数理解析研究所講究録
1046巻 1998年 9-14

C^*- 環上の Schur 型クロスノルム

群馬大学教育学部　伊藤 隆 (Takashi ITOH)

1. はじめに

A, B を operator space とする。Operator space の代数的テンソル積 $A \otimes B$ に入るノルムで、再び operator space (さらに、operator space cross norm [2]) になるという意味で重要な、次の3つのノルムがある。

$M_n(A \otimes B) \ni x$ に対し、

Spacial operator norm
$\|x\|_\vee = \sup\{\| < f \otimes g, x > \| \mid f \in M_p(A^*), g \in M_q(B^*), p, q \in \mathbb{N}\}$

Haagerup norm
$\|x\|_h = \inf\{\|a\|\|b\| \mid x = a \odot b, a \in M_{n,p}(A), b \in M_{p,n}(B), p \in \mathbb{N}\}$

Projective operator norm
$\|x\|_\wedge = \inf\{\|\alpha\|\|a\|\|b\|\|\beta\| \mid x = \alpha(a \otimes b)\beta, \alpha \in M_{n,pq}, a \in M_p(A), b \in M_q(B), \beta \in M_{pq,n}, p, q \in \mathbb{N}\}$

ここで、
$a \odot b = [\sum_{k=1}^p a_{ik} \otimes b_{kj}] \in M_n(A \otimes B)$,
$a \otimes b = [a_{ij} \otimes b_{kl}]_{ik|jl} \in M_{p\times q}(A \otimes B)$.

$\| \ \|_\vee$ は、C^*- 環の spacial tensor 積の operator space への拡張である。$\| \ \|_h, \| \ \|_\wedge$ のあらわれた理由は、[4] における module map との関連、[2] における構造から説明できるかもしれない。しかし、[5] の introduction に書かれているように、80年代後半まで、completely bounded map と completely positive map の取り扱いにおいて、いくつかの場面で frustration があった。

ここでは、その frustration から派生すること、またその視点から Schur 型の cross norm が、導入出来ることを説明する。

2. 完全有界性とテンソル積

A, B を C^*- 環とする。 Lance [12] によって導入された A から B^* への completely positive map $\varphi \in CP(A, B^*)$ は、

$$\varphi_n : M_n(A) \longrightarrow M_n(B^*), \quad [a_{ij}] \longmapsto [\varphi(a_{ij})]$$

が、任意の n で positive map であるときをいう。これを copmletely bounded map ($\sup \|\varphi_n\| < \infty$) まで、 Lance の導入した $M_n(B^*)$ の定義を踏襲すると、 A から B^* への completely bounded map 全体 $CB(A, B^*)$ は、 $CB(A, B^*) = \{0\}$ となってしまう。

Wittstock[14], Paulsen[13], Haagerup[7], Huruya[9] 等の A から B への completely bounded map の completely positive 分解に比べると、極端に意味を持たない。

これは、もちろん $M_n(B^*)$ の理解の仕方に起因するのであるが、 Lance の定義は、 $M_n(B^*) = M(B)^*$ であった。即ち、 $M_n(B^*) \ni [f_{ij}]$ に対して、

(L)

$$[f_{ij}] : M_n(B) \longrightarrow \mathbb{C},\ [x_{ij}] \longmapsto \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(x_{ij})$$

また [10] c.f.([2], [8]) では、

(I)

$$[f_{ij}] : M_n(B) \longrightarrow \mathbb{C},\ [x_{ij}] \longmapsto \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{n} f_{ij}(x_{ij})$$

そして [5] [2] は、

(E,R,B,P)

$$[f_{ij}] : B \longrightarrow M_n(\mathbb{C}),\ x \longmapsto [f_{ij}(x)]$$

と定義した。

Banach space の一般論で、 Banach space X, Y において、 X から Y^* への bounded map 全体 $B(X, Y^*)$ は、 $X \otimes Y$ に projective cross norm

$$\|x\|_\gamma = \{\sum_{i=1}^{n} \|a_i\|\|b_i\| \ |x = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\}$$

を入れたものの dual と同型 (i.e. $B(X, Y^*) \cong (X \otimes_\gamma Y)^*$) であったように、

(I) で、任意の n に対し $\varphi_n : M_n(A) \longrightarrow M_n(B^*)$ が、一様に有界な φ 全体 $TB(A, B^*)$ は、**Tracially bounded norm**

$$\|x\|_{tb} = \{\sum_{k=1}^{N} \|[a_{ij}^{(k)}]\|\|[b_{ij}^{(k)}]\|n \mid x = \sum_{k=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \otimes b_{ij}^{(k)}\}$$

を入れた空間 $A \otimes_{tb} B$ の dual と同型（i.e. $TB(A, B^*) \cong (A \otimes_{tb} B)^*$）である。

そして、(R,E,B,P) で、任意の n に対し $\varphi_n : M_n(A) \longrightarrow M_n(B^*)$ が、一様に有界な φ 全体 $CB(A, B^*)$ は、projective operator norm $\| \quad \|_\wedge$ を入れた $A \otimes_\wedge B$ の dual に他ならない。（i.e. $CB(A, B^*) \cong (A \otimes_\wedge B)^*$）。

これを、Haagerup norm $\| \quad \|_h$ について見てみると、

$$[f_{ij}] : M_n(B) \longrightarrow M_n(\mathbb{C}),\ [x_{ij}] \longmapsto \sum_{k=1}^{n}[f_{ik}(x_{kj})]$$

と $M_n(B^*) \ni [f_{ij}]$ を定義したとき、一様有界な h-completely bounded map $h-CB(A, B^*)$ が、$A \otimes_h B$ の dual と同型になっている。（i.e. $h-CB(A, B^*) \cong (A \otimes_h B)^*$）。

つまり、$M_n(B^*) \ni [f_{ij}]$ にノルムを導入するごとに、テンソル積 $A \otimes B$ 上にクロスノルムが、定義されたわけである。

2. Schur 型クロスノルム

行列を積み上げた形の順序構造として、$*$-vector space X が、$n \times m$ スカラー行列 α に対し、

$$\alpha^* M_n(X)^+ \alpha \subset M_m(X)^+$$

という性質を持つ錐 $M_n(X)^+ \subset M_n(X)_{sa}$ によって任意な n で $M_n(X)_{sa}$ が順序付けられているとき、X を matrix ordered space と呼ぶ [3]。

C^*- 環 A から C^*- 環 B の dual B^* への completely positive map に対しては、(L) の方法が順序構造として適切であり、completely bounded map に対しては、(E,R,B,P) の定義が、適当であるとみなされている。そして、(E,R,B,P) の方法は、順序構造においても、Lance による completely positive map の意味を変えていないという次の結果 [11] がある。

定理 1　　X を matrix ordered space とする。$M_n(X^*) \ni [f_{ij}]$ に対して、以下の 5 つは、同値である。

(1) $X \longrightarrow M_n(\mathbb{C}) : x \longmapsto [f_{ij}(x)]$ は、 completely positive。

(2) $M_n(X) \longrightarrow M_n(\mathbb{C}) : [x_{ij}] \longmapsto [f_{ij}(x_{ij})]$ は、 positive。

(3) $M_n(X) \longrightarrow M_n(\mathbb{C}) : [x_{ij}] \longmapsto [f_{ij}(x_{ij})]$ は、 completely positive。

(4) $M_n(X) \longrightarrow \mathbb{C} : [x_{ij}] \longmapsto \sum f_{ij}(x_{ij})$ は、 positive。

(5) $M_n(X) \longrightarrow \mathbb{C} : [x_{ij}] \longmapsto \sum f_{ij}(x_{ij})$ は、completely positive。

(2) と (4) をみると C^*- 環 B に対して、$M_n(B^*) \ni [f_{ij}]$ を

(I2)

$$[f_{ij}] : M_n(B) \longrightarrow M_n(\mathbb{C}), [x_{ij}] \longmapsto [f_{ij}(x_{ij})]$$

と定義したものに対しても (L) の順序構造 (completelty positivity) は、変わらないことがわかる。そこで、 operator space B に対しても (I2) を $[f_{ij}] \in M_n(B^*)$ に導入し (i.e. $\|[f_{ij}]\| = \sup\{[f_{ij}(x_{ij})] \mid \|[x_{ij}]\| \le 1\}$)、任意の n に対し $\varphi_n : M_n(A) \longrightarrow M_n(B^*)$ が、一様に有界な φ を Schur bounded maps $SB(A, B^*)$ と呼ぶことにする。

このとき、 operator space A, B のテンソル積 $A \otimes B$ 上に新しい norm (**Schur operator norm** と呼ぶ) $\| \quad \|_s$ が、定義できる。

定義 2 $M_n(A \otimes B) \ni x$ に対し、

$\|x\|_s = \inf\{\|\alpha\|\|a\|\|b\|\|\beta\| \mid x = \alpha(a \oslash b)\beta, \alpha \in M_{n,p}, a \in M_p(A), b \in M_p(B), \beta \in M_{p,n}, p \in \mathbb{N}\}$

ここで、 $a \oslash b = [a_{ij} \otimes b_{ij}] \in M_p(A \otimes B)$.

このとき、次のことが得られる。

定理 3 A, B を operator space とする。$A \otimes B$ は、Schur operator norm $\| \quad \|_s$ で projectivity をもつ operator space になり、$SB(A, B^*)$ と同型である。(i.e. $SB(A, B^*) \cong (A \otimes_s B)^*$)

そして、他のノルムとの関係は、

$$A \otimes B \ni x \text{に対し} \quad \|x\|_\wedge \le \|x\|_s \le \|x\|_{tb}$$

であり、

定理 4 A, B を C^*- 環とする。$\| \quad \|_{tb}$ と $\| \quad \|_s$ が $A \otimes B$ 上同値であるための必要十分条件は、 A または、B が subhomogeneous (既約表現の次元が、すべて有限) なことである。

$\| \ \|_\wedge$ と $\| \ \|_s$ の差異は、不明である。

参考文献

[1] D.P. Blecher, *Tracially completely bounded multilinear maps on C^*-algebras*, J. London Math. Soc. **39** (1989), 514–524.

[2] Blecher and V.I. Paulsen, *Tensor products of operator spaces*, J.Funct.Anal. **99** (1991), 262–292.

[3] M.D. Choi and E.G. Effros, *Injectivity and matrix ordered space*, J. Funct. Anal. **24**(1977), 156–209.

[4] E.G. Effros and A. Kishimoto *Module maps and Hochschild-Johnson cohomology*, Indiana Univ.Math.J. 36 (1987), 257–276.

[5] E.G. Effros and Z.-J. Ruan, *A new approach to operator spaces*, Bull.Can.Math.Soc. **34** (1991), 329–337.

[6] E.G. Effros and Z.-J. Ruan, *On approximation properties for operator spaces*, Int.J.Math. **1** (1990), 163–187.

[7] U. Haagerup, *Injectivity and decomposition of completely bounded maps*, Lecture Notes in Math. **1132** (1983), 170–222.

[8] U. Haagerup and T. Itoh, *Grothendieck type norms for bilinear forms on C^*-algebras*, J.Operator Theory **34** (1995), 263–283.

[9] T. Huruya, *Decompositions of linear maps into non separable C^*-algebras*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **21** (1985), 645–655.

[10] T. Itoh, *On the completely bounded map of a C^*-algebra to its dual space*, Bull. London Math. Soc. **19** (1987), 546–550.

[11] T. Itoh, *Completely positive decompositions from duals of C^*-algebras to Von Neumann Algebras*, preprint.

[12] E.C. Lance, *On nuclear C^*-algebras* J. Funct. Anal. **12** (1973), 157–176.

[13] V.I. Paulsen, *Completely bounded maps on C^*-algebras and invariant operator ranges*, Proc. Amer. Math. Soc. **86** (1982), 91–96.

[14] G. Wittstock, *Ein operatorwertiger Hahn-Banach Satz*, J. Funct. Anal. **40** (1981), 127–150.