間は $[0, \infty)$ 。
- (2) Player i にとっての縄張りの価値は、上に有界な連続関数であつて、 $0 \leq v_i(t) < \infty, t \in [0, \infty)$, かつ $\int_0^{\infty} v_i(t) dt < \infty$ 。
- (3) $V_i(x) = \int_x^{\infty} v_i(t) dt$ とおく。したがつて $V(x)$ は $[0, \infty)$ 上で連続的微分可能、 $V(0) > 0, V(\infty) = 0$, かつ $V(t) \geq 0, t \in [0, \infty)$ 。
- (4) Player i の累積費用関数 $H_i(t)$ は $[0, \infty)$ 上で連続的微分可能で、 $H(0) = 0$ かつ $h(t) = H'(t) > 0, t \in (0, \infty)$, さらに $H_i(t) \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow \infty$ としておく。

次に $[0, \infty) \times [0, \infty)$ 上の実数値関数 $M_i(x, y)$ に対して Player I と II が混合戦略として $[0, \infty)$ 上の cdf $F(x)$ と $G(y)$ を用い

ときの期待値として

$$M_i(F, \gamma) = \int_0^{\infty} M_i(x, \gamma) dF(x) ; \quad M_i(x, G) = \int_0^{\infty} M_i(x, \gamma) dG(\gamma),$$

$$M_i(F, G) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} M_i(x, \gamma) dF(x) dG(\gamma)$$

という記法を使用する。さらに

$$\gamma_i = \sup \{t \mid V_i(t) > 0\}$$

$$O_i(z) = \exp \left[- \int_0^z \{h_i(t) / V_i(t)\} dt \right]$$

とおく。

2. Silent Game

ここでは、両プレイヤー共互いに相手の行動が観測できない状態にあり、 $[0, \infty)$ のどの時点まで努力投入をするかをあらかじめ決定し、自分の決めた計画時刻が実現されてみてはじめて、自分が勝者となり得たのかそうでないのかが知らされる場合を扱う。Player IとIIの純戦略をそれぞれ $x \in [0, \infty)$ と $y \in [0, \infty)$ とある。そうするとこの場合のPlayer i への期待利得を $M_i(x, y)$ とあると次のようになる。

$$(2.1) \quad M_1(x, y) = \begin{cases} -H_1(x), & x \leq y \\ V_1(x) - H_1(x), & x > y \end{cases} ;$$

$$(2.2) \quad M_2(x, y) = \begin{cases} -H_2(y), & y \leq x \\ V_2(y) - H_2(y), & y > x. \end{cases}$$

上記の非0和無限ゲームに対して、純戦略の中で平衡戦略

は存在しない。そこで I と II はそれぞれ次のようなクラスの cdf $F(x)$ と $G(y)$ を混合戦略として用いるものとする:

$F(x)$ はある区間 $(0, u) \subset (0, r_1)$ 上の density part $f(x) > 0$ と点 $x=0$ での mass part $\alpha_1 \geq 0$ および点 $x=u$ での mass part $\beta_1 \geq 0$ から構成される。他方 $G(y)$ は同じ区間 $(0, u)$ 上の density part $g(y) > 0$ と点 $y=0$ での mass part $\alpha_2 \geq 0$ および点 $y=u$ での mass part $\beta_2 \geq 0$ から構成される。

そうすると 次のような関係を得る:

$$M_2(F, g) = \begin{cases} \alpha_1 \cdot 0, & y = 0 \\ \int_0^y f(x) dx - H_2(y), & 0 < y < u \\ (1 - \beta_1) \int_0^u f(x) dx - H_2(u), & y = u \\ \int_0^y f(x) dx - H_2(y), & y > u \end{cases};$$

$$M_1(x, G) = \begin{cases} \alpha_2 \cdot 0, & x = 0 \\ \int_0^x g(y) dy - H_1(x), & 0 < x < u \\ (1 - \beta_2) \int_0^u g(y) dy - H_1(u), & x = u \\ \int_0^x g(y) dy - H_1(x), & x > u \end{cases}.$$

u_i を方程式 $V_i(t) - H_i(t) = 0$ の $[0, \infty)$ での唯一根とし、今 $u_1 \leq u_2$ とする。そこで $u = u_1$ とおき、 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ および $\beta_1 = \{ \int_0^u f(x) dx - H_2(u) \} / \int_0^u f(x) dx$; $\beta_2 = 0$ とし

$$F^0(x) = \begin{cases} \int_0^x f(y) dy, & 0 < x < u \\ 1, & x \geq u \end{cases};$$

$$G^{\circ}(y) = \begin{cases} \{H_1(y)/V_1(y)\}, & 0 < y < u \\ 1, & y \geq u, \end{cases}$$

と選ぶと次式が得られる。

$$M_2(F, G) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq u \\ V_2(y) - H_2(y), & y > u \end{cases};$$

$$M_1(x, G) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq u \\ V_1(x) - H_1(x), & x > u. \end{cases}$$

以上をまとめて次の定理を得る。

定理1. u_1 を方程式 $V_1(t) - H_1(t) = 0$ の $[0, \infty)$ における唯一の根とし, $u = \min(u_1, u_2)$ とする。そうすると

$$F^{\circ}(x) = \begin{cases} \{H_2(x)/V_2(x)\}, & 0 < x < u \\ 1, & x \geq u \end{cases};$$

$$G^{\circ}(y) = \begin{cases} \{H_1(y)/V_1(y)\}, & 0 < y < u \\ 1, & y \geq u, \end{cases}$$

ここに点 u での mass parts β_1 と β_2 はそれぞれ

$$\beta_1 = \max\left\{0, \frac{V_2(u) - H_2(u)}{V_2(u)}\right\}; \quad \beta_2 = \max\left\{0, \frac{V_1(u) - H_1(u)}{V_1(u)}\right\},$$

によつて与えられる混合戦略の対 $(F^{\circ}(x), G^{\circ}(y))$ は

$$M_1(F, G^{\circ}) \leq M_1(F^{\circ}, G^{\circ})$$

$$M_2(F^{\circ}, G) = 0$$

を満足する。

3. Noisy Game

ここでは、両プレーヤ共互いに相手の行動が観測できない状態にあり、一方のプレーヤが断念した瞬間に他方の独占が確定する場合を扱う。ここでも前節と同様に両者が同時にあきらめた場合は両者ともこの縄張りを放棄したものとす。

Player I と II の純戦略をそれぞれ $x \in [0, \infty)$, $y \in [0, \infty)$ とし、 $M_i(x, y)$ を Player i の期待利得とすると

$$(3.1) \quad M_1(x, y) = \begin{cases} -H_1(x), & x \leq y \\ \sup_{x > y} \{V_1(x) - H_1(x)\} = V_1(y) - H_1(y), & x > y \end{cases}$$

$$(3.2) \quad M_2(x, y) = \begin{cases} -H_2(y), & y \leq x \\ \sup_{y > x} \{V_2(y) - H_2(y)\} = V_2(x) - H_2(x), & y > x \end{cases}$$

このゲームも純戦略の中に平穏戦略は存在しない。そこで、I と II はそれぞれ以下のクラスの cdf $F(x)$, $G(y)$ を混合戦略として用いることにある。

$F(x)$ は 点 $x=0$ での mass part $\alpha_1 \geq 0$, $(0, r)$ 上の density part $f(x) > 0$, そして点 $x=r$ での mass part $\beta_1 \geq 0$ より構成され、他方 $G(y)$ は 点 $y=0$ での mass part $\alpha_2 \geq 0$, 同じ区間 $(0, r)$ 上の density part $g(y) > 0$, そして点 $y=r$ での mass part $\beta_2 \geq 0$ より構成される。

そうすると

$$\alpha_1 > 0,$$

$$y = 0$$

$$M_2(F, y) = \begin{cases} \alpha_1 V_2(0) + \int_0^y (V_2(x) - H_2(x)) f(x) dx - H_2(y) (1 - F(y)), & 0 < y < r, \\ \alpha_1 V_2(0) + \int_0^r (V_2(x) - H_2(x)) f(x) dx - \beta_1 H_2(r), & y = r, \\ \alpha_1 V_2(0) + \int_0^r (V_2(x) - H_2(x)) f(x) dx + \beta_1 (V_2(r) - H_2(r)), & y > r \end{cases}$$

$$M_1(x, G) = \begin{cases} \alpha_2 \cdot 0 & x = 0 \\ \alpha_2 V_1(0) + \int_0^x (V_1(y) - H_1(y)) g(y) dy - H_1(x) (1 - G(x)), & 0 < x < r \\ \alpha_2 V_1(0) + \int_0^r (V_1(y) - H_1(y)) g(y) dy - \beta_2 H_1(r), & x = r \\ \alpha_2 V_1(0) + \int_0^r (V_1(y) - H_1(y)) g(y) dy + \beta_2 (V_1(r) - H_1(r)), & x > r. \end{cases}$$

ここで、 $\frac{d}{dy} M_2(F, y) = 0$ for $y \in (0, r)$ とおくと

$$f(y) / (1 - F(y)) = h_2(y) / V_2(y) \text{ for } y \in (0, r)$$

が得られ、したがって

$$f(x) = k \{ h_2(x) / V_2(x) \} \theta_2(x), \quad x \in (0, r)$$

を得る。また $\alpha_1 + \int_0^r f(x) dx + \beta_1 = 1$ であるから

$$F^0(x) = \begin{cases} \alpha_1, & x = 0 \\ 1 - (1 - \alpha_1) \theta_2(x), & 0 < x < r \\ 1, & x \geq r, \end{cases}$$

ここに $\beta_1 = 1 - F(r-0)$, $\theta_2(x) = \exp[-\int_0^x (h_2(t) / V_2(t)) dt]$ 。

この時

$$M_2(F^0, y) \begin{cases} = 0, & y = 0 \\ = \alpha_1 V_2(0), & 0 < y < r \\ < \alpha_1 V_2(0), & y \geq r. \end{cases}$$

$G(x)$ についてもまったく同様の議論が成り立つ。

定理2. 方程式 $V_1(z)=0, V_2(z)=0$ の $(0, \infty)$ における
 唯一の根をそれぞれ r_1, r_2 とし, $r = \min(r_1, r_2)$ とする。

Player I と II の混合戦略をそれぞれ cd と $F^\circ(x), G^\circ(y)$:

$$F^\circ(x) = \begin{cases} 1 - \theta_2(x), & 0 < x < r \\ 1, & x \geq r \end{cases};$$

$$G^\circ(y) = \begin{cases} 1 - \theta_1(y), & 0 < y < r \\ 1, & y \geq r \end{cases}$$

とすると、次の関係が成立する:

$$\begin{cases} M_1(F, G^\circ) \leq M_1(F^\circ, G^\circ) = 0, & \forall F \\ M_2(F^\circ, G) \leq M_2(F^\circ, G^\circ) = 0, & \forall G. \end{cases}$$

注: 上の定理は 1) の結果である。しかしこのゲームは
 Noisy 型である。そこで $V_1(t) - H_1(t) = 0$ の根を u_1 , $V_2(t) - H_2(t) = 0$ の根を u_2 とし, $u_1 > u_2$ であると仮定し, Player
 I が常に $y + \epsilon$ まで待つという戦略を用いるとすると

$$\begin{cases} M_1(y + \epsilon, y) = V_1(y + \epsilon) - H_1(y + \epsilon) \\ M_2(y + \epsilon, y) = -H_2(y) < 0 \end{cases}$$

が成立する。また $u_2 < t < u_1$ を満たす t に対して

$$\begin{cases} V_1(t) - H_1(t) > 0 \\ V_2(t) - H_2(t) < 0 \end{cases}$$

が得られる。したがって Player II にとってみれば自分の利

得を最大にしようとするなら、例え勝つても u_2 以後まで待つのは良い選択とはいえない。その上 I が常に $y + \epsilon$ なる戦略を用いると常に負けて $H_2(y)$ を失う。結局

$$I \text{ は } x^0 = y + 0 \quad ; \quad II \text{ は } y^0 = 0$$

と選ぶと

$$\begin{cases} M_1(x, y^0) = M_1(x^0, y^0) = V/0 \\ M_2(x^0, y) = -H_2(y) \leq M_2(x^0, y^0) = 0 \end{cases}$$

という結果を得る。Player II に $y > 0$ は面白くない戦略となってくる。

参考文献

Y. Teraoka & Y. Yamada: Games of production development in manufacturing, Lecture Note in Economics and Mathematical Systems Vol. 445, 58-67 (1997).