

# Singular limit of solutions of Ginzburg-Landau equation

石井 克幸 (神戸商船大学)

## 1 Introduction

このノートでは Soner [23] に基づき、Ginzburg-Landau 方程式の解の特異極限について考えたい。

Ginzburg-Landau 方程式とは次のような半線形放物型方程式である。

$$(1.1) \quad u_t^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon + \frac{2}{\varepsilon^2} u^\varepsilon ((u^\varepsilon)^2 - 1) = 0 \quad \text{in } (0, +\infty) \times \mathcal{R}^N.$$

ただし、 $\varepsilon > 0$  である。

この方程式は物質の相転移現象における、order parameter  $u^\varepsilon$  の満たす方程式として知られている。詳細は [1] などを参照されたい。

$\varepsilon \rightarrow 0$  としたときの  $u^\varepsilon$  の挙動を形式的に考えると次のようになる。 $q = q(r)$  を

$$\frac{d^2}{dr^2} q = 2q(q^2 - 1), \quad q(\pm\infty) = \pm 1, \quad q(0) = 0$$

の解とする (この場合は  $q(r) = \tanh(r)$ )。これを使って  $u^\varepsilon = q(z^\varepsilon/\varepsilon)$  とおくと  $z^\varepsilon$  は以下の方程式を満たす。

$$z_t^\varepsilon - \Delta z^\varepsilon + \frac{2u^\varepsilon}{\varepsilon} (|Dz^\varepsilon|^2 - 1) = 0 \quad \text{on } (0, +\infty) \times \mathcal{R}^N$$

$\varepsilon \rightarrow 0$  とすると、 $|Dz^\varepsilon| - 1 \rightarrow 0$  が言えるので  $z^\varepsilon$  はある集合  $\Gamma(t)$  に対する符号付き距離関数であることがわかる。また、 $z^\varepsilon = 0$  のとき、 $u^\varepsilon = 0$  であるので

$$z_t^\varepsilon - \Delta z^\varepsilon = 0 \quad \text{on } \{z^\varepsilon = 0\} (= \Gamma(t))$$

となり、 $\Gamma(t)$  は平均曲率で動くことが言える。詳しい考察は [7, 19] を参照のこと。

この考察が正しいことは  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  が (2.1) の滑らかな解であるときには [2] によって、広義解であるときには [5] によって証明された。これらの論文では劣解、優解をうまく構成して、最大値原理を用いている。ここでは、エネルギー法によって議論する。そうすることにより、Ginzburg-Landau 方程式系の場合にも応用が可能である。実際、[17] では方程式系の解  $u^\varepsilon$  の特異極限が余次元が 2 以上である滑らかな平均曲率流 (その存在を仮定して) に収束することを証明している。

## 2 Weak theory to motion by mean curvature

この § では、粘性解理論の応用として、近年著しく進展した平均曲率流に対する等高面の方法について簡単に概説したい。

$\mathcal{R}^N$  内での超曲面の族  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  が平均曲率流であるとは

$$(2.1) \quad V = \kappa \quad \text{on} \quad \Gamma(t), \quad t > 0$$

を満たすときをいう。ただし、 $V$  は  $\Gamma(t)$  の外向き法線方向速度、 $\kappa$  は  $\Gamma(t)$  上で定義された平均曲率である。以後、 $\Gamma(t)$  の外向き単位法線ベクトル  $\vec{n}$  は  $\Gamma(t)$  の管状近傍に単位ベクトルとして延長されていると仮定する。

(2.1) に対する滑らかな解については、[13, 9, 11] を参照。また、よく知られているように  $\Gamma(0)$  が滑らかであっても、有限時間内に特異点を生じることがある ([12])。よって、時間大域解を議論するには適当な弱解の概念が必要であることがわかる。

### 2.1 Level set approach

[18, 20] に従い、等高面の方法を導入する。

$\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  を (2.1) の滑らかな解とし、 $\Omega(t) \subset \mathcal{R}^N$  を  $\Gamma(t) = \partial\Omega(t)$  とする開集合とする。 $u(t, x)$  を以下を満たす滑らかな関数とする。

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \{x \mid u(t, x) > 0\}, \\ \Gamma(t) &= \{x \mid u(t, x) = 0\}, \\ |Du(t, x)| &> 0, \quad \forall x \in \Gamma(t). \end{aligned}$$

このとき、 $\Gamma(t)$  上で

$$V = \frac{u_t}{|Du|}, \quad \vec{n} = -\frac{Du}{|Du|}, \quad \kappa = -D \cdot \vec{n} = \operatorname{div} \left( \frac{Du}{|Du|} \right)$$

を満たすので、(2.1) は

$$(2.2) \quad u_t + F(Du, D^2u) = 0$$

となる。ここで、

$$F(p, X) = -\operatorname{tr} \left\{ \left( I - \frac{p \otimes p}{|p|^2} \right) X \right\}$$

**Remark 2.1** 上の  $F$  は退化楕円型、

$$F(p, X+Y) \leq F(p, X) \quad (\forall p \in \mathcal{R}^N, \forall X, Y \in \mathcal{S}^N, Y \geq 0)$$

である。また、この方程式の特徴的なこととして *geometric* という性質を満たす。つまり、

$$(2.3) \quad \begin{aligned} F(\lambda p, \lambda X + \mu p \otimes p) &= \lambda F(p, X) \\ &(\forall p \in \mathcal{R}^N, \forall X \in \mathcal{S}^N, \forall \lambda > 0, \forall \mu \in \mathcal{R}) \end{aligned}$$

[18, 20] では (2.1) を解くかわりに (2.2) を  $(0, +\infty) \times \mathcal{R}^N$  で解くことを提案した。つまり、 $\Gamma(0) = \Gamma_0$  に対して、 $u_0(x)$  を

$$\Omega(0) = \{x \mid u_0(x) > 0\}, \quad \Gamma(0) = \{x \mid u_0(x) = 0\}$$

を満たす関数とし、(2.2) を  $u(0, x) = u_0(x)$  という初期条件のもとで解く。そして、 $\Omega(t)$ 、 $\Gamma(t)$  を

$$\Omega(t) = \{x \mid u(t, x) > 0\}, \quad \Gamma(t) = \{x \mid u(t, x) = 0\} \quad (t \geq 0)$$

と定義することで、(2.1) の解とする。

ところが、(2.2) は  $Du = 0$  で定義されないので一般には滑らかな解の存在が期待できない。そこで、粘性解という弱解を導入することで(2.2) を解くことを考える。

## 2.2 Viscosity solution and generalized motion

ここでは、(2.2) に対する粘性解と (2.1) に対する広義解について述べる。

$\mathcal{O}$  を距離空間の部分集合とし、 $w$  を  $\mathcal{O}$  上で定義された実数値関数とする。 $x \in \overline{\mathcal{O}}$  に対して、 $w^*$ 、 $w_*$  を

$$\begin{aligned} w^*(x) &= \limsup_{r \rightarrow 0} \{w(y) \mid |y - x| < r, y \in \mathcal{O}\}, \\ w_*(x) &= \liminf_{r \rightarrow 0} \{w(y) \mid |y - x| < r, y \in \mathcal{O}\} \end{aligned}$$

とする。

**Definition 2.2**  $u$  を  $(0, T) \times \mathcal{R}^N$  で局所有界な関数とする。

- (1)  $u$  が (2.2) の粘性劣解とは、任意の  $\varphi \in C^\infty((0, T) \times \mathcal{R}^N)$  に対して、 $u^* - \varphi$  が  $(t_0, x_0) \in (0, T) \times \mathcal{R}^N$  で極大値を取るならば、 $(t_0, x_0)$  で

$$\varphi_t + F_*(D\varphi, D^2\varphi) \leq 0$$

が成り立つ。

- (2)  $u$  が (2.2) の粘性優解とは、任意の  $\varphi \in C^\infty((0, T) \times \mathcal{R}^N)$  に対して、 $u^* - \varphi$  が  $(t_0, x_0) \in (0, T) \times \mathcal{R}^N$  で極小値を取るならば、 $(t_0, x_0)$  で

$$\varphi_t + F^*(D\varphi, D^2\varphi) \geq 0$$

が成り立つ。

- (3)  $u$  が (2.2) の粘性解とは、粘性劣解かつ粘性優解であることをいう。

粘性解の定義等に関しては [4, 8] などを参照のこと。

**Definition 2.3**  $u_0$  を 2.1 で導入したような関数とし、 $u$  を  $u(0, x) = u_0(x)$  を満たす (2.2) の粘性解とする。

$$\Gamma(t) = \{x \in \mathcal{R}^N \mid u(t, x) = 0\} \quad (\forall t \geq 0)$$

で定義される集合の族  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  を (2.1) の広義解という。

(2.2) に対する粘性解についての結果を証明無しで列挙する。

**Theorem 2.4** (cf. [3, 6, 10, 15])

- (1)  $u$  を (2.2) の粘性劣解、 $v$  を (2.2) の粘性優解とする。 $u, v$  が

$$\sup_{0 \leq t < T, x \in \mathcal{R}^N} \frac{|u(t, x)| + |v(t, x)|}{|x| + 1} < +\infty$$

及び  $u$  または  $v$  が  $[0, T) \times \mathcal{R}^N$  上で一様連続であると仮定する。このとき、 $u(0, x) \leq v(0, x)$  ならば、 $Q$  上で  $u(t, x) \leq v(t, x)$ 。

- (2)  $u_0(x)$  を  $\mathcal{R}^N$  上で一様連続な関数とする。このとき、 $u(0, x) = u_0(x)$  となる  $[0, T) \times \mathcal{R}^N$  上で一様連続な (2.2) の粘性解  $u(t, x)$  が一意的に存在する。

**Theorem 2.5** (cf. [4, 8])  $\{u_n\}$  を

$$u_t + F_n(Du, D^2u) = 0 \quad \text{in } (0, T) \times \mathcal{R}^N$$

の粘性劣解 (粘性優解) とする。任意のコンパクト集合  $K \subset (0, T) \times \mathcal{R}^N$  に対して、

$$\begin{aligned} \sup_n \sup_K |u_n| &< +\infty \\ F_*(p, X) &\leq \liminf_{\substack{(q, Y) \rightarrow (p, X) \\ n \rightarrow +\infty}} F_n(q, Y) \\ (F^*(p, X) &\geq \limsup_{\substack{(q, Y) \rightarrow (p, X) \\ n \rightarrow +\infty}} F_n(q, Y)) \end{aligned}$$

を仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} \bar{u}(t, x) &= \limsup_{\substack{(s, t) \rightarrow (t, s) \\ n \rightarrow +\infty}} u_n^*(s, y) \\ (\underline{u}(t, x) &= \liminf_{\substack{(s, t) \rightarrow (t, s) \\ n \rightarrow +\infty}} u_{n*}(s, y)) \end{aligned}$$

とおくと、 $\bar{u}$  ( $\underline{u}$ ) は (2.2) の粘性劣解 (粘性優解) になる。

上の定理と (2.3) を使うと次の重要な定理を得る。

**Theorem 2.6** (cf. [3, 6])  $\theta: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  を連続な非減少関数とする。 $u$  を (2.2) の粘性劣解 (粘性優解) とする。このとき、 $\theta(u)$  も (2.2) の粘性劣解 (粘性優解) になる。

定理 2.5、2.6 より (2.1) に対する広義解の定義可能性が示される。

**Theorem 2.7** (cf. [3, 6])  $\Gamma_0 \subset \mathcal{R}^N$  を閉集合とし、 $\Omega_0 \subset \mathcal{R}^N$  を  $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$  となる開集合とする。 $u_0$  を

$$\Gamma_0 = \{x \mid u_0(x) = 0\}, \quad \Omega_0 = \{x \mid u_0(x) > 0\}$$

を満たす一様連続な関数とし、 $u$  を  $u(0, x) = u_0(x)$  を満たす一様連続な (2.2) の粘性解とする。更に、

$$\Gamma(t) = \{x \mid u(t, x) = 0\}, \quad \Omega(t) = \{x \mid u(t, x) > 0\} \quad (t \geq 0)$$

とおく。このとき、 $\Gamma(t)$ 、 $\Omega(t)$  は  $u_0$  の取り方によらない。

**Theorem 2.8** (cf. [6])  $\Gamma_0 \subset \mathcal{R}^N$  をコンパクト集合とする。 $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  を  $\Gamma(0) = \Gamma_0$  を満たす (2.1) の広義解とし、 $\{\tilde{\Gamma}(t)\}_{t \geq 0}$  を  $\tilde{\Gamma}(0) = \Gamma_0$  を満たす (2.1) の滑らかな解とする。このとき、 $\Gamma(t) = \tilde{\Gamma}(t) \quad (\forall t \geq 0)$ 。

## 2.3 Distance function approach

前節で導入した等高面の方法は (2.1) の広義解を構成したが、その解が超曲面であるとは一般に言えない。例えば、

$$\Gamma_0 = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| = |x_2|\} \subset \mathcal{R}^2$$

を初期値とする (2.1) の広義解  $\Gamma(t) = \{x \in \mathcal{R}^2 \mid u(t, x) = 0\}$  は  $t > 0$  で内点を持ってしまう。

本節では [21] によって導入された距離関数を用いた定義を与える。この定義では解の一意性は言えないが、この意味でのすべての解は (2.1) の広義解に含まれている。

**Definition 2.9**  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  をコンパクト集合の族とする。

$$d(t, x) = -\text{dist}(x, \bar{\Omega}(t)) + \text{dist}(x, \mathcal{R}^N \setminus \Omega(t))$$

とする。ただし、 $\Omega(t)$  は  $\partial\Omega(t) = \Gamma(t)$  とする有界な開集合とする。

- (1)  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  が (2.1) の距離関数劣解であるとは  $d \wedge 0$  が (2.2) の粘性劣解であるときをいう。
- (2)  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  が (2.1) の距離関数優解であるとは  $d \vee 0$  が (2.2) の粘性優解であるときをいう。
- (3)  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  が (2.1) の距離関数解であるとは (2.1) の距離関数劣解かつ距離関数優解であるときをいう。

$\chi_A$  を  $A \subset \mathcal{R}^N$  の定義関数とする。定理 2.5、2.6 を使うと次の定理を得る。

**Theorem 2.10**  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  をコンパクト集合の族とし、 $\Omega(t)$  は  $\partial\Omega(t) = \Gamma(t)$  とする有界な開集合とする。このとき、 $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  が (2.1) の距離関数劣解 (距離関数優解) であることと、 $\chi_{\Omega(t)}$  が (2.2) の粘性劣解 (粘性優解) であることは同値である。

また、広義解と距離関数解の関係は以下の通りである。

**Theorem 2.11**  $u$  を (2.2) の一様連続な粘性解とする。 $\Gamma_1(t)$ 、 $\Gamma_2(t)$  を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \Gamma_1(t) &= \partial L(t), \quad L(t) = \{x \mid u(t, x) > 0\}, \\ \Gamma_2(t) &= \partial U(t), \quad U(t) = \{x \mid u(t, x) \geq 0\} \end{aligned}$$

このとき、 $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ 、 $\{U(t)\}_{t \geq 0}$  は共に (2.1) の距離関数解である。更に、任意の (2.1) の距離関数劣解  $\{\Gamma(t) = \partial\Omega(t)\}_{t \geq 0}$ 、及び任意の (2.1) の距離関数優解  $\{\tilde{\Gamma}(t) = \partial\tilde{\Omega}(t)\}_{t \geq 0}$  に対して

$$L(0) \subset \Omega(0), \tilde{\Omega}(0) \subset U(0)$$

ならば、

$$L(t) \subset \Omega(t), \tilde{\Omega}(t) \subset U(t) \quad \forall t \geq 0.$$

### 3 Behavior of $u^\varepsilon$ as $\varepsilon \rightarrow 0$

1. でも述べたように  $u^\varepsilon$  の挙動をエネルギー法によって考察する。ここでは以下を仮定する。

$$(1) \quad u^\varepsilon(t, x) = q(z^\varepsilon(t, x)/\varepsilon) \text{ としたときに、} |Dz^\varepsilon(t, x)| \leq 1 \quad (\forall (t, x) \in (0, +\infty) \times \mathcal{R}^N).$$

$$(2) \quad d\mu_t^\varepsilon = \varepsilon E^\varepsilon(t, x) dx, \quad E^\varepsilon(t, x) = |Du^\varepsilon|^2/2 + ((u^\varepsilon)^2 - 1)^2/2\varepsilon^2 \text{ とおいて、}$$

$$c_0 = \sup_{\varepsilon > 0} \mu_0^\varepsilon(\mathcal{R}^N) < +\infty,$$

$$\mu_0^\varepsilon \rightarrow \mu_0 \text{ in the sense of Radon measures } (\varepsilon \rightarrow 0)$$

このとき次の定理を得る。

**Theorem 3.1** 収束列  $\varepsilon_n \downarrow 0$  とラドン測度  $\mu_t$  が存在して

$$\mu_t^{\varepsilon_n} \rightarrow \mu_t \text{ in the sense of Radon measures } (n \rightarrow +\infty, \forall t \geq 0)$$

かつ、 $\Gamma(t) = \text{spt}\mu_t$  は (2.2) の距離関数解になる。更に、

$$u^{\varepsilon_n} \rightarrow \pm 1 \text{ locally uniformly on } (0, +\infty) \times \mathcal{R}^N \setminus \bigcup_{t \geq 0} \{t\} \times \Gamma(t) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

#### 3.1 Energy estimates

ここでは  $E^\varepsilon$  に関するいくつかの評価を導く。まず、

$$(3.1) \quad E_t^\varepsilon = -|u_t^\varepsilon|^2 + \text{div}(Du^\varepsilon u_t^\varepsilon),$$

$$(3.2) \quad DE^\varepsilon = -Du^\varepsilon u_t^\varepsilon + \operatorname{div}(Du^\varepsilon \otimes Du^\varepsilon).$$

$\eta \geq 0$  をコンパクトな台をもつ滑らかな関数とする。(3.1)  $\times \eta - (3.2) \times D\eta$  と (3.1)  $\times \eta + (3.2) \times D\eta$  を計算すると

$$(3.3) \quad \frac{d}{dt} \int \eta E^\varepsilon dx = \int ((\eta_t - \Delta\eta)E^\varepsilon + D^2\eta Du^\varepsilon \cdot Du^\varepsilon) dx - \int \eta |u_t^\varepsilon|^2 dx,$$

$$(3.4) \quad \frac{d}{dt} \int \eta E^\varepsilon dx = \int \left( (\eta_t + \Delta\eta)E^\varepsilon + D^2\eta Du^\varepsilon \cdot Du^\varepsilon + \frac{|D\eta \cdot Du^\varepsilon|^2}{\eta} \right) dx - \int \eta \left| u_t^\varepsilon - \frac{D\eta \cdot Du^\varepsilon}{\eta} \right|^2 dx.$$

(3.3) で  $\eta \equiv 1$  とおくと、

$$(3.5) \quad \int E^\varepsilon(t, x) dx + \int_0^t \int |u_t^\varepsilon(s, x)|^2 dx ds = \int E^\varepsilon(0, x) dx$$

を得る。

$\{\Gamma(t)\}_{0 \leq t \leq t_1}$  を (2.1) の滑らかな解とする。このとき、正数  $\delta, C$  と滑らかな関数  $\eta: [0, t_1] \times \mathcal{R}^N \rightarrow [0, +\infty)$  が存在して、

$$\begin{aligned} \eta(t, x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{dist}(x, \Gamma(t)))^2 \quad (\forall (t, x) : \operatorname{dist}(x, \Gamma(t)) < \delta), \\ \eta(t, x) &\geq \frac{\delta^2}{2} \quad (\forall (t, x) : \operatorname{dist}(x, \Gamma(t)) \geq \delta), \\ \eta(t, x) &= \delta^2 \quad (\forall (t, x) : \operatorname{dist}(x, \Gamma(t)) \geq 2\delta), \\ \|\eta\|_{C^2} &\leq C. \end{aligned}$$

$d(t, x)$  を  $\Gamma(t)$  に対する符号付き距離関数とする。 $\Gamma(t)$  上で  $d_t - \Delta d = 0$ 、 $\mathcal{O} = \{(t, x) \mid \operatorname{dist}(x, \Gamma(t)) < \delta\}$  上で  $d_t - \Delta d \leq C|d|$  であることより、 $\mathcal{O}$  上では

$$(\eta_t - \Delta\eta)E^\varepsilon + D^2\eta Du^\varepsilon \cdot Du^\varepsilon \leq 2C\eta E^\varepsilon + \frac{1}{2}|Du^\varepsilon|^2 - \frac{1}{2\varepsilon^2}((u^\varepsilon)^2 - 1)^2.$$

仮定 (2) を使うと

$$\frac{1}{2}|Du^\varepsilon|^2 - \frac{1}{2\varepsilon^2}((u^\varepsilon)^2 - 1)^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon^2} \left( q' \left( \frac{z^\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 (|Dz^\varepsilon|^2 - 1) \right) \leq 0.$$

よって、

$$(3.6) \quad (\eta_t - \Delta\eta)E^\varepsilon + D^2\eta Du^\varepsilon \cdot Du^\varepsilon \leq 2C\eta E^\varepsilon \quad \text{on } \mathcal{O}$$



一方、 $\mathcal{O}^c$  上では

$$(\eta_t - \Delta\eta)E^\varepsilon + D^2\eta Du^\varepsilon \cdot Du^\varepsilon \leq \frac{2C}{\delta^2}\eta E^\varepsilon$$

が言えるので、 $C$  を大きく取り直して (3.6) が  $[0, t_1] \times \mathcal{R}^N$  で成り立つ。これを (3.3) に代入して Gronwall の不等式を使うと

$$(3.7) \quad \int \eta(t, x) E^\varepsilon(t, x) dx \leq e^{Ct} \int \eta(0, x) E^\varepsilon(0, x) dx \quad (\forall t \in [0, t_1]).$$

$x_0 \in \mathcal{R}^N$ 、 $t_0 > 0$  を固定する。

$$\eta(t, x) = \rho(t, x) = \sqrt{4\pi(t_0 - t)} G(t - t_0, x - x_0)$$

とする。ただし、 $G$  は  $N$  次元の熱核である。すると、

$$\begin{aligned} \rho_t + \Delta\rho &= -\frac{1}{2(t_0 - t)}\rho, \\ D^2\rho\xi \cdot \xi &= -\frac{|\xi|^2}{2(t_0 - t)}\rho + \frac{(\xi \cdot (x - x_0))^2}{4(t_0 - t)^2}\rho \quad (\forall \xi \in \mathcal{R}^N), \\ \frac{|D\rho \cdot \xi|^2}{\rho} &= \frac{(\xi \cdot (x - x_0))^2}{4(t_0 - t)^2}\rho \quad (\forall \xi \in \mathcal{R}^N). \end{aligned}$$

がわかるので、(3.4) に代入すると monotonicity formula を得る (cf. [24, 14]).

$$(3.8) \quad \frac{d}{dt} \int \eta E^\varepsilon dx = \frac{1}{2(t_0 - t)} \int \rho (|Du^\varepsilon|^2 - E^\varepsilon) dx \leq 0 \quad (\forall t < t_0)$$

次の補題は重要な役割を果たす。

$$\alpha^\varepsilon(t; t_0, x_0) = \int \rho(t, x) d\mu_t^\varepsilon(x) \quad (t < t_0)$$

とする。

**Lemma 3.2** (Clearing-out lemma, cf. [22, 16])  $\varepsilon \|Du^\varepsilon\|_\infty \leq k_1$  を仮定する。このとき、定数  $C > 0$  が取れて、

$$\begin{aligned} W(u^\varepsilon(t_0 - \varepsilon^2, x_0)) &\leq C(\alpha^\varepsilon(t_0 - \varepsilon^2; t_0, x_0))^{1/(N+1)} \\ &\leq C(\alpha^\varepsilon(t; t_0, x_0))^{1/(N+1)} \quad (\forall t \leq t_0 - \varepsilon^2). \end{aligned}$$

### 3.2 Convergence to smooth flows

ここでは  $\{\Gamma(t)\}_{0 \leq t \leq t_0}$  が (2.1) の滑らかな解の場合の定理 3.1 を証明する。そのために、

(3)  $\mu_0(\cdot) = \mathcal{H}^{N-1}(\Gamma(0) \cap \cdot)$ 。ただし、 $\mathcal{H}^{N-1}$  は  $N-1$  次元ハスウドルフ測度である。

(4)  $\Gamma(0)$  はコンパクト超曲面である。

**Theorem 3.3**  $u^\varepsilon$  は  $([0, t_1] \times \mathcal{R}^N) \setminus \bigcup_{0 \leq t \leq t_1} \{t\} \times \Gamma(t)$  上で広義一様に  $\pm 1$  に収束する。

証明の概略 (3.7) より

$$\int \eta(t, x) d\mu_t^\varepsilon(x) \leq e^{Ct} \int \eta(0, x) d\mu_0^\varepsilon(x) \quad (\forall t \in [0, t_1]).$$

仮定 (2) - (4) より

$$(3.9) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \eta(t, x) d\mu_t^\varepsilon(x) \quad (\forall t \in [0, t_1]).$$

仮定 (2) と (3.5) より

$$\mu_t^\varepsilon(\mathcal{R}^N) \leq \mu_0^\varepsilon(\mathcal{R}^N) \leq c_0.$$

$t_0 \in (0, t_1]$  と  $x_0 \notin \Gamma(t)$  を任意に固定し、 $R = \text{dist}(x_0, \Gamma(t_0))/2$  とする。 $\varepsilon > 0$   $t < t_0$  に対して、 $\alpha^\varepsilon(t; t_0, x_0)$  を  $B_R(x_0)$  と  $\mathcal{R}^N \setminus B_R(x_0)$  に分けて計算すると

$$\alpha^\varepsilon(t; t_0, x_0) \leq \frac{C}{R^2(t_0 - t)^{(d-1)/2}} \int \eta(t, x) d\mu_t^\varepsilon(x) + \hat{\rho}(t_0 - t, R)c_0$$

ただし、 $\rho(t, x) = \hat{\rho}(t_0 - t, |x - x_0|)$ 。(3.9) より任意の  $r$  に対して

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\alpha^\varepsilon(t - \varepsilon^2; t, x) \mid t \in [r, t_1], \text{dist}(x, \Gamma(t)) \geq r\} = 0.$$

Clearing-out lemma を使って

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \{1 - |u^\varepsilon(t, x)| \mid t \in [r, t_1], \text{dist}(x, \Gamma(t)) \geq r\} = 0.$$

$u^\varepsilon$  の連続性と併せて結論を得る。 □

### 3.3 Proof of Theorem 3.1

補題を2つ用意する。

**Lemma 3.4** (cf. [16])  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  となる列  $\{\varepsilon_n\}$  とラドン測度  $\mu_t$  が存在して

$$\mu_t^{\varepsilon_n} \rightarrow \mu_t \text{ in the sense of Radon measures } (n \rightarrow +\infty)$$

更に、任意の  $\phi \in C_0^\infty(\mathcal{R}^N)$  と  $t_0 > 0$  に対して

$$(3.10) \quad \lim_{t \uparrow t_0} \int \phi(x) d\mu_t(x) \geq \int \phi(x) d\mu_{t_0}(x) \geq \lim_{t \downarrow t_0} \int \phi(x) d\mu_t(x).$$

証明の概略

$$\sup_{\varepsilon > 0, t \geq 0} \mu_t^\varepsilon(\mathcal{R}^N) \leq c_0$$

より、各  $t \geq 0$  に対して  $\mu_t^\varepsilon$  は収束部分列を持つ。 $Q \subset [0, +\infty)$  を稠密な集合とすると対角線論法により、収束列  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  とラドン測度  $\mu_t$  が存在して

$$\mu_t^{\varepsilon_n} \rightarrow \mu_t \text{ in the sense of Radon measures } (n \rightarrow +\infty, \forall t \in Q).$$

$\{\varphi_m\} \subset C_0^\infty(\mathcal{R}^N)$  を稠密な集合とする。(3.3) より

$$\frac{d}{dt} \int \varphi_m d\mu_t^\varepsilon(x) \leq k_m = k_m(\varphi_m)$$

よって

$$f_{m,\varepsilon}(t) = \int \varphi_m d\mu_t^\varepsilon(x) - k_m t \quad (t \geq 0)$$

は非増加関数で

$$(3.11) \quad f_m(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{m,\varepsilon_n}(t)$$

が任意の  $t \in Q$ 、 $m = 1, 2, \dots$  に対して存在する。これを

$$f_m(t) = \lim_{Q \ni s \uparrow t} f_m(s)$$

によって  $[0, +\infty)$  に拡張する。非増加性より  $f_m$  の不連続集合  $\hat{Q}$  は高々可算な集合であり、 $\hat{Q} \cap Q$  上では(3.11) が成り立つ。そこで、必要ならば部分列  $\{\varepsilon_n\}$  を取り直すことにより、 $\hat{Q} \subset Q$  と仮定してよいので、

$$f_m(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{m,\varepsilon_n}(t) \quad (\forall t \geq 0, m = 1, 2, \dots).$$

$f_m(t)$  はその定義より  $\varphi_m$  にしか依らないので、ラドン測度  $\mu_t$  が存在して

$$f_m(t) = \int \varphi_m d\mu_t - k_m t \quad (\forall t \geq 0, m = 1, 2, \dots).$$

$\{\varphi_m\}$  の稠密性より結論を得る。 □

さて、

$$d\mu = d\mu_t dt, \quad \Gamma = \text{spt}\mu, \quad \Gamma(t) = \text{spt}\mu_t$$

とする。

**Lemma 3.5**  $\Gamma = \overline{\cup_{t>0}\{t\} \times \Gamma(t)}$ 。また、 $\Gamma^c$  上で広義一様に  $u^{\varepsilon_n}$  は  $\pm 1$  に収束する。

証明の概略

$$C = \bigcup_{t \geq 0} \{t\} \times \Gamma(t)$$

とおき、 $t_0 > 0$ 、 $(t_0, x_0) \notin \Gamma$  とする。このとき、 $\delta \in (0, t_0)$  と非負関数  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  で  $\phi(x_0) > 0$  となるものがとれて

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x) d\mu_t(x) = 0。$$

故に、 $a.e. t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  に対して

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(x) d\mu_t(x) = 0$$

となり、(3.10) を用いると、この不等式は  $\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  で成り立つ。従って、 $x_0 \notin \Gamma(t_0)$  となるので  $C \subset \Gamma$  を得る。 $\Gamma \subset \bar{C}$  は明らかなので  $\Gamma = \bar{C}$  となる。

次に  $(t_n, x_n) \rightarrow (t_0, x_0) \notin \Gamma$  とする。このとき

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^\varepsilon(t_n; t_n + \varepsilon_n^2, x_n) = 0$$

であり、clearing-out lemma と  $u^\varepsilon$  の連続性より 2 番目の主張を得る。  $\square$

定理 3.1 の証明の概略

$$\delta(t, x) = \text{dist}(x, \Gamma(t)), \quad d(t, x) = \text{dist}(x, \Gamma_t)$$

とおく。ただし、 $\Gamma_t$  は  $\Gamma$  を  $t$  で切った断面である。補題 3.5 より  $\delta_* = d$  に注意しておく。

まず、 $\delta$  が  $\{d > 0\}$  で粘性優解であることを背理法により示す。滑らかな関数  $\varphi$  と  $d - \varphi$  の最小値を取る点  $(t_0, x_0) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^N$  があって

$$(3.12) \quad \beta = -[\varphi_t(t_0, x_0) + F^*(D\varphi(t_0, x_0), D^2\varphi(t_0, x_0))] > 0$$

となると仮定する。このとき、 $0 < d(t_0, x_0) < +\infty$  かつ、 $d$  は  $(t_0, x_0)$  で微分可能としてよい。すると、 $|D\varphi(t_0, x_0)| = |Dd(t_0, x_0)| = 1$  である。 $y_0 \in \mathcal{R}^N$  を

$$d(t_0, x_0) = |x_0 - y_0| \quad (y_0 \in \Gamma_{t_0})$$

とし、

$$\begin{aligned} \psi(t, x) &= \varphi(t_0, x + x_0 - y_0), \\ \Omega(t) &= \{x \in \mathcal{R}^N \mid \varphi(t, x) < \varphi(t_0, x_0)\} \end{aligned}$$

とする。このとき、 $y_0 \in \partial\Omega(t_0)$  となる。

$a > 0$  を十分小さく取り、

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}(t) &= \{x \mid \text{dist}(x, \bar{\Omega}(t)) < a\}, \\ \hat{d}(t, x) &= \partial\hat{\Omega}(t) \text{ に対する符号付き距離関数} \end{aligned}$$

とおくと、(3.12) より  $r > 0$  を小さく取ることにより

$$\hat{d}_t - \Delta \hat{d} < 0 \quad \text{on } (t_0 - r, t_0 + r) \times \Gamma_t \cap B_{2r}(y_0)$$

を得る。ただし、 $y_0 \in \Gamma(t_0)$  は  $d(t_0, x_0) = |x_0 - y_0|$  を満たす。滑らかな非負関数  $\eta$  を

$$\begin{aligned} \eta(t, x) &= \frac{1}{2} \hat{d}(t, x)^2 \quad (0 \leq \hat{d}(t, x) \ll 1), \\ \eta(t, x) &= 0 \quad (\hat{d}(t, x) \leq 0) \end{aligned}$$

となるように取れば、定理 3.3 の証明と同様にして

$$\frac{d}{dt} \int \eta(t, x) d\mu_t(x) \leq 0 \quad (\forall |t - t_0| < r)$$

を得る。

$$\int \eta(t_0 - r, x) d\mu_t(x) = 0$$

であることより、

$$\int \eta(t, x) d\mu_t(x) = 0 \quad (\forall |t - t_0| < r)$$

であるが、 $y_0 \in \Omega(t_0) \cap \Gamma(t_0)$  なので

$$\limsup_{t \rightarrow t_0} \int \eta(t, x) d\mu_t(x) > 0$$

となり、矛盾を得る。故に  $\delta$  は (2.2) の粘性優解である。

次に  $\delta$  が  $(0, T) \times \mathcal{R}^N$  で (2.2) の粘性優解であることを示す。  $h_\varepsilon(r) = (r - \varepsilon)^+$  とし、任意の滑らかな関数  $\varphi$  に対して  $h_\varepsilon(d) - \varphi$  が  $(t_0, x_0)$  で最小値を取ると仮定する。  $d(t_0, x_0) > 0$  のときは  $d$  が  $\{d > 0\}$  で (2.2) の粘性優解であるから定理 2.6 より

$$\varphi_t + F^*(D\varphi, D^2\varphi) \geq 0 \quad \text{at } (t_0, x_0)$$

となる。  $d(t_0, x_0) = 0$  とする。まず、  $x_n \rightarrow x_0$ 、  $t_n \uparrow t_0$  となる点列で  $d(t_n, x_n) = 0$  となるものが存在することをいう。そういう点列が存在しないと仮定すると小さな  $\delta > 0$  に対して

$$\mu_t(B_\delta(x_0)) = 0 \quad (\forall t \in [t_0 - \delta, t_0))$$

が成り立つ。すると、Clearing-out lemma から  $(t_0, x_0) \notin \Gamma$  となり、  $d(t_0, x_0) = 0$  に矛盾する。よって、上のような点列が存在するのでそれを使うと  $\varphi_t(t_0, x_0) \geq 0$  が言える。また、  $|x - x_0| < \varepsilon$  で  $h_\varepsilon(d(t_0, x)) = 0$  なので  $D\varphi(t_0, x_0) = 0$ 、  $D^2\varphi(t_0, x_0) \leq 0$  である。従って、  $h_\varepsilon(d)$  は (2.2) の粘性優解である。  $\varepsilon \rightarrow 0$  とすると定理 2.5 より  $d$  が (2.2) の粘性優解になる。

以上のことと  $F$  が

$$F(\lambda p, \lambda X + \mu p \times p) = \lambda F(p, X) \quad (\forall p \in \mathcal{R}^N, \forall X \in \mathcal{S}^N, \forall \lambda, \mu \in \mathcal{R})$$

を満たすことを使うと、  $-\delta$  が (2.2) の粘性劣解になることがわかる。従って定理 2.6 より  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  が (2.1) の距離関数解になることがわかる。補題 3.4 及び、3.5 とあわせて定理の結論を得る。  $\square$

## 参考文献

- [1] S. Allen and J. Cahn. A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening. *Acta. Metal.*, 27:1084–1095, 1979.
- [2] X. Chen. Generation and propagation of the interface for reaction-diffusion equations. *J. Differential Equations*, 96:116–141, 1992.
- [3] Y.-G. Chen, Y. Giga, and S. Goto. Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations. *J. Differential Geometry*, 33:749–786, 1991.
- [4] M. G. Crandall, H. Ishii, and P.-L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. A. M. S.*, 27:1–67, 1992.
- [5] L. C. Evans, H. M. Soner, and P. E. Souganidis. Phase transition and generalized motion by mean curvature. *Comm. Pure Appl. Math.*, 45:1097–1123, 1992.
- [6] L. C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature. *J. Differential Geometry*, 33:635–681, 1991.
- [7] P. C. Fife. *Dynamical of Internal Layers and Diffusive Interface*, CBMF-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, 1988.
- [8] W. H. Fleming and H. M. Soner. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [9] M. Gage and R. Hamilton. The heat equation shrinking convex plane curves. *J. Differential Geometry*, 23:69–95, 1986.
- [10] Y. Giga, S. Goto, H. Ishii, and M.-H. Sato. Comparison principle and convexity preserving properties for singular degenerate parabolic equations in unbounded domains. *Indiana Univ. Math. J.*, 40:443–470, 1991.
- [11] M. A. Grayson. The heat equation shrinks embedded plane curves to round points. *J. Differential Geometry*, 26:285–314, 1987.
- [12] M. A. Grayson. A short note on the evolution of surfaces via mean curvature. *Duke Math. J.*, 58:555–558, 1989.

- [13] G. Huisken. Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres. *J. Differential Geometry*, 20:237–266, 1984.
- [14] G. Huisken. Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow. *J. Differential Geometry*, 31:285–299, 1989.
- [15] T. Ilmanen. Generalized motion of sets by mean curvature on a manifold. *Indiana Univ. Math. J.*, 42:671–705, 1992.
- [16] T. Ilmanen. Convergence of the Allen-Cahn equation to Brakke's motion by mean curvature. *J. Differential Geometry*, 38:417–461, 1993.
- [17] R. L. Jerrard and H. M. Sonner. Scaling limits and regularity for a class of Ginzburg-Landau systems. 1996.
- [18] S. Osher and J. Sethian. Front propagating with curvature depending speed. *J. Comp. Phys.*, 79:12–49, 1988.
- [19] J. Rubinstein, P. Sternburg, and J. B. Keller. Fast reaction, slow diffusion and curve shortening. *SIAM J. Appl. Math.*, 49:116–133, 1989.
- [20] J. Sethian. Curvature and evolution of fronts. *Comm. Math. Phys.*, 101:487–495, 1985.
- [21] H. M. Sonner. Motion of a set by the curvature of its boundary. *J. Differential Equations*, 101:313–372, 1993.
- [22] H. M. Sonner. Ginzburg-Landau equation and motion by mean curvature. 1994.
- [23] H. M. Sonner. Front propagation. preprint, 1996.
- [24] M. Struwe. On the evolution of harmonic maps in higher dimensions. *J. Differential Geometry*, 28:485–502, 1988.