

Operator Space の紹介

小沢 登高 (Ozawa Narutaka) 東大数理解研 M1

1998 年 3 月 20 日

1 Operator space とは ?

Operator space theory とは $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の subspace を研究する理論です。 $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の subspace は単なる normed space ではなく、 operator space としての構造も持っています。

定義 1 operator space E とは Banach space E と各 $\mathbb{M}_n(E)$ に定義された norm $\|\cdot\|_n$ の組 $(E, \|\cdot\|_n)$ であって、次の 2 つの公理を満たすものとする。

$$(R1) \quad \|\alpha x \beta\|_n \leq \|\alpha\| \|\|x\|_n\| \|\beta\| \quad \text{where } \alpha, \beta \in \mathbb{M}_n \text{ and } x \in \mathbb{M}_n(E)$$

$$(R2) \quad \|x \oplus y\|_{n+m} = \max\{\|x\|_n, \|y\|_m\} \quad \text{where } x \in \mathbb{M}_n(E), y \in \mathbb{M}_m(E)$$

ここで $\alpha x \beta$ は matrix multiplication、 $x \oplus y$ は $\text{diag}(x, y)$ のこととする。

E を $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の closed subspace とする。このとき、 $\mathbb{M}_n(E)$ に norm を

$$\mathbb{M}_n(E) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{B}(\mathcal{H}))$$

によって入れる。これで E は operator space となる。

operator space の subspace は relative norm によってやはり operator space となる。

次に operator space 間の写像を定義しよう。

定義 2 E, F を operator space とし、 $u : E \rightarrow F$ を linear map とする。このとき u は linear maps

$$u \otimes id_n : \mathbb{M}_n(E) \ni [x_{ij}] \mapsto [u(x_{ij})] \in \mathbb{M}_n(F)$$

を induce する。 $\mathbb{M}_n(E), \mathbb{M}_n(F)$ には norm が入っているので、次が定義できる。

$$\|u\|_{cb} = \sup_n \|u \otimes id_n\|$$

そして $\|u\|_{cb} < \infty$ のとき、 u を completely bounded map (cb map) とよび、 $\|\cdot\|_{cb}$ を completely bounded norm (cb norm) とよぶ。

さらに、 $u \otimes id_n$ がすべて contraction のとき u を complete contraction、

$u \otimes id_n$ がすべて isometry のとき u を complete isometry とよぶ。

operator spaces E, F に対し completely isometric isomorphism $u : E \rightarrow F$ が存在するとき $E = F$ と書き、これらを同じものとしてみる。

operator space の名の由来は次の Ruan の定理による。

定理 3 ([11],[5]) 任意の operator space E は $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の operator subspace に completely isometrically isomorphic である。

E が separable なら \mathcal{H} も separable としてよい。

2 Spatial tensor product と cb maps

A が C^* -algebra のとき $M_n(A)$ も C^* -algebra であって、 C^* -algebra 間の $*$ -homo は自動的に contractive だから $*$ -homo は自動的に complete contraction となる。また、 $*$ -iso は complete isometry となる。

cb map を考える利点は次の定理による。

定理 4 ([6],[7]) A を C^* -algebra、 $E \subset A$ を operator subspace、 $u : E \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$ を cb map とする。

このとき、Hilbert space \mathcal{K} と $*$ -homo $\pi : A \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{K})$ 、 $V, W \in \mathbb{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ が存在して、 $\|V\| \|W\| = \|u\|_{cb}$ で、

$$u(x) = V^* \pi(x) W \quad \text{for } x \in E$$

をみたす。

特に、operator spaces E, F と cb map $u : E \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$ に対し cb norm を変えない拡張 $\tilde{u} : F \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$ が存在する。

$E \subset \mathbb{B}(\mathcal{H})$ 、 $F \subset \mathbb{B}(\mathcal{K})$ を operator spaces とするとき、その tensor product $E \otimes F$ は $\mathbb{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ の subspace とみて operator space である。(completion しておく。)

これを C^* -algebra のときと同様に spatial tensor product とよぶ。

上の定理により $u_i : E_i \rightarrow F_i$ ($i = 1, 2$) に対して、

$$u_1 \otimes u_2 : E_1 \otimes E_2 \rightarrow F_1 \otimes F_2$$

は completely bounded で $\|u_1 \otimes u_2\|_{cb} = \|u_1\|_{cb} \|u_2\|_{cb}$ となることがわかる。

特に、 u_i ($i = 1, 2$) が complete isometry なら $u_1 \otimes u_2$ も complete isometry である。定義より operator space E に対して $E \otimes M_n = M_n(E)$ である。 $M_n \subset \mathbb{B}(\mathcal{H})$ であるから $u : E \rightarrow F$ に対して

$$\|u\|_{cb} = \|u \otimes id_{\mathbb{B}(\mathcal{H})}\|$$

である。

3 Dual operator spaces その他

定義 5 ([1],[4]) $CB(E, F)$ を E から F への cb maps の集合とする。これは cb norm で Banach space になっている。次の同一視によって $M_n(CB(E, F))$ に norm を入れる。

$$M_n(CB(E, F)) = CB(E, M_n(F))$$

これによって $CB(E, F)$ は operator space。 E の dual space E^* は $CB(E, \mathbb{C})$ に isometrically isomorphic である。 E^* を $CB(E, \mathbb{C})$ と同一視して operator space にする。これを E の dual operator space とよぶ。

定義より $E^* \otimes M_n = CB(E, M_n)$ である。一般に $E^* \otimes F \subset CB(E, F)$ が成り立つ [2]。特に、 E または F が有限次元なら等号が成り立つ。

次に ultraproduct operator space を定義する。

E_k , $k \in \mathbb{N}$ を operator spaces の列とする。 $\omega \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ を 1 つきめ、 $E_\omega = \prod E_k / \omega$ を ultraproduct とする。次の同一視でこれは operator space になる。

$$M_n(\prod_k E_k / \omega) = \prod_k M_n(E_k) / \omega$$

$u_k : E_k \rightarrow F_k$ のとき自然に $u_\omega : E_\omega \rightarrow F_\omega$ が定まる。このとき、

$$\begin{aligned} \|u_\omega \otimes id_n\| &= \lim_\omega \|u_k \otimes id_n\| \\ &\leq \lim_\omega \|u_k\|_{cb} \end{aligned}$$

よって $\|u_\omega\|_{cb} \leq \lim_\omega \|u_k\|_{cb}$ 特に $u_k : E_k \rightarrow M_n$ のとき $u_\omega : E_\omega \rightarrow M_n$ で、

$$\|u_\omega\|_{cb} = \|u_\omega \otimes id_n\| = \lim_\omega \|u_k \otimes id_n\| = \lim_\omega \|u_k\|_{cb}$$

となるので (初め及び3つ目の等号については [12] を見よ。)

$$\prod E_k^* / \omega \subset (\prod E_k / \omega)^* \quad \text{complete isometrically}$$

である。さらに E_k がすべて n-dim なら等号が成り立つ。

quotient operator space や direct sum operator space も普通に定義できる。

4 Operator Space の例

(i) E を Banach space とする。 E は C^* -algebra $C(B_{E^*})$ の subspace とみて operator space である。ここで、 $B_{E^*} = \{f \in E^* : \|f\| = 1\}$ with weak* topology 一般に、 A を commutative C^* -algebra、 E を operator space とするとき任意の bounded map $E \rightarrow A$ は completely bounded で $\|u\|_{cb} = \|u\|$ となる。これは (Banach spaces, bounded maps) の category が (operator spaces, cb maps) の subcategory であることを意味する。

(ii) $\{e_{ij}\}$ を M_n の matrix unit とするとき、

$$R_n = \text{span}\{e_{1j} : j = 1, \dots, n\}, \quad C_n = \text{span}\{e_{i1} : i = 1, \dots, n\}$$

とおく。これらは M_n の subspace だから operator space。それぞれ row Hilbert space, column Hilbert space とよばれる。これらは Banach space として n-dim Hilbert space ℓ_2^n に isometrically isomorphic であるが、 completely isometrically isomorphic でない。実際、

これらの間の map u に対して $\|u\|_{cb} = \|u\|_{HS}$ (Hilbert-Schmidt norm) となることが知られている。従って、 $u: R_n \rightarrow C_n$ を isomorphism とするとき、

$$\|u\|_{cb} \|u^{-1}\|_{cb} \geq \|uu^{-1}\|_{HS} = n$$

(iii) $CB(\ell_\infty^n, \mathbb{B}(\mathcal{H}))$ を考える。

$$T: \ell_\infty^n \ni e_i \mapsto x_i \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$$

とする。ここで e_i $i = 1, \dots, n$ は ℓ_∞^n の canonical basis。

$$\begin{aligned} \|T\|_{cb} &= \|T \otimes id_{\mathbb{B}(\mathcal{K})}\|_{\ell_\infty^n(\mathbb{B}(\mathcal{K})) \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathbb{B}(\mathcal{K})} \\ &= \sup\{\|\sum x_i \otimes a_i\| : \|a_i\| \leq 1 \quad i = 1, \dots, n\} \\ &= \sup\{\|\sum x_i \otimes u_i\| : u_i \text{ a unitary } i = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

3番目の等号に Russo-Dye の定理を使った。

\mathbb{F}_∞ を free group with countably many generators とし、 $U_1, U_2, \dots \in C^*(\mathbb{F}_\infty)$ を canonical generators とする。

E_1^n を U_1, \dots, U_n で生成される n -dim operator space とする。

任意の $u_i \in \mathbb{B}(\mathcal{K})$ $i = 1, \dots, n$ に対して map $\varphi: E_1^n \ni U_i \mapsto u_i$ は *-homo $\hat{\varphi}: C^*(\mathbb{F}_\infty) \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{K})$ を induce するので、completely contractive である。従って、

$$\|T\|_{cb} = \|\sum x_i \otimes U_i\|$$

となる。これは

$$\mathbb{B}(\mathcal{H}) \otimes E_1^n = CB(\ell_\infty^n, \mathbb{B}(\mathcal{H}))$$

を意味する。

5 Exact operator spaces

定義 6 ([8]) operator space E が exact であるとは、任意の C^* -algebra B とその closed ideal I に対して

$$0 \rightarrow I \otimes E \rightarrow B \otimes E \rightarrow (B/I) \otimes E \rightarrow 0$$

が exact であることとする。このとき、任意の C^* -algebra B とその closed ideal I に対して complete contractive map

$$T: (B \otimes E)/(I \otimes E) \rightarrow (B/I) \otimes E$$

は linear space isomorphism。そこで

$$ex(E) = \sup\{\|T^{-1}\| : B, I\}$$

とおく。 E が exact なら $ex(E) < \infty$ である。

実際、上の supremum は $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ と $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ で与えられることが知られている。ここで、 \mathcal{H} は可分無限次元 Hilbert 空間。

$x = \sum_{i=1}^N b_i \otimes e_i \in B \otimes E$ を任意にとる。このとき $\{e_i : i = 1, \dots, N\}$ で張られる有限次元 operator space を F とすると、

$$\text{dist}(x, I \otimes E) = \text{dist}(x, I \otimes F)$$

である。従って、

$$\text{ex}(E) = \sup\{\text{ex}(F) : F \text{ a finite dimensional operator subspace}\}$$

となる。有限次元 operator space E に対し

$$d_{sK}(E) = \inf\{\|u\|_{cb}\|u^{-1}\|_{cb} : u \text{ a linear isomorphism from } E \text{ onto a matrix space}\}$$

と定める。ここで、matrix space とは full matrix algebra の subspace のこととする。無限次元 operator space E に対しては

$$d_{sK}(E) = \sup\{d_{sK}(F) : F \text{ a finite dimensional operator subspace}\}$$

と定義する。

定理 7 ([8],[10]) operator space E に対し以下は同値。

(i) $\text{ex}(E) < C$

(ii) 任意の operator space の列 (X_n) に対し自然な inclusion

$$\left(\prod_n X_n/\omega\right) \otimes E \hookrightarrow \prod_n (X_n \otimes E)/\omega$$

の norm が C 以下、

(iii) $d_{sK}(E) < C$

Proof. 上で見たことより E は有限次元としてよい。

(i) \Rightarrow (ii): $X_n \subset A_n$ となる適当な C^* -algebra A_k をとればよい。

(ii) \Rightarrow (iii): $E \subset \mathbb{B}(\mathcal{H})$ とし $P_n : \mathbb{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{M}_n$ を自然な compression とし、 $u_n = P_n|_E$ とおく。このとき $x \in E$ に対して明らかに

$$\|x\| = \sup \|u_n(x)\| = \lim \|u_n(x)\|$$

であるから、十分大きな n に対して u_n は injective。以後、この十分大きな n を考える。

$E_n = u_n(E)$ とおくと、 u_n により定まる map

$$u_\omega : E \rightarrow \prod_n E_n/\omega$$

は completely isometric isomorphism である。そこで、 $v = u_\omega^{-1}$ とおく。

$$\begin{aligned} CB\left(\prod_n E_n/\omega, E\right) &= \left(\prod_n E_n/\omega\right)^* \otimes E \\ &= \left(\prod_n E_n^*/\omega\right) \otimes E \\ &\hookrightarrow \prod_n (E_n^* \otimes E)/\omega \end{aligned}$$

であるから $v \in \prod_n (E_n^* \otimes E) / \omega$, $\|v\| < C$ とみなせる。

$$v = (v_n), \quad v_n \in E_n^* \otimes E = CB(E_n, E) \text{ with } \|v_n\| < C$$

と表せば、 E は有限次元ゆえ

$$\lim_{\omega} \|v_n - u^{-1}\|_{cb} = 0$$

従って、 $d_{sK}(E) < C$ 。

(iii) \Rightarrow (i): 簡単。

6 Norm が一意に定まる tensor product

定理 8 (E.Kirchberg)

$$\mathbb{B}(\mathcal{H}) \otimes C^*(\mathbb{F}_\infty) = \mathbb{B}(\mathcal{H}) \otimes_{\max} C^*(\mathbb{F}_\infty)$$

証明には以下の Lemma が必要。

Sublemma. 任意の n , 任意の $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ に対して

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i a_i^* \right\|^{1/2} \left\| \sum_{i=1}^n b_i^* b_i \right\|^{1/2}$$

Proof. 簡単。(Cauchy-Schwarz inequality を使う。)

Lemma. 任意の n , 任意の $x_i, \dots, x_n \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ に対して

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n x_i \otimes U_i \right\|_{\mathbb{B}(\mathcal{H}) \otimes C^*(\mathbb{F}_\infty)} &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i \otimes U_i \right\|_{\mathbb{B}(\mathcal{H}) \otimes_{\max} C^*(\mathbb{F}_\infty)} \\ &= \inf \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n a_i a_i^* \right\|^{1/2} \left\| \sum_{i=1}^n b_i^* b_i \right\|^{1/2} : x_i = a_i b_i \right\} \end{aligned}$$

ここで $U_1, U_2, \dots \in C^*(\mathbb{F}_\infty)$ は canonical generators とする。

Proof. 初めの式; 二番目の式は明らか。二番目の式; 三番目の式は Sublemma を $a_i \otimes U_i$ と $b_i \otimes 1$ に対して使えばよい。三番目の式; 初めの式を以下示す。operator space の例 (iii) で見たように

$$T : \ell_\infty^n \ni e_i \mapsto x_i \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$$

に対して

$$\|T\|_{cb} = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \otimes U_i \right\|_{\mathbb{B}(\mathcal{H}) \otimes C^*(\mathbb{F}_\infty)}$$

となる。定理 4 により

$$T(\alpha) = V^* \pi(\alpha) W$$

である。ここで $\pi : \ell_\infty^n \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{K})$ は *-homo, $V, W \in \mathbb{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ with $\|V\| \|W\| = \|T\|_{cb}$

このとき ℓ_∞^n は有限次元なので $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ としてよい。最後に、 $a_i = V^* \pi(e_i)$, $b_i = \pi(e_i) W$ とおけばよい。

Remark. U_1^{-1} を左から掛けることによって $U_1 = 1$ としてもよい。(このとき $U_2, U_3, \dots \in C^*(\mathbb{F}_\infty)$ が canonical generators.)

Proof of Theorem. [9] E を $1 = U_1, U_2, \dots \in C^*(\mathbb{F}_\infty)$ で張られる operator space とする。

$$S : \mathbb{B}(\mathcal{H}) \otimes E \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H}) \otimes_{max} C^*(\mathbb{F}_\infty) \subset \mathbb{B}(\mathcal{K})$$

は Lemma により unital complete isometry。よって unital complete contraction (= unital complete positive mapping)

$$\widehat{S} : \mathbb{B}(\mathcal{H}) \otimes C^*(\mathbb{F}_\infty) \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{K})$$

に拡張できる。 \widehat{S} の multiplicative domain [3] は C^* -algebra で $\mathbb{B}(\mathcal{H}) \otimes E$ を含む。従って \widehat{S} は $*$ -homo で algebraic tensor product $\mathbb{B}(\mathcal{H}) \otimes C^*(\mathbb{F}_\infty)$ の上で identity mapping。すなわち、

$$\mathbb{B}(\mathcal{H}) \otimes C^*(\mathbb{F}_\infty) = \mathbb{B}(\mathcal{H}) \otimes_{max} C^*(\mathbb{F}_\infty)$$

参考文献

- [1] D.Blecher, The standard dual of an operator space, Pacific J.Math.153(1992),15-30.
- [2] D.Blecher and V.Paulsen, Tensor products of operator spaces, J.Funct.Anal.99(1991),262-292.
- [3] M.D.Choi, A Schwarz inequality for positive linear maps on C^* -algebras, Illinois J.Math.18(1974),565-574.
- [4] E.Effros and Z.J.Ruan, A new approach to operator spaces, Canadian Math.Bull.34(1991),329-337.
- [5] —, On the abstract characterization of operator spaces, Proc.Amer.Math.Soc.119(1993),579-584.
- [6] V.Paulsen, Completely bounded maps and dilations, Pitman Research Notes 146.Pitman Longman (Wiley) 1986
- [7] G.Pisier, Completely bounded maps between sets of Banach space operators, Indiana Univ.Math.J.39(1990),251-277.
- [8] —, Exact operator spaces, Recent advances in operator algebras(Orleans 1992),Asterisque(Soc.Math.France)232(1995),159-186.
- [9] —, A simple proof of a theorem of Kirchberg and related results on C^* -norms, J.Op.Theory 35(1996),317-335.
- [10] —, An introduction to the theory of operator spaces, preprint.

- [11] Z.J.Ruan, Subspaces of C^* -algebras. *J.Funct.Anal.*76(1988),217-230.
- [12] R.R.Smith, Completely bounded maps between C^* -algebras, *J.London Math.Soc.*27(1983),157-166.