数理解析研究所講究録
1044 巻 1998 年 38-48

可解 LIE 群上のアインシュタイン計量について

森 邦彦 (Kunihiko Mori)
(大阪大学大学院理学研究科D3)

1. INTRODUCTION

Riemann多様体 (M, g) が Einstein 多様体であるとは, 計量 g の Ricci tensor ric_g がある定数 c に対して $ric_g = cg$ をみたすことをいう. 非コンパクトな等質 Einstein 多様体のよく知られた例として rank one の非コンパクト型対称空間がある. これらは可解 Lie 群が単純推移的に作用している空間である. Alekseevskii は次の予想を提出している([1]). “$M = G/K$ が非コンパクト等質 Einstein 多様体ならば, K は G の極大コンパクト部分群である.” この予想が正しければ, 非コンパクトな場合の等質 Einstein 多様体の分類問題は可解 Lie 群上の左不変な Einstein 計量の分類に帰着することになる.

1985年に J. Boggino は rank one の非コンパクト型対称空間をふくむ新しい Einstein 多様体のクラスを見い出した([2]). rank one の非コンパクト型対称空間は, その isometry 群の岩沢分解を経由して左不変計量を持つ可解 Lie 群とみなすことができるが, このときその可解 Lie 群の Lie 環はある種の H-type Lie 環 ([7] ,[8])の 1-dimensional extension となっている. Boggino の見い出した Einstein 多様体はその巾零部分が一般の H-type Lie 環に対応する可解 Lie 群であり, 現在 Damek-Ricci space と呼ばれている([3]). Damek-Ricci Einstein space は対称空間とは限らない非正の断面曲率をもつ Einstein 多様体の例を与えている.

我々は Damek-Ricci space を拡張して, Boggino-Damek-Ricci-type space を以下のように定義する.

$(\mathfrak{n}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{n}})$ を正定値内積をもつ 2-step nilpotent Lie 環、$\mathfrak{a}$ を1次元実ベクトル空間、A を $\mathfrak{a}$ の zero でないベクトルのひとつとする. $\mathfrak{n}$ の中心を $\mathfrak{z}$、$\mathfrak{z}$ の $\mathfrak{n}$ における $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{n}}$-直交補空間を $\mathfrak{v}$ とおき、$\mathfrak{a}$ の $\mathfrak{n}$ 上の表現 f を

$$f(A)X = (k/2)X,\ \ f(A)Z = kZ \ \ for\ X \in \mathfrak{v}, Z \in \mathfrak{z}$$

で定める. ここに k はある正の定数である. f により $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{n}$ 上 derivation として作用するので、可解 Lie 環 $\mathfrak{s} = \mathfrak{n} \times_f \mathfrak{a}$ (半直積) が定められる. $\mathfrak{a}$ 上の内積を $\langle A, A\rangle_{\mathfrak{a}} = 1$ で定め、$\mathfrak{s}$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{n}}$ と $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{a}}$ との直和で定める.

定義 1. 上の構成で得られる正定値内積をもつ可解 *Lie* 環 $(\mathfrak{s}, \langle\ ,\ \rangle)$ が定める単連結可解 *Lie* 群 S とその上の左不変計量 g の組 (S, g) を *Boggino-Damek-Ricci-type space* という.

Damek-Ricci Einstein space が負の断面曲率をもつならば, 対称空間になることが知られている([2], [9]). ここでは次の定理を示す.

Theorem.([10]) Boggino-Damek-Ricci-type spaceで Einstein かつ nonsymmetric かつ負の断面曲率をもつものが存在する.

2. Curvature of BDR-type space

以下, 簡単のため Boggino-Damek-Ricci-type space を BDR-type space とよぶ. BDR-type space (S, g) に対し, その Levi-Civita 接続 ∇, 断面曲率 K, Ricci transformation Ric 等の計算を 対応する計量可解 Lie 環 $(\mathfrak{s}, \langle\ ,\ \rangle)$ で行う. $(\mathfrak{n}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{n}})$ を $\mathfrak{s}$ の derived subalgebra とその上に誘導された内積の組とする.

$\mathfrak{n}$ の中心 $\mathfrak{z}$ から $End(\mathfrak{v})$ への $\mathbb{R}$-環準同型 J を

$$J(Z)X = (adX)^*Z \quad \text{for } X \in \mathfrak{v}, Z \in \mathfrak{z}$$

で定める. ここに $(\ ,\ )^*$ は $(\mathfrak{n}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{n}})$ における随伴作用を表わす. 準同型 J は 2-step nilpotent Lie 環 $\mathfrak{n}$ を特徴づけている. 実際 J を知れば $\mathfrak{n}$ の(ある基底に関する)構造定数を求めることができるし、逆も成り立つ. この J を用いて (S, g) の断面曲率を具体的に計算することができる.

Lemma 1 (sectional curvature of BDR-type space). $X, Y \in \mathfrak{s}$ に対し、$X = V_1 + Z_1 + aA, Y = V_2 + Z_2$ $(V_1, V_2 \in \mathfrak{v}\ , Z_1, Z_2 \in \mathfrak{z},\ a \in \mathbb{R})$ とおくとき、次が成り立つ.

$$\begin{aligned} K(X \wedge Y) &= \langle R(X,Y)Y, X\rangle \\ &= \frac{1}{4}|J(Z_1)V_2 + J(Z_2)V_1|^2 - \langle J(Z_1)V_1, J(Z_2)V_2\rangle \\ &\quad + \frac{k^2}{4}(\langle V_1, V_2\rangle + 2\langle Z_1, Z_2\rangle)^2 - \frac{k^2}{4}(|V_1|^2 + 2|Z_1|^2)(|V_2|^2 + 2|Z_2|^2) \\ &\quad - \frac{3}{4}|[V_1, V_2] + akZ_2|^2 - \frac{a^2k^2}{4}(|V_2|^2 + |Z_2|^2). \end{aligned}$$

Proof. $(\mathfrak{s}, \langle\ ,\ \rangle)$ の Levi-Civita 接続 ∇ は次で与えられる.

$$\begin{aligned} \nabla_A &= 0 \\ \nabla_X A &= -ad_A(X) \qquad \text{for } X \in \mathfrak{n} \\ \nabla_X Y &= \nabla^{\mathfrak{n}}{}_X Y + \langle ad_A(X), Y\rangle A \qquad \text{for } X, Y \in \mathfrak{n}, \end{aligned} \tag{1}$$

ここで $\nabla^{\mathfrak{n}}$ は $(\mathfrak{n}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{n}})$ の Levi-Civita 接続を表す. 準同型 J を使って, ∇ は次で与えられる.

$$\begin{aligned} \nabla_{V_1+Z_1}(V_2 + Z_2 + aA) &= -\frac{1}{2}J(Z_2)V_1 - \frac{1}{2}J(Z_1)V_2 + \frac{1}{2}[V_1, V_2] \\ &\quad + \frac{k}{2}\{\langle V_1, V_2\rangle + 2\langle Z_1, Z_2\rangle\}A - \frac{ka}{2}(V_1 + 2Z_1) \end{aligned}$$

for $V_1, V_2 \in \mathfrak{v}$, $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{z}$, $a \in \mathbb{R}$. この表式より直接計算により所期の式を得る. □

次に BDR-type space の Ricci transformation を求める．上の lemma より縮約して求めることができるが，ここでは $\mathfrak{n}$ の Killing form が消えることを使って Gauss formula より求める．

Lemma 2. $\{Z_1, \cdots Z_m\}$ を $\mathfrak{z}$ の正規直交基底，$\{V_1, \cdots V_n\}$ を $\mathfrak{v}$ の正規直交基底とする．このとき次が成り立つ．

$$\begin{aligned}(a)Ric(A) &= -k^2(\frac{n}{4}+m)A,\\ (b)Ric(V) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} J(Z_j)^2V - \frac{k^2}{2}(\frac{n}{2}+m)V \qquad for\ V \in \mathfrak{v},\\ (c)Ric(Z) &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}[V_i, J(Z)V_i] - k^2(\frac{n}{2}+m)Z \qquad for\ Z \in \mathfrak{z}.\end{aligned}$$

特に Ric は $\mathfrak{a}, \mathfrak{v}, \mathfrak{z}$ を不変にする．

Proof. $\mathfrak{s}$ の元 W に対して $R(W, A)A = -ad_A{}^2W$ であるから (a) が従う．(1)の第 3 式より

$$Ric(X) = Ric^{\mathfrak{n}}(X) - tr(ad_A)\cdot ad_AX \qquad \text{for} \quad X \in \mathfrak{n}, \tag{2}$$

ここで $Ric^{\mathfrak{n}}$ は Ricci transformation of $(\mathfrak{n}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{n}})$ を表す．計量 nilpotent Lie 環 $(\mathfrak{n}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{n}})$ に対して，その $Ric^{\mathfrak{n}}$ は $\mathfrak{n}$ の Killing form が消えることより次で与えられる：

$$Ric = \frac{1}{4}\sum_{i\in I} ad_{E_i} \circ ad_{E_i}{}^* - \frac{1}{2}\sum_{i\in I} ad_{E_i}{}^* \circ ad_{E_i}.$$

これを使って $Ric^{\mathfrak{n}}$ は次で与えられる．

$$\begin{aligned}Ric^{\mathfrak{n}}(V) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} J(Z_j)^2V\\ Ric^{\mathfrak{n}}(Z) &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}[V_i, J(Z)V_i]. \quad \Box\end{aligned}$$

与えられた BDR-type space (S, g)が Einstein 定数 c である Einstein 多様体である時，lemma 2 (a)より c は $-k^2(\frac{n}{4}+m)$ である．$Ric^{\mathfrak{n}}$ は対称的かつ $\mathfrak{v}$ と $\mathfrak{z}$ を不変にするから $\mathfrak{v}$ の正規直交基底 $\{V_1, \cdots V_n\}$ と $\mathfrak{z}$の正規直交基底 $\{Z_1, \cdots Z_m\}$ を選んで $Ric^{\mathfrak{n}}$ を対角化できる．

$$Ric^{\mathfrak{n}}(V_i) = a_iV_i, \qquad Ric^{\mathfrak{n}}(Z_j) = b_jZ_j.$$

(2) より (S, g) が Einstein ならば次が成り立つ．

$$a_i = -\frac{m}{2}k^2, \qquad b_j = \frac{n}{4}k^2 \qquad \text{for } i = 1, \cdots n,\ j = 1, \cdots m. \tag{3}$$

逆に(3) が成り立つとき，(S, g) が Einstein であることが容易にわかる．

Proposition 1 (Einstein condition of BDR-type space). *BDR-type space* (S, g) が *Einstein* であるための必要十分条件は

$$Ric^{\mathfrak{n}}|_{\mathfrak{v}} = -\frac{m}{2}k^2 1_{\mathfrak{v}}, \quad Ric^{\mathfrak{n}}|_{\mathfrak{z}} = \frac{n}{4}k^2 1_{\mathfrak{z}}$$

が成り立つことである. ただし$Ric^{\mathfrak{n}}$は$(\mathfrak{n}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{n}})$の *Ricci transformation*, $m = \dim \mathfrak{z}$, $n = \dim \mathfrak{v}$.

BDR-type space を定める正の定数 k を十分に大きくするとき BDR-type space は非正の断面曲率をもつ([6]). 次の命題は与えられた BDR-type space が非正の断面曲率をもつ十分条件を与える.

Proposition 2. 正の定数 C が存在して

$$|J(Z)V| \leq C|Z||V| \qquad for \quad Z \in \mathfrak{z}, \quad V \in \mathfrak{v}$$

となるとき, $C \leq k$ ならば k に対応する *BDR-type spaces* は非正の断面曲率をもつ.

Proof. S_k を k に対応するBDR-type space とする. lemma 1 より

$$K(X + aA \wedge Y) = K(X \wedge Y) + \frac{3}{4}|[X,Y]|^2 - \frac{3}{4}|[X,Y] + akY_{\mathfrak{z}}|^2 - \frac{a^2k^2}{4}|Y|^2,$$

ここに $Y_{\mathfrak{z}}$ は Y の $\mathfrak{z}$-成分を表す.

S_k が非正の断面曲率をもつことを示すためには, 次を示せば十分である.

$$K(X \wedge Y) + \frac{3}{4}|[X,Y]|^2 \leq 0. \qquad for \quad X, Y \in \mathfrak{n}. \tag{4}$$

(4)の左辺を次のように (A) と (B) に分ける:

$$\begin{aligned}(A) = \ & \frac{1}{4}|J(Z_1)V_2|^2 + \frac{1}{4}|J(Z_2)V_1|^2 - \frac{1}{2}\langle J(Z_1)V_1, J(Z_2)V_2\rangle \\ & + \frac{k^2}{2}\{2\langle V_1, V_2\rangle\langle Z_1, Z_2\rangle - (|V_1|^2|Z_2|^2 + |V_2|^2|Z_1|^2)\}, \\ (B) = \ & \frac{1}{2}\{\langle J(Z_2)V_1, J(Z_1)V_2\rangle - \langle J(Z_1)V_1, J(Z_2)V_2\rangle\} \\ & + \frac{k^2}{4}\{\langle V_1, V_2\rangle^2 - |V_1|^2|V_2|^2\} + k^2\{\langle Z_1, Z_2\rangle^2 - |Z_1|^2|Z_2|^2\},\end{aligned}$$

ここに $X = V_1 + Z_1$, $Y = V_2 + Z_2$, $V_1, V_2 \in \mathfrak{v}$, $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{z}$.

もしも X と Y が直交しているならば, $\langle V_1, V_2\rangle\langle Z_1, Z_2\rangle \leq 0$ であるから, 一般性を失うことなく $\langle V_1, V_2\rangle\langle Z_1, Z_2\rangle \leq 0$ と仮定してよい.

このとき

$$\begin{aligned}(A) &\leq \frac{C^2}{4}|Z_1|^2|V_2|^2 + \frac{C^2}{4}|Z_2|^2|V_1|^2 + \frac{C^2}{2}|Z_1||Z_2||V_1||V_2| - \frac{k^2}{2}(|V_1|^2|Z_2|^2 + |V_2|^2|Z_1|^2) \\ &= \frac{-C^2}{4}(|V_1||Z_2| - |V_2||Z_1|)^2 - \frac{k^2 - C^2}{2}(|V_1|^2|Z_2|^2 + |V_2|^2|Z_1|^2).\end{aligned}$$

ここで

$$Z_2 = \alpha Z_1 + Z_3, \langle Z_1, Z_3\rangle = 0$$
$$V_2 = \beta V_1 + V_3, \langle V_1, V_3\rangle = 0,$$

とおく. ただし $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $Z_3 \in \mathfrak{z}$, $V_3 \in \mathfrak{v}$.

このとき

$$\begin{aligned}(B) = & \frac{1}{2}\{\langle J(Z_3)V_1, J(Z_1)V_3\rangle - \langle J(Z_1)V_1, J(Z_3)V_3\rangle\} - \frac{k^2}{4}|V_1|^2|V_3|^2 - k^2|Z_1|^2|Z_2|^2 \\ & \leq -C^2(\frac{1}{2}|V_1||V_3| - |Z_1||Z_3|)^2 - \frac{k^2-C^2}{4}(|V_1|^2|V_3|^2 + 4|Z_1|^2|Z_3|^2). \quad \Box\end{aligned}$$

Example. (Damek-Ricci space) 計量 2-step nilpotent Lie 環が *H-type* であるとは正の定数 λ が存在して

$$J(Z)^2 = -\lambda^2|Z|^2\mathbb{I}_{\mathfrak{v}} \quad \text{for} \quad Z \in \mathfrak{z}$$

であるときをいう. BDR-type space (S, g) はその巾零部分の Lie 環が誘導された計量で H-type となるとき *Damek-Ricci space* と呼ばれる. Damek-Ricci space は $\lambda = k$ を満たすとき *standard* であるという.

(S, g) が DR spaceであるとき, 定義より直ちに次が成り立つ.

$a)$ $|J(Z)V| = \lambda|Z||V|$ for $Z \in \mathfrak{z}$, $V \in \mathfrak{v}$

$b)$ $J(Z_1) \circ J(Z_2) + J(Z_2) \circ J(Z_1) = -2\lambda^2\langle Z_1, Z_2\rangle\mathbb{I}_{\mathfrak{v}}$ for $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{z}$

$c)$ $\langle J(Z_1)V, J(Z_2)V\rangle = \lambda^2\langle Z_1, Z_2\rangle|V|^2$ for $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{z}$, $V \in \mathfrak{v}$

$d)$ $\langle J(Z)V_1, J(Z)V_2\rangle = \lambda^2|Z|^2\langle V_1, V_2\rangle$ for $Z \in \mathfrak{z}$, $V_1, V_2 \in \mathfrak{v}$

$e)$ $[V, J(Z)V] = \lambda^2|V|^2 Z$ for $Z \in \mathfrak{z}$, $V \in \mathfrak{v}$.

lemma (2)より, DR spaceに対して次が成り立つ:

$$Ric^{\mathfrak{n}}|_{\mathfrak{v}} = -\frac{m}{2}\lambda^2\mathbb{I}_{\mathfrak{v}}, \qquad Ric^{\mathfrak{n}}|_{\mathfrak{z}} = \frac{n}{4}\lambda^2\mathbb{I}_{\mathfrak{z}}.$$

従ってDR space (S, g) が Einstein 多様体であることと standard であることは同値である. さらに proposition 2 より DR Einstein spaces は非正の断面曲率をもつことがわかる.

3. BDR-TYPE EINSTEIN SPACES

本節で BDR-type Einstein space で DR Einstein space でないものを具体的に構成する. DR space においてその巾零部分である H-type Lie 環は非特異な 2-step nilpotent Lie 環の典型例である. ここで計量をもつ 2-step nilpotent Lie 環が非特異であるとは, 任意の $Z \in \mathfrak{z}$ に対して $J(Z)$ が $\mathfrak{v}$ の正則な変換であるときをいう. 我々は必ずしも非特異でない 2-step nilpotent Lie 環の族を構成することから始めて, それらを巾零部分にもつ BDR-type space を考察する.

$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の単純 Lie 環, $\mathfrak{h}$ をその一つの Cartan 部分環とする. $\mathfrak{h}$ に関する $\mathfrak{g}$ のルート系を $\triangle$、その基本系を Π とする. $\mathfrak{g}$ のひとつの Weyl基底 $\{E_\alpha|\alpha \in \triangle\}$ をとる. すなわち、各 $\alpha \in \triangle$ に

対して

$$\begin{array}{ll}(1) & B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = -1 \ (\text{ただし } B \text{ は } \mathfrak{g} \text{ の Killing form}). \\ (2) & [E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta} & \text{if } \alpha,\beta,\alpha+\beta \in \triangle \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ & N_{\alpha\beta} = N_{-\alpha-\beta} \in \mathbb{R}\end{array}$$

となる $\{E_\alpha | \alpha \in \triangle\}$ をひとつとる. Π_o を Π のある部分集合とし,

$$\Pi = \{\alpha_1, \dots \alpha_\ell\}, \quad \Pi_o = \{\alpha_{i_1}, \dots \alpha_{i_r}\}$$

とおく. $(k_1, \dots, k_r) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^r - \{0\}$ に対して,

$$\triangle(k_1, \dots, k_r) = \{\sum_{j=1}^{\ell} m_j\alpha_j \in \triangle^+ | m_{i_1} = k_1, \dots, m_{i_r} = k_r\}$$

とおく. $\triangle(k_1, \dots, k_r)$ に associate する $\mathfrak{g}_R$ の $\mathbb{R}$-部分空間 $\mathfrak{n}(k_1, \dots, k_r)$ をWeyl基底 $\{E_\alpha | \alpha \in \triangle\}$ を用いて次の様に定める.

$$\mathfrak{n}(k_1, \dots, k_r) = \sum_{\alpha \in \triangle(k_1, \dots, k_r)} \mathbb{R}E_\alpha.$$

このような $\mathfrak{n}(k_1, \dots, k_r)$ をすべて集めた $\mathfrak{g}_R$ の $\mathbb{R}$-部分空間 $\mathfrak{n}(\Pi_o)$ を考えると, Weyl基底による構造定数系が $\mathbb{R}$-valued であることから, $\mathfrak{n}(\Pi_o)$は $\mathbb{R}$ 上の nilpotent Lie環になる. $\mathfrak{n}(\Pi_o)$ 上の内積 $\langle\, ,\rangle_{\mathfrak{n}(\Pi_o)}$ を, $\mathfrak{n}(\Pi_o)$ を定めるWeyl基底の各元が正規直交である様に定める. この構成は Lie環 $\mathfrak{n}(\Pi_o)$ の grading に compatible な基底とその上の内積をとっていることから, その Ricci transformation は対角化されている. 特にこの計量 Lie環 $(\mathfrak{n}, \langle\, ,\rangle_{\mathfrak{n}(\Pi_o)})$ が 2-step である場合, その大半が Euclid factor をもたず, かつ非特異でない Lie環となる. 上の構成で得られる 2-step nilpotent Lie 環 $(\mathfrak{n}(\Pi_o), \langle\, ,\rangle_{\mathfrak{n}(\Pi_o)})$ に対して, BDR-type space を構成する. 3つ組みのデータ (k, Π, Π_o) に対応する BDR-type space を $S_k(\Pi, \Pi_o)$ で表す.

$\alpha, \beta, \gamma \in \triangle^{\mathfrak{n}(\Pi_o)}$ かつ $\alpha = \beta + \gamma$ ならば

$$J(E_\alpha)E_\beta = N_{\beta\gamma}E_\gamma$$

であることから次の lemma を得る.

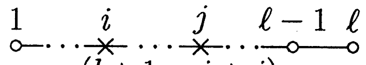
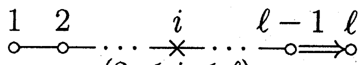
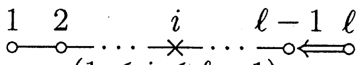
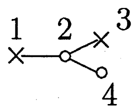
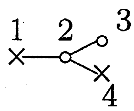
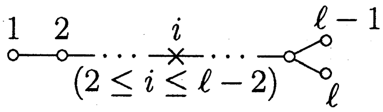
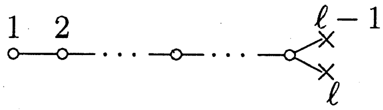
Lemma 3. $(\mathfrak{n}(\Pi_o), \langle\, ,\rangle_{\mathfrak{n}(\Pi_o)})$ を上の構成で得られる *2-step nilpotent Lie*環とする. $\alpha \in \triangle^{\mathfrak{n}(\Pi_o)}$ に対して

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha) &= \{\, \beta \in \triangle^{\mathfrak{n}(\Pi_o)} \mid \alpha + \beta \in \triangle^{\mathfrak{n}(\Pi_o)} \,\} \\ \Psi(\alpha) &= \{\, (\beta, \gamma) \in \triangle^{\mathfrak{n}(\Pi_o)} \times \triangle^{\mathfrak{n}(\Pi_o)} \mid \beta + \gamma = \alpha \,\}\end{aligned}$$

とおく. このとき *Ricci transformation* $Ric^{\mathfrak{n}(\Pi_o)}$ の E_α に関する固有値 ξ_α は次で与えられる.

$$\xi_\alpha = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sum_{\beta \in \Phi(\alpha)} (N_{\alpha\beta})^2 & \text{if } E_\alpha \in \mathfrak{v} \\ \frac{1}{4}\sum_{(\beta,\gamma) \in \Psi(\alpha)} (N_{\alpha\beta})^2 & \text{if } E_\alpha \in \mathfrak{z}. \end{cases}$$

この lemma と proposition 1 とから，与えられた BDR-type space $S_k(\Pi, \Pi_o)$ が Einstein であるか否か判定できる．古典型単純 Lie 環の場合に，上の構成で得られる BDR-type Einstein space の表を以下に載せる．

$\mathfrak{g}$	(Π, Π_o)	k	$\dim \mathfrak{z}$	$\dim \mathfrak{v}$	$S_k(\Pi, \Pi_o)$
A_l $(2 \leq l)$	 $(l+1=i+j)$	$\frac{1}{\sqrt{2i(i+j)}}$	i^2	$2i(j-i)$	not DR $(i \neq 1)$, $\mathbb{C}H^{\ell}$ $(i=1)$
B_l $(2 \leq l)$	 $(2 \leq i \leq \ell)$	$\frac{1}{\sqrt{i(2l-1)}}$	$\frac{i(i-1)}{2}$	$i(2l-2i+1)$	not DR $(i \neq 2)$, $\mathbb{C}H^{2\ell-2}$ $(i=2)$
C_l $(3 \leq l)$	 $(1 \leq i \leq \ell-1)$	$\frac{1}{\sqrt{2i(l+1)}}$	$\frac{i(i+1)}{2}$	$2i(l-i)$	not DR $(i \neq 1)$, $\mathbb{C}H^{\ell}$ $(i=1)$
D_4	 	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	3	6	not DR
D_l $(4 \leq l)$	 $(2 \leq i \leq \ell-2)$	$\frac{1}{\sqrt{2i(l-1)}}$	$\frac{i(i-1)}{2}$	$2i(l-i)$	not DR $(i \neq 2)$, $\mathbb{C}H^{2\ell-3}$ $(i=2)$
D_l $(4 \leq l)$		$\frac{1}{\sqrt{2}(l-1)}$	$\frac{(l-1)(l-2)}{2}$	$2(l-1)$	not DR

表中の Dynkin 図形において × は Π_oの元を表す．

この表にある BDR-type Einstein spaces の多くは非正の断面曲率をもたない．しかし以下に定理として述べるように負の断面曲率をもつもの，非正の断面曲率をもつものが存在する．それらの断面曲率を評価するにあたって proposition 2 は使えず，$J(Z)$ の特異性を更に評価する必要がある．

Theorem 1. *(i)* Π を B_l型単純 *Lie*環の基本系，Π_o を $\{\alpha_3\}$ とする．このとき $4 \leq l$ ならば *BDR-type Einstein space*

$$S_k(\Pi, \Pi_o), \qquad k = \frac{1}{\sqrt{3(2l-1)}}$$

は負の断面曲率をもつ．

(*ii*) Π を D_l型単純 *Lie*環の基本系, Π_o を $\{\alpha_3\}$ とする. このとき $5 \leq l$ ならば *BDR-type Einstein space*

$$S_k(\Pi, \Pi_o), \qquad k = \frac{1}{\sqrt{6(l-1)}}$$

は負の断面曲率をもつ.

特に *nonsymmetric*な *BDR-type Einstein spaces* で負の断面曲率をもつものが存在する.

Theorem 2. (*i*) Π を A_l型単純 *Lie*環の基本系, Π_o を $\{\alpha_2, \alpha_{l-1}\}$ とする. このとき $4 \leq l$ ならば *BDR-type Einstein space*

$$S_k(\Pi, \Pi_o), \qquad k = \frac{1}{2\sqrt{l+1}}$$

は非正の断面曲率をもつ.

(*ii*) Π を C_l型単純 *Lie*環の基本系, Π_o を $\{\alpha_2\}$ とする. このとき $3 \leq l$ ならば *BDR-type Einstein space*

$$S_k(\Pi, \Pi_o), \qquad k = \frac{1}{2\sqrt{l+1}}$$

は非正の断面曲率をもつ.

証明は B_l型に対して行う. その他の場合については若干の修正をすることにより証明できる.

Proof of theorem 1(*i*). $S_k(\Pi, \Pi_o)$ が負の断面曲率をもつことを示すためには, 一次独立な $\mathfrak{n}$ の二元 X, Y に対して

$$K(X \wedge Y) + \frac{3}{4}|[X, Y]|^2 < 0 \tag{5}$$

を示せば十分である.

proposition 2の証明中にあるように, 再び(5)の左辺を(A) と (B) に分ける. 証明のために我々は次の lemma を必要とする.

Lemma 4. Π を B_l型 (ただし$4 \leq l$) 単純 *Lie*環の基本系, Π_o を $\{\alpha_3\}$ とする. このとき

$$\frac{1}{2\sqrt{(2l-1)}} \leq k \Longrightarrow (A) \leq 0 \quad and \quad (B) \leq 0.$$

lemma は後で示す. これが示されれば $4 \leq l$ であるとき $S_k(\Pi, \Pi_o)$ $(k = \frac{1}{\sqrt{3(2l-1)}})$ は非正の断面曲率をもつ. いま $\mathfrak{n}$ の元 X, Y で

$$K(X \wedge Y) + \frac{3}{4}|[X, Y]|^2 = 0.$$

となるものが存在したと仮定する. このとき $(A) = (B) = 0$ となるから

$$\begin{aligned}
&2\langle V_1, V_2\rangle\langle Z_1, Z_2\rangle - (|V_1|^2|Z_2|^2 + |V_2|^2|Z_1|^2) = 0 \\
&\langle V_1, V_2\rangle^2 - |V_1|^2|V_2|^2 = 0 \\
&\langle Z_1, Z_2\rangle^2 - |Z_1|^2|Z_2|^2 = 0
\end{aligned}$$

を得る. 従って X と Y は一次独立でない. 以上より (5) を得た.

symmetricity に関しては, ∇R が消えないことが容易に確認できる. □

Proof of lemma 4.

$\triangle^{\mathfrak{n}(\Pi_o)}$ の元に対して次のように添数をつける:

$$\alpha_{i1} = \sum\nolimits_{t=i}^{l} \alpha_t \quad (1 \leq i \leq 3)$$
$$\alpha_{ij} = \sum\nolimits_{t=i}^{j+1} \alpha_t \quad (1 \leq i \leq 3, 2 \leq j \leq l-2)$$
$$\alpha_{ij} = \sum\nolimits_{t=i}^{l} \alpha_t + \sum\nolimits_{s=j-l+5}^{l} \alpha_s \quad (1 \leq i \leq 3, l-1 \leq j \leq 2l-5)$$
$$\beta_1 = \alpha_2 + \sum\nolimits_{t=3}^{l} 2\alpha_t$$
$$\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \sum\nolimits_{t=3}^{l} 2\alpha_t$$
$$\beta_3 = \alpha_1 + \sum\nolimits_{t=2}^{l} 2\alpha_t$$

Weyl 基底を $N_{\alpha_{i_1j_1}\alpha_{i_2j_2}} \leq 0$ if $i_1 < i_2$, $N_{\alpha_{i_1j_1}\alpha_{i_2j_2}} \geq 0$ if $i_1 > i_2$, for $1 \leq i_1, i_2 \leq 3$, $2 \leq j_1 \leq l-2$, $l-1 \leq j_2 \leq 2l-5$ となるようにとる. その構造定数は

$$(N_{\alpha\beta})^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{2(2l-1)} & \text{if } \alpha, \beta, \alpha+\beta \in \triangle^{\mathfrak{n}(\Pi_o)} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

である. このとき $1 \leq \delta, \delta' \leq 2, 1 \leq j \leq 2l-5$ に対して

$$J(Z_\delta)V_{\delta'} = \sum_{j=1}^{2n-5} \{(z_2^\delta v_{3j}^{\delta'} + z_3^\delta v_{2j}^{\delta'})E_{\alpha_{1j}} + (z_1^\delta v_{3j}^{\delta'} - z_3^\delta v_{1j}^{\delta'})E_{\alpha_{2j}} + (-z_1^\delta v_{2j}^{\delta'} - z_2^\delta v_{1j}^{\delta'})E_{\alpha_{3j}}\}$$

が成り立つ. ただし

$$V_\delta = \sum_{i,j} v_{ij}^\delta E_{\alpha_{ij}}, \quad Z_\delta = \sum_{h=1}^{3} z_h^\delta E_{\beta_h} \quad \text{for} \quad \delta = 1, 2.$$

とおいた. 次に

$$P_{\delta\delta'}^j := z_1^\delta v_{1j}^{\delta'} - z_2^\delta v_{2j}^{\delta'} + z_3^\delta v_{3j}^{\delta'} \quad \text{for} \quad 1 \leq \delta, \delta' \leq 2, 1 \leq j \leq 2l-5$$

とおく.

このとき次の等式が成り立つ:

$$\frac{1}{4}\langle J(Z_{\delta_1})V_{\delta_2}, J(Z_{\delta'_1})V_{\delta'_2}\rangle - \frac{1}{8(2l-1)}\langle Z_{\delta_1}, Z_{\delta'_1}\rangle\langle V_{\delta_2}, V_{\delta'_2}\rangle \tag{6}$$
$$= \frac{-1}{8(2l-1)} \sum\nolimits_{j=1}^{2l-5} P_{\delta_1\delta'_2}^j P_{\delta'_1\delta_2}^j.$$

$2\langle V_1,V_2\rangle\langle Z_1,Z_2\rangle-(|V_1|^2|Z_2|^2+|V_2|^2|Z_1|^2)\le 0$ であるから, $(A)\le 0$ を示すためには $k=\frac{1}{2\sqrt{2l-1}}$ であるとき $(A)\le 0$ を示せばよい. (6)を使って次を得る:

$$\begin{aligned}(A)= &\quad (\frac{1}{4}|J(Z_1)V_2|^2-\frac{1}{8(2l-1)}|V_2|^2|Z_1|^2)+(\frac{1}{4}|J(Z_2)V_1|^2-\frac{1}{8(2l-1)}|V_1|^2|Z_2|^2)\\ &-2\Big(\frac{1}{4}\langle J(Z_1)V_1,J(Z_2)V_2\rangle-\frac{1}{8(2l-1)}\langle V_1,V_2\rangle\langle Z_1,Z_2\rangle\Big)\\ = &\quad \frac{-1}{8(2l-1)}\sum_{j=1}^{2l-5}(P_{12}^j-P_{21}^j)^2\le 0.\end{aligned}$$

$(B)\le 0$ を示すために $Z_1,Z_2\in\mathfrak{z}$, $V_1,V_2\in\mathfrak{v}$ に対して

$$|\langle J(Z_2)V_1,J(Z_1)V_2\rangle-\langle J(Z_1)V_1,J(Z_2)V_2\rangle|\le\frac{1}{2(2l-1)}|Z_1||Z_2||V_1||V_2| \qquad (7)$$

を示す. (7) が成り立つならば, proposition 2 と同様の評価を行って $(B)\le 0$ が証明される.

$$V_1=\sum_{j=1}^{2l-5}V_1^{(j)},V_2=\sum_{j=1}^{2l-5}V_2^{(j)}$$

とおく. ただし $V_1^{(j)},V_2^{(j)}\in Span\{E_{\alpha_{1j}},E_{\alpha_{2j}},E_{\alpha_{3j}}\}$.

このとき

$$\begin{aligned}&|\langle J(Z_2)V_1^{(1)},J(Z_1)V_2^{(1)}\rangle-\langle J(Z_1)V_1^{(1)},J(Z_2)V_2^{(1)}\rangle|\\ &=\frac{1}{2(2l-1)}|(z_1^1z_2^2-z_2^1z_1^2)(v_{21}^1v_{11}^2-v_{11}^1v_{21}^2)+(z_1^1z_3^2-z_3^1z_1^2)(v_{11}^1v_{31}^2-v_{31}^1v_{11}^2)\\ &\qquad\qquad+(z_2^1z_3^2-z_3^1z_2^2)(v_{31}^1v_{21}^2-v_{21}^1v_{31}^2)|\\ &\le\frac{1}{2(2l-1)}\sqrt{\sum_{1\le i<j\le 3}(z_i^1z_j^2-z_j^1z_i^2)^2}\sqrt{\sum_{1\le i<j\le 3}(v_{i1}^1v_{j1}^2-v_{j1}^1v_{i1}^2)^2}\\ &=\frac{1}{2(2l-1)}\sqrt{|Z_1|^2|Z_2|^2-\langle Z_1,Z_2\rangle^2}\sqrt{|V_1^{(1)}|^2|V_2^{(1)}|^2-\langle V_1^{(1)},V_2^{(1)}\rangle^2}\\ &\le\frac{1}{2(2l-1)}|Z_1||Z_2||V_1^{(1)}||V_2^{(1)}|.\end{aligned}$$

同様に$2\le j\le l-2, l-1\le j'\le 2l-5$ に対して

$$|\langle J(Z_2)V_1^{(j)},J(Z_1)V_2^{(j)}\rangle-\langle J(Z_1)V_1^{(j)},J(Z_2)V_2^{(j)}\rangle|\le\frac{1}{2(2l-1)}|Z_1||Z_2||V_1^{(j+l-3)}||V_2^{(j+l-3)}|.$$

$$|\langle J(Z_2)V_1^{(j')},J(Z_1)V_2^{(j')}\rangle-\langle J(Z_1)V_1^{(j')},J(Z_2)V_2^{(j')}\rangle|\le\frac{1}{2(2l-1)}|Z_1||Z_2||V_1^{(j'-l+3)}||V_2^{(j'-l+3)}|.$$

従って

$$
\begin{aligned}
&|\langle J(Z_2)V_1, J(Z_1)V_2\rangle - \langle J(Z_1)V_1, J(Z_2)V_2\rangle| \\
&= \sum_{j=1}^{2l-5} |\langle J(Z_2)V_1^{(j)}, J(Z_1)V_2^{(j)}\rangle - \langle J(Z_1)V_1^{(j)}, J(Z_2)V_2^{(j)}\rangle| \\
&\leq \frac{1}{2(2l-1)}|Z_1||Z_2|(\sum_{j=1}^{2l-5}|V_1^{(j)}||V_2^{(j)}|) \\
&\leq \frac{1}{2(2l-1)}|Z_1||Z_2||V_1||V_2|. \qquad \square
\end{aligned}
$$

References

[1] D. V. Alekseevskii, *Classification of quaternionic spaces with a transitive solvable group of motions,* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 9(2) (1975), 315 – 362.

[2] J. Boggino, *Generalized Heisenberg groups and solvmanifolds naturally associated,* Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 43 (1985), 529 – 547.

[3] J. Berndt, F. Tricerri, L. Vanhecke, *"Generalized Heisenberg Groups and Damek-Ricci Harmonic Spaces",* Springer–Verlag 1995.

[4] E. Damek and F. Ricci *A class of nonsymmetric harmonic Riemannian spaces* , Bull. Amer. Math. Soc. 27 (1992), 139 – 142.

[5] P. Eberlein, *Geometry of 2-step nilpotent groups with a left invariant metric,* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 27 (1994), 611 – 660.

[6] E. Heintze, *On homogeneous manifolds of negative curvature,* Math. Ann. 211 (1974), 23 – 34.

[7] A. Kaplan, *Riemannian nilmanifolds attached to Clifford modules,* Geom. Dedicata 11 (1981), 127 – 136.

[8] A. Kaplan, *On the geometry of groups of Heisenberg type,* Bull. London math. Soc. 15 (1983), 35 – 42.

[9] M. Lanzendorf *Einstein metrics with nonpositive sectional curvature on extensions of Lie algebras of Heisenberg type,* Geom. Dedicata 66 (1997), 187 – 202.

[10] K. Mori, *Einstein metrics on BDR-type solvable Lie groups,* (preprint).

[11] T. Wolter, *Einstein metrics on solvable groups,* Math. Z. 206 (1991), 457 – 471.