数理解析研究所講究録
1046 巻 1998 年 53-59

Full groups,normalizers for homeomorphism C*-algebaras

富山 淳

〒112 東京都文京区目白台 2-8-1
日本女子大学 理学部

1 はじめに

コンパクトな空間 X 上の位相同型 σ による力学系 Σ を考える。X 上の連続関数環を $C(X)$, σ によってひきおこされた同型を α とし対応する C*-クロス積を $A(\Sigma)$ とかきこれを homeomorphism C*-環と呼ぶ。またその中での canonical な $C(X)$ への norm 1 の projection を E,生成ユニタリ元を δ とかく。以下 Σ と $A(\Sigma)$ との相互作用を考えるのであるがこのとき我々の理論で中心のひとつとなるのは $A(\Sigma)$ の同型と力学系との間にどのような関係があるかという問題である。非特異エルゴード変換からつくられる von Neumann 因子環 (factor) のときにはその解答は Dye-Krieger による次の明解な結果であった。

定理 A ルベック空間上の非特異エルゴード変換よりつくられる factor の間の同型は変換の間の軌道同値関係と同値である。

しかし位相力学系の場合には、これに対応する結果はたとえ極小系でも成り立たない。上の定理では対応する von Neumann Factor における Normalizer と可測系の Full group が大きな役割を演じた。この講ではそこで位相力学系におけるこれらの概念のもたらす意味を考えてみる。これは当然上に述べた同型の問題に関連し位相力学系の軌道同値の問題をも呼び起こすが、これはまたその先の大きな課題なのでここでは立ち入らないことにする。また以下の文では証明は関係する論文(未発表のものもあるが)に譲り原則としてここではつけない。

2 位相力学系での full groups

原則として周期点の存在を前提に考えるを通常の位相力学系の議論では topologically transitive のクラスがもつとも良く使われるクラスであるが、我々の議論では次のクラスを考える。

定義 1 Σ の非周期点が X で dense なとき此の系を Topologically free と呼ぶ。ちなみに周期点がない時には系は通常 free な系と呼ばれている。

Topologically free な系は有理数回転のような特殊なものを除けば殆どの例を含む位広い系なので力学系のテキストには通常取り扱われていない。しかし以下に見られるように此の系は C*- 環論との相互作用に充分答えてくれる。

定義 2 力学系 $\Sigma = (X, \sigma)$ について σ の Full group を次で定義する。

$$[\sigma] = \{\tau \in Homeo(X) | \quad \tau(O_\sigma(x)) = O_\sigma(x) \quad x \in X\}$$

定義から明らかに $[\sigma]$ は $Homeo(X)$ の部分群である。そして $[\sigma]$ の任意の元 τ について X 上の整数値関数 (jump 関数) $n(x)$ が次のようにとれる、

$$\tau(x) = \sigma^{n(x)}(x), \qquad x \in X.$$

ここで $n(x)$ の値は非周期点の上では一意に定まるが、周期点上では一意ではない。そしてこれから多くの困難が生じる。Full group の概念は始めに可測力学系において H.A.Dye ([2]) によって与えられた。このときには $n(x)$ の問題は可測性のみであった。しかし位相力学系においては $n(x)$ の性質の区別がまず大きな問題となる。まず $n(x)$ を一つ固定しこれから生成されるコサイクル関数 $f(k,x)$ を次のように定める。

$$f(k,x) = \begin{cases} n(x) + n(\tau x) + \ldots + n(\tau^{k-1}x), & \text{for } k > 0 \\ -[n(\tau^{-1}x) + n(\tau^{-2}x) + \ldots + n(\tau^{k}x)], & \text{for } k < 0 \\ 0, & \text{for } k = 0 \end{cases}$$

このとき任意の k と x について

$$\tau^k(x) = \sigma^{f(k,x)}(x)$$

であり f は更に次のコサイクル条件をみたす。

$$f(k+\ell, x) = f(k, \tau^\ell x) + f(\ell, x).$$

定義 2 (a) $[\sigma]$ の中で $n(x)$ が有界にとれるもの全体のつくる部分群を有界 Full group と呼び $[\sigma]_b$ とかく。

(b) 同様に $n(x)$ が連続にとれるもの全体を連続 Full group と呼び、$[\sigma]_c$ とかく。

力学系がカントル集合上の極小系のときは full group は $[\sigma]_c$ の段階でも充分に大きく Giordano-Putnam-Skau [3][4] によりその構造は Dye の結果に対応する形にまで研究されている。しかし一般には可測系の場合と大きく異なり位相力学系においては次のように意味を成さない場合もでてくる。

Proposition 1 X が連結で σ が free のときは $[\sigma]$ はつねに自明すなわち

$$[\sigma] = \{\sigma^n | n \in Z\}$$

である。

これはこのとき X が高だか可算個の disjoint な閉集合の和で表わされるならば、それは有限和のときと同様に1個に帰着するという古典的な Sierpinski の結果を用いればが容易に分かるが、Sierpinski の結果そのものは深い定理なのでそう自明な事柄ではない。

これに対して σ が単に free のときには どの空間でも $[\sigma]_b$ と $[\sigma]_c$ とは一致する。これは $[\sigma]_b$ においては $n(x)$ の不連続点が必ず周期点として現われるためである。更に次のことは容易にわかる。

Proposition 2 X を 0-次元とする。このとき σ が高だか1つの不動点しか持たないときは $[\sigma]_c$ が充分おおきい、即ち X の異なる2点 x, y に対して $[\sigma]_c$ の元 τ が存在して

$$\tau(x) = \sigma^i(x) \quad \tau(y) = \sigma^j(y) \quad (i \neq j)$$

連結な空間では $[\sigma]_c$ は勿論自明であるが一般の full group $[\sigma]$ は大きくなることも有り得る。しかし充分大きな full group を持つ力学系の例を筆者は知らない。一方2次元のトーラス上で (s, t) を $(s, t+s)$ に移す 所謂 toral automorphism を考えると此の系は s-座標を分離するくらい大きな有界 full group を持つが full group 全体は t-座標を分離するまでにはならない。

Full group の全体像 についてはまだまだ議論は出発点の域を出ていない。

3 Normalizers

C*-環 $A(\Sigma)$ と $C(X)$ の unitary 群をそれぞれ $U(A(\Sigma))$ 、$U(C(X))$ とかく。そこで $C(X)$ の normalizer を次のように考えるが、可測系のときとは異なって $A(\Sigma)$ での normalizer が関係するのは連続 full group $[\sigma]_c$ のみである。

定義 3 $A(\Sigma)$ での $C(X)$ の normalizer を次でさだめる,

$$N(C(X), A(\Sigma)) = \{v \in U(A(\Sigma)) | \quad vC(X)v^* = C(X)\}$$

3 Normalizers

定義より normalizer v は X の位相同型 τ_v を定める。このときエルゴード可測系での結果の C*-版としてまず次のことが成り立つ。

Theorem 3 ([8]) 力学系を topologically free とする。このとき対応 ; $v \to \tau_v$ によって次の short exact sequence が得られる。さらにこの列は分解する。

$$1 \longrightarrow U(C(X)) \longrightarrow N(C(X), A(\Sigma)) \longrightarrow [\sigma]_c \longrightarrow 1.$$

証明は長く次の段階に別れる。まず normalizer v が $[\sigma]_c$ の元をきめることは

Lemma 3.1 $\tau_v(0_\sigma(x)) = 0_\sigma(x) \quad \forall x \in X.$

この補題は純然たる力学系のものであるが つぎの補題とともにその証明には $A(\Sigma)$ の既約表現の形を利用する。

Lemma 3.2 非周期点 x について次は同値である,

(1) $\tau_v(x) = \sigma^n(x)$,

(2)$|v^*(-n)(x)| = 1$, よってまた $i \neq 1, m \neq n$ のとき

$$v^{*i}(-n)(x) = 0, \quad v^*(-m)(x) = 0.$$

ここで $v^*(-n)$ はクロス積 $A(\Sigma)$ での $-n$ 次のフーリエ級数である、すなわち $v^*(-n) = E(v^*\delta^n)$.

Lemma 3.3 $\{F_n\}_{n\in Z}$ を X の closed covering とすると

$$X = \overline{\bigcup_{n\in Z} F_n^0}$$

ここで F_n^0 は F_n の内部を示す。

次の補題が前半の終わりである。

Lemma 3.4 τ_v は $[\sigma]_c$ の元である。

略証. 最初の補題より τ_v は σ の各軌道を保存するので jump function $n(x)$ が $Aper(\sigma)$ 上では一意にきまる。そこで

$$X(\tau_v, n) = \{x \in X| \quad \tau_v(x) = \sigma^n(x)\}$$

とおくと、$\{X(\tau_v, n)\}$ は X の closed covering, よって前の補題により U_k を $X(\tau_v, n_k)$ の空でない内部とすると

$$X = \overline{\bigcup U_k}.$$

更に topological freeness より $\{U_k\}$ は disjoint である。ここで更に連続関数 $v^*(-n_k)$ に補題 7.2.2 を適用すると結局各 $\overline{U_k}$ が開かつ閉なことがわかる。また v が unitary であることから $\{\overline{U_k}\}$ が disjoint な有限族であることが判るので, $\overline{U_k}$ 上で $n(x)$ の値を n_k とすれば $Aper(\sigma)$ 上の $n(x)$ の X 全体への連続な拡大が得られる,i.e. τ_v は $[\sigma]_c$ に属する。

逆に $[\sigma]_c$ の元 τ について $C(X)$ に引き起こされた同型を α_τ とすると、これに対する normalizer v は次のようにきまる。

先ず $n(x)$ の range を

$$\{n_k | 1 \leq k \leq k(\tau)\}$$

とすると $\{X(\tau, n_k)\}$ は disjoint な開かつ閉な集合による X の有限被覆である。そこで $p(\tau, k)$ をそれらの特性関数とし

$$v = \sum_{k=1}^{k(\tau)} \delta^{n_k} p(\tau, k) = \sum_{k=1}^{k(\tau)} \alpha^{n_k}(p(\tau, k))\delta^{n_k}$$

とおくと、v は normalizer であり更に同型 α_τ を与える.

最後に系が topologically free のときには $C(X)$ は $A(\Sigma)$ の maximal abelian sugalgebra になるので 対応:$v \to \tau_v$ の kernel は $U(C(X))$ となり定理の証明が終わる。

つぎに Full group $[\sigma]$ の normalizer を次のように定める。

$$N[\sigma] = \{\tau \in Homeo(X) | \quad \tau[\sigma]\tau^{-1} \in [\sigma]\}$$

このときこの normalizer は以下のようにも考えられる。

命題 4

$$N[\sigma] = \{\gamma \in Homeo(X) | \quad \gamma(O_\sigma(x)) = O_\sigma(\gamma(x))\}$$

$A(\Sigma)$ の同型対応群の次の部分群を考える。

$$Aut_{C(X)}A(\Sigma) = \{\beta \in Aut(A(\Sigma)) | \quad \beta(C(X)) = C(X)\}$$

$$Inn_{C(X)}A(\Sigma) = \text{subgroup of all inner automorphisms of } Aut_{C(X)}A(\Sigma)$$

更に、

$$U_\sigma = \{f \in U(C(X)) | \quad \exists g \in U(C(X)), \quad f = g\alpha(\bar{g})\}$$

とおく。そこで $U(C(X))$ より $Aut_{C(X)}A(\Sigma$ への準同型 ι を

$$\iota(g)f = f \quad \forall f \in C(X), \qquad \iota(g)\delta = g\delta$$

で定義する。これが可能なことは $\iota(g)$ が $\{C(X),\alpha\}$ の共変表現を与えることからわかる。さて $A(\Sigma)$ での $C(X)$ の normalizers の議論は定理 3 のように一般化出来るのでカントル極小系についての次の GPS の結果([4]) も topologically free な系にまで拡張出来る。すなわち次のことが成り立つ。

定理 5 Σ が topologically free なとき、次の short exact sequence が出来る。尚これらの sequence は分解する。

$$1 \longrightarrow U(C(X)) \xrightarrow{\iota} Aut_{C(X)}A(\Sigma) \xrightarrow{\kappa} N[\sigma]_c \longrightarrow 1,$$

$$1 \longrightarrow U_\sigma \xrightarrow{\iota} Inn_{C(X)}A(\Sigma) \xrightarrow{\kappa} [\sigma]_c \longrightarrow 1.$$

ここで κ は $C(X)$ の同型対応から X の位相同型への自然な対応である。

証明については富山 [9]。

これらのことから $[\sigma]_c$ 役割が分かりその結果は $A(\Sigma)$ の同型問題のなかで特にそのなかの連続関数環を保存する同型の力学系えの反映、制限同型問題、の解決に大きく寄与する ([1]).

次に有界 full group については、もし σ が "reasonabale" な測度 μ を持ちそれについて非周期的変換になっているときには、前述のように jump function $n(x)$ の不連続点は周期点にのみ現われるので定理 3 を使うと $[\sigma]_b$ の元は $L^\infty(X,\mu)$ の C*- クロス積の中その normalizer としてで実現でき、そして exact sequence も同様に formulate できる。しかし一般 full group の元はこの状況でも実現は無理で更にその weak closure (したがって von Neumann クロス積) まで場面 h が広がってしまう。このように位相同型の full group の問題は作用素環の視点から C*- 環の枠組みにおさまりきれない複雑さがある。そしてそれはまた位相力学系の軌道同値の問題と絡み非常に興味深い沢山の問題を提供している。

参考文献

[1] M.Boyle-J.Tomiyama,Bounded topological orbit equivalence and C*-algebras, to appear in J.Math.Soc.Japan.

[2] H.A.Dye, On groups of measure preserving transformations I,II, Amer. J.Math. 81(1959),119-159,85(1963),551-576,

[3] T.Giordano-I.Putnam-C.Skau,Topological orbit equivalence and C*-crossed products,J.reine und angew.Math.,469(1995),51-111

[4] T.Giordano-I.Putnam-C.Skau,Full groups of minimal Cantor systems,preprint

参考文献

[5] J.Tomiyama,Invitation tp C*-algebras and topological dynamics, World Sci.Ltd.Singapore 1987.

[6] J.Tomiyama,The interplay between topological dynamics and theory of C*-algebras,Lecture note No.2,Res.Inst.Math.Globasl Anal.Center, seoul,1992.

[7] J.Tomiyama,C*-algebras and topological dynamical systems,Review Math.Physics, 88(1996),741-760.

[8] J.Tomiyama,Topological full groups and structure of normalizers in transformation C*-algebras,Pacific J.Math.,173(1996).

[9] J.Tomiyama, Representations of topological dynamical systems and aC*-algebras, preprint.