数理解析研究所講究録
1047 巻 1998 年 1-11

Schrödinger 方程式の解の最大関数についての Besov ノルムによる L_p 評価

福間誠士 (筑波大学博士課程) (Seiji Fukuma)
村松壽延 (中央大学理工学部) (Hisanobu Muramatsu)

1 序と主要な結果

非線型 Schrödinger 方程式の初期値問題：

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u + F(u,\overline{u},\nabla_x u,\nabla_x \overline{u}), & (t,x)\in(0,T)\times \mathrm{R}^n, \\ u(0,x)=u_0(x), & x\in \mathrm{R}^n \end{cases}$$

(ただし，$F(u,\overline{u},\nabla_x u,\nabla_x\overline{u})$ は定数項と 1 次の項を含まない多項式) についてはかなり多くの研究が行われている．

この形の方程式の解の存在を示す一つの方法は，線型 Schrödinger 方程式の解の最大関数の評価と smoothing effect を基礎とする方法であるが，Besov 空間を使うと，この二つの評価において，殆ど限界に近くまでの精密な結果が得られる．それにより，非線型方程式についてもよい結果を得ることができることを報告する．

我々の結果は

定理 $0<T<\infty$, とし，$I=(0,T)$ とおく．このとき，正数 $\delta=\delta(T)$ を十分小にとると，任意の

$$(1.2)\ u_0\in B^{5/2}_{2,1}(\mathrm{R})\cap B^{3/2}_{1,1}(\mathrm{R}),\quad \text{かつ}\ \max\{\|u_0\|_{B^{5/2}_{2,1}(\mathrm{R})}, \|u_0\|_{B^{3/2}_{1,1}(\mathrm{R})}\}\le\delta,$$

に対して， 積分方程式

$$(1.3)\ u=e^{it\partial_x^2}u_0(x)+\int_0^t e^{i(t-s)\partial_x^2}F(u(x,s),\partial_x u(x,s),\overline{u}(x,s),\partial_x\overline{u}(x,s))ds,$$

の解 $u(x,t)$ で，条件：

$$(1.4)\qquad u\in B^3_{\infty,1}(\mathrm{R};L_2(I))\cap B^1_{1,1}(\mathrm{R};L_\infty(I))\cap B^{3/2}_{2,1}(\mathrm{R};L_\infty(I))$$

がただひとつ存在する．ただし，$B^s_{p,q}$ は Besov 空間，$\partial_x=\partial/\partial x$ である．

さらに，u が (1.3) と (1.4) を満たすならば，

$$
\begin{aligned}
&(1.5) \qquad & u &\in C([0,T]; B^2_{2,1}(\mathsf{R})) \cap C^1((0,T); B^0_{2,1}(\mathsf{R})),\\
&(1.6) \qquad & \frac{du}{dt} &= i\partial_x^2 u(x,t) + F(u, \partial_x u, \overline{u}, \partial_x \overline{u}),
\end{aligned}
$$

が成立する．ただし，$i\partial_x^2$ は $B^0_{2,1}(\mathsf{R})$ における Schrödinger 群 $\{\exp(it\partial_x^2)\}$ の生成作用素である．この結果と従来の結果を比較して見よう．

Hayashi-Ozawa[7] の結果.

$$
(1.7) \qquad u_0 \in H^3(\mathsf{R}),\ \sqrt{1+x^2}u_0 \in H^2(\mathsf{R})
$$

ならば，初期値が u_0 となる (1.6) の解 $u(\cdot)$ で $(0,T)$ で定義され，条件：

$$
(1.8) \qquad u \in C_w(0,T; H^3(\mathsf{R})),\ \text{and}\ \sqrt{1+x^2}u \in C([0,T]; H^2(\mathsf{R}))
$$

を満たすものがただ一つ存在する．ここで，

$H^s(\mathsf{R}) = \{f \in L_2;\ (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}(\xi) \in L_2\}$ （Sobolev 空間）

である．Hayashi-Ozawa は 初期値が小であることを仮定しないで結果を得ている．

Kenig-Ponce-Vega[11] の結果:

$$
(1.9) \qquad u_0 \in H^{11/2}(\mathsf{R}),\ \sqrt{1+x^2}u_0 \in H^3(\mathsf{R})
$$

でそのノルムが十分小ならば，初期値が u_0 となる (1.6) の解 $u(\cdot)$ で区間 $(0,T)$ で定義されていて，条件

$$
(1.10) \qquad \left\{
\begin{aligned}
u &\in C([0,T]; H^{11/2}(\mathsf{R})),\\
\sqrt{1+x^2}u &\in C([0,T]; H^3(\mathsf{R})),\\
u &\in W^6_\infty(\mathsf{R}; L_2([0,T]))
\end{aligned}
\right.
$$

を満たすものがただ一つ存在する．

任意の正数 ε について，

$H^{s+\varepsilon} \subset B^s_{2,1} \subset H^s, \quad \{f;\ \sqrt{1+x^2}f \in H^{s+\varepsilon}(\mathsf{R}) \subset B^s_{1,1}$

であるから，我々は初期値の正則性 (微分可能性) の条件をかなり改良している.「初期値が小」と条件をとるのが今後の課題である．

2 Besov 空間における積

念のため，Besov空間の定義を述べる：

(2.1) $\varphi_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathsf{R}^n)$, $\mathrm{supp}\varphi_0 \subset \{\xi \in \mathsf{R}^n; |\xi| < 1,$

(2.2) $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathsf{R}^n)$, $\mathrm{supp}\varphi \subset \{\xi \in \mathsf{R}^n; \frac{1}{4} < |\xi| < 1,$

(2.3) $$C_1 \le \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(\xi) \le C_2, \quad \varphi_j(\xi) := \varphi(2^{-j}\xi)(j \ge 1)$$

ただし，C_1 と C_2 は正定数である，にとり，$u \in B^s_{p,q}(\mathsf{R}^n; X)$ を

(2.4) $$\begin{cases} u \in \mathcal{S}'(\mathsf{R}^n; X), \\ u * \check{\varphi}_j \in L_p(\mathsf{R}^n; X), & j = 0, 1, 2, \cdots, \\ \{2^{js}\|u * \check{\varphi}_j\|_{L_p}\}_{j \ge 0} \in \ell_q \end{cases}$$

と定義する．ただし，

(2.5) $$\check{\varphi}(x) = \mathcal{F}^{-1}\varphi(x) := (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix\xi}\varphi(\xi)d\xi,$$

$u * v(x) := \int u(x-y)v(y)dy$ である．ノルムを

(2.6) $$\|u\|_{B^s_{p,q}(\mathsf{R}^n;X)} := \|\{2^{js}\|u * \check{\varphi}_j\|_{L_p}\}_{j \ge 0}\|_{\ell_q}$$

で定義する．Besov 空間は Sobolev 空間の実補間空間として定義することもできる．また，差分によって，定義することもできる．

Besov空間において，積の評価について，次の結果を用いる：

定理２．１．$1 \le p \le \infty, 1 \le q \le \infty, \theta > 0$ とし，X, X_1 と X_2 を Banach 空間であって，積: $X_1 \times X_2 \mapsto X$; $(u, v) \mapsto u \cdot v$ で条件：

(2.7) $$\|u \cdot v\|_X \le c\|u\|_{X_1} \cdot \|v\|_{X_2}$$

を満たすものが定義されていると仮定する．さらに，

(2.8) $$p \le p_1,\, p_2,\, r_1,\, r_2 \le \infty,\ \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}.$$

を仮定する．このとき，

(2.9) $$\|fg\|_{B^\theta_{p,q}(\mathsf{R}^n;X)} \le C\{\|f\|_{B^\theta_{p_1,q}(\mathsf{R}^n;X_1)} \cdot \|g\|_{L_{p_2}(\mathsf{R}^n;X_2)} + \|f\|_{L_{r_1}(\mathsf{R}^n;X_1)} \cdot \|g\|_{B^\theta_{r_2,q}(\mathsf{R}^n;X_2)}\},$$

が成立する.

これを示すのには，差分Δ_y に関する等式：

$$\begin{aligned}
\Delta_y\{f(x)g(x)\} &= f(x+y)\Delta_y g(x) + \Delta_y f(x)g(x),\\
\Delta_y^3\{f(x)g(x)\} &= \{\Delta_y^2 f(x+y) + 2\Delta_y^2 f(x)\}g(x+3y)\\
&\quad -3\Delta_y^2 f(x)g(x+2y) + f(x)\{\Delta_y^2 g(x)\\
&\quad +2\Delta_y^2 g(x+y)\} - 3f(x+2y)\Delta_y^2 g(x+y),\\
\Delta_y^5\{f(x)g(x)\} &= \{\Delta_y^3 f(x+2y) + 3\Delta_y^3 f(x+y) + 6\Delta_y^3 f(x)\}g(x+5y)\\
&\quad -5\{\Delta_y^3 f(x+y) + 3\Delta_y^3 f(x)\}g(x+4y)\\
&\quad +10\Delta_y^3 f(x)g(x+3y) + f(x)\{\Delta_y^3 g(x) + 3\Delta_y^3 g(x+y)\\
&\quad +6\Delta_y^3 g(x+2y)\} - 5f(x+y)\{\Delta_y^3 g(x)\\
&\quad +3\Delta_y^3 g(x+2y)\} + 10f(x+2y)\Delta_y^3 g(x+2y)
\end{aligned}$$

などおよびHölderの不等式，それにBesov空間の特徴付けの定理

定理２．２．sを正数，$k > s$を正整数，$1 \le p \le \infty, 1 \le q \le q \le \infty$ とする．このとき，$f \in B^s_{p,q}(\mathsf{R}^n; X)$ となるための必要十分条件は

(2.10) $\quad f \in L_p(\mathsf{R}^n; X),\ \| |y|^{-s}\Delta_y^k f(x)\|_{L_p(\mathsf{R}^n;X)} \in L_q(\mathsf{R}^n_y, |y|^{-n}dy)$

である．

を用いる．

3　Schrödinger方程式の最大関数

(3.1) $$S : f \to u(t,x) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int\int e^{i(x-y)\xi + ih(t,\xi)} f(y)\,dy\,d\xi$$

と定義する．特に，$h(t,\xi) = t|\xi|^2$ のとき，(3.1)の u はSchrödinger方程式

(3.2) $$\frac{du}{dt} = -i\Delta u,\quad u(0,x) = f(x)$$

の解である．

定理３．１．σ を正数，$1 \le q \le \infty$, $I = (0,1)$ とする．$h(t,\xi)$ が無限回微分可能で，条件

(3.3) $$\left|\frac{\partial^k h(t,\xi)}{\partial t^k}\right| \le c_k(1 + |\xi|^{k\gamma}),\ k = 0, 1, \cdots,$$

ただし，c_k は t と ξ に依存しない定数，を満たすとき，(3.1) で定義した作用素 S は関数空間 $B^{\gamma\sigma}_{2,q}(\mathsf{R}^n)$ から関数空間 $B^{\sigma}_{2,q}(I;\ L_2(\mathsf{R}^n))$ への線型有界作用素である．

この定理は，σ が正整数で $q=2$ の場合を Parseval の等式と，

$$B^s_{2,2}(\mathsf{R}^n) = H^s(\mathsf{R}^n) := \{f \in \mathcal{S}'; \hat{f}(1+|\xi|^2)^{s/2} \in L_2(\mathsf{R}^n)\}$$

により示し，一般の場合を線型作用素の補間定理を使って証明する．

Besov 空間の定義と Minkowski の不等式より分かる包含関係：

補題３．１．$1 \le p \le \infty, \sigma \in \mathsf{R}$ について，

$$B^{\sigma}_{p,1}(I; L_p(\mathsf{R}^n)) \subset L_p(\mathsf{R}^n; B^{\sigma}_{p,1}(I)) \tag{3.4}$$

と埋蔵定理 $B^{1/2}_{2,1}(I) \subset L_\infty(I)$ により，

$$B^{1/2}_{2,1}(I; L_2(\mathsf{R}^n)) \subset L_2(\mathsf{R}^n; B^{1/2}_{2,1}(I)) \subset L_2(\mathsf{R}^n; L_\infty(I)) \tag{3.5}$$

を得るから，定理３．１より，

定理３．２．定理３．１の条件の下で，S は $B^{1/2}_{2,1}(\mathsf{R}^n)$ から $L_2(\mathsf{R}^n); L_\infty(I))$ への線型有界作用素である．すなわち，

$$\|\{\sup_{t\in I}\Big|\frac{1}{(2\pi)^n}\iint e^{i(x-y)\xi+ih(t,\xi)}f(y)dyd\xi\Big|\}\|_{L_2(\mathsf{R}^n)} \le C\|f\|_{B^{1/2}_{2,1}(\mathsf{R}^n)} \tag{3.6}$$

が成立する．

これは Carbery[3] と Cowling[5] にある結果の若干の一般化である．
１次元で $h(t,\xi)=|\xi|^a$ の場合についてはさらに詳しい結果が得られる：

定理３．３．$a>1$ のとき

$$\|\{\sup_{t\in I}\Big|\frac{1}{(2\pi)^n}\iint e^{i(x-y)\xi+i|\xi|^a}f(y)dyd\xi\Big|\}\|_{L_2(\mathsf{R}^n)} \le C\|f\|_{B^{an/4}_{2,1}(\mathsf{R}^n)} \tag{3.7}$$

が成立する．

この定理は Sjölin[19] の結果の Besov 空間による精密化である．すなわち，Sjölin[19] によると，$a>1,\ s>an/4$ のとき，

$$\Big\|\{\sup_{t\in I}\Big|\frac{1}{(2\pi)^n}\iint e^{i(x-y)\xi+i|\xi|^a}f(y)dyd\xi\Big|\}\Big\|_{L_2(\mathsf{R}^n)} \le C\|f\|_{H^s(\mathsf{R}^n)} \tag{3.8}$$

が成立する．

$s>an/4$ のとき，$H^s \subset B^{an/4}_{2,1}$ であるから，(3.7) より (3.8) が直接示せる．

なお，Sjölin[19] は $n=1$ のとき，$s<1/4$ については (3.8) は成立しないことを示している．$s=1/4$ について (3.8) は成立しないと思われる（まだ証明できていないが）．$n=2$ については，$h(t,\xi)=|\xi|^2$ の場合に (3.6) よりよい結果が Moyua-Varga-Vega[13] により報告されている．

L_p 評価については

定理３．４．$a>1$, $I=(0,1)$, $0\le p\le\infty$ のとき，

$$\sigma:=\min\Big\{\frac{1}{2}+(n-1)|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}|,\frac{n}{4}+\frac{n}{2}|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}|\Big\}, \tag{3.9}$$

とおくと，

$$\Big\|\{\sup_{t\in I}\Big|\frac{1}{(2\pi)^n}\iint e^{i(x-y)\xi+i|\xi|^a}f(y)dyd\xi\Big|\}\Big\|_{L_p(\mathsf{R}^n)}\le C\|f\|_{B^{a\sigma}_{p,1}(\mathsf{R}^n)}, \tag{3.10}$$

が成立する．

これを証明するには，$p=1$ の場合と $p=\infty$ の場合を示し，$p=2$ の場合の結果（定理３．３）と合わせ線型作用素の補間定理を使えばよい．最大関数は線型作用素ではないが，(3.9) を最大関数の L_p 評価とは考えないで，線型作用素

$$f\ \to\ \frac{1}{(2\pi)^n}\iint e^{i(x-y)\xi+i|\xi|^a}f(y)dyd\xi \tag{3.11}$$

が $B^{a\sigma}_{p,1}(\mathsf{R}^n)$ から $L_p(\mathsf{R}^n;L_\infty(I)))$ への作用素としての有界性を示す不等式と見ることにより線型作用素の補間定理が使えるのである．Littlewood-Paley 理論を，最大関数と見ないで，L_2 値の L_p 関数と見ると，線型作用素の補間定理を使って，見通しよく証明できるのと同様である．定理３．５と Besov 空間の定義を使い次の定理が分かる：

定理３．５．$a>1$, $0<T<\infty$, $I=(0,T)$, $1\le p\le\infty$, $1\le q\le\infty$，そして θ を実数とすると，

$$\|\frac{1}{(2\pi)^n}\iint e^{i(x-y)\xi+it|\xi|^a}f(y)d\xi dy\|_{B^\theta_{p,q}(\mathsf{R}^n;L_\infty(I))}\le C\|f\|_{B^{\theta+a\sigma}_{p,q}(\mathsf{R})}. \tag{3.12}$$

ただし，σ は (3.9) で定義した正数である．

また，容易に，定理３．６．a, I, p, q, σ を定理３．５と同じとし，θ を実数とする．このとき，

$$\begin{aligned}\|\int_0^t ds\frac{1}{(2\pi)^n}\iint e^{i(x-y)\xi+i(t-s)|\xi|^a}f(y,s)d\xi dy\|_{B^\theta_{p,q}(\mathsf{R}^n;L_\infty(I))}\\ \le C\|f(x,s)\|_{B^{\theta+a\sigma}_{p,q}(\mathsf{R}^n;L_p(I))}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

4 smoothing effect

加藤敏夫先生[8]によるKdV方程式のsmoothing effectについての結果以来，かなり多くの研究があるが，ここでは以下の我々の結果に関係する不等式を示す．Kenig-Ponce-Vega[9]は，

$$\sup_x \|\partial_x{}^{1/2} e^{it\partial_x^2} f\|_{L_2(\mathsf{R}_t)} \le C\|f\|_{L_2(\mathsf{R})}, \tag{4.1}$$

を示している．Kenig-Ponce-Vegaはさらに，[11]において，

$$\sup_x \|\int_0^s \partial_x e^{i(t-s)\partial_x^2} F(\,\cdot\,, s) ds\|_{L_2(\mathsf{R}_t)} \le C\|F\|_{L_1(\mathsf{R}_x;L_2(\mathsf{R}_t))}, \tag{4.2}$$

を示して，１次元の非線型Schrödinger方程式のsmall dataに対する初期値問題の時間的局所解の存在に応用した．これらの結果をBesov版をつくると，

定理４．１．σを実数，$0 < T < \infty, 1 \le q \le \infty$，とすると，

$$\|e^{it\partial_x^2} f\|_{B^{\sigma+1/2}_{\infty,q}(\mathsf{R}_x;L_2([0,T]))} \le C\|f\|_{B^{\sigma}_{2,q}(\mathsf{R})}. \tag{4.3}$$

定理４．２．σ を実数，$0 < T < \infty, 1 \le q \le \infty$，とすると，

$$\|\int_0^t e^{i(t-s)\partial_x^2} F(\,\cdot\,, s) ds\|_{B^{\sigma+1}_{\infty,q}(\mathsf{R}_x;L_2([0,T]))} \le C\|F\|_{B^{\sigma}_{1,q}(\mathsf{R}_x);L_2([0,T]))}. \tag{4.4}$$

になる．Besov空間はSobolev空間の実補間空間であるから，これらの結果は，とKenig-Ponce-Vegaの結果より，補間により得られる．しかし，Kenig-Ponce-Vegaによる不等式(4.2)の証明は偏微分方程式

$$\partial_t u = i\partial_x^2 u(x.t) + \varepsilon u + F(x,t),\ (x,t) \in \mathsf{R} \times \mathsf{R} \tag{4.5}$$

の初期条件：$u(x,0) = 0$ の下での解の ε に関して一様な評価を使い，どうもわかりにくいので，我々は直接の証明を与えた．

なお，homogeneous Besov空間$\dot{B}^{\sigma}_{\infty,q}$ を使えば $T = \infty$ についても定理と同じ形の不等式が得られる．

5 局所解の存在

局所解の存在の証明の要点を述べよう．簡単のため，方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\partial_x u + (\partial_x u)^2,\ \ u(x,0) = u_0(x), \tag{5.1}$$

とする．これを積分方程式

$$u = e^{it\partial_x^2}u_0(x) + Q(u,u)(x,t) \tag{5.2}$$

に変換する．ただし，$Q(f,g)$ は

$$Q(f,g)(x,t) := \int_0^t e^{i(t-s)\partial_x^2}\{\partial_x f(x,s)\cdot\partial_x g(x,s)\}ds. \tag{5.3}$$

と定義する．これを空間

$$Z := B^3_{\infty,1}(\mathsf{R}; L_2(I)) \cap B^1_{1,1}(\mathsf{R}; L_\infty(I)) \cap B^{3/2}_{2,1}(\mathsf{R}; L_\infty(I)) \tag{5.4}$$

で解こう．この空間のノルムを

$$\|u\|_Z := \max\{\|u\|_{B^{\,3}_{\infty,1}(\mathsf{R};L_2(I))}, \|u\|_{B^{\,1}_{1,1}(\mathsf{R};L_\infty(I))}, \|u\|_{B^{3/2}_{2,1}(\mathsf{R};L_\infty(I))}\}. \tag{5.5}$$

で定義する．また，初期値の空間のノルムを

$$\|u_0(x)\|_{B^{5/2}_{2,1}(\mathsf{R})\cap B^{3/2}_{1,1}(\mathsf{R})} := \max\left\{ \|u_0(x)\|_{B^{5/2}_{2,1}(\mathsf{R})}, \|u_0(x)\|_{B^{3/2}_{1,1}(\mathsf{R})} \right\}. \tag{5.6}$$

と定める． $u_0 \in B^{5/2}_{2,1}(\mathsf{R}) \cap B^{3/2}_{1,1}(\mathsf{R})$ にとると，定理３．５と定理４．１により，

$$\|e^{it\partial_x^2}u_0\|_Z \le C_0\|u_0\|_{B^{5/2}_{2,1}(\mathsf{R})\cap B^{3/2}_{1,1}(\mathsf{R})}. \tag{5.7}$$

をうる．写像 $\Phi(u)$ を

$$u = e^{it\partial_x^2}u_0(x) + Q(u,u)(x,t) \tag{5.8}$$

と定義し，この写像が不動点をもつことをしめせば (5.2) の解の存在が分かる．定理２．１と定理３．６と定理４．２を組み合わせると，

定理５．１． $0 < T < \infty$, $I = (0,T)$ とし，Q を (5.3) で定義するとき，

$$\|Q(f,g)\|_{B^{\,3}_{\infty,1}(\mathsf{R};L_2(I))} \le C\{\|f\|_{B^{\,3}_{\infty,1}(\mathsf{R};L_2(I))}\cdot\|g\|_{W^1_1(\mathsf{R};L_\infty(I))} + \|f\|_{W^1_1(\mathsf{R};L_\infty(I))}\cdot\|g\|_{B^{\,3}_{\infty,1}(\mathsf{R};L_2(I))}\}, \tag{5.9}$$

$$\|Q(f,g)\|_{B^{\,1}_{1,1}(\mathsf{R};L_\infty(I))} \le C\{\|f\|_{B^{\,3}_{\infty,1}(\mathsf{R};L_2(I))}\cdot\|g\|_{W^1_1(\mathsf{R};L_\infty(I))} + \|f\|_{W^1_1(\mathsf{R};L_\infty(I))}\cdot\|g\|_{B^{\,3}_{\infty,1}(\mathsf{R};L_2(I))}\}, \tag{5.10}$$

$$\|Q(f,g)\|_{B^{3/2}_{2,1}(\mathsf{R};L_\infty(I))} \le C\{\|f\|_{B^{\,3}_{\infty,1}(\mathsf{R};L_2(I))}\cdot\|g\|_{W^1_2(\mathsf{R};L_\infty(I))} \tag{5.11}$$

$$+\|f\|_{W_2^1(\mathrm{R};L_\infty(I))}\cdot\|g\|_{B^{3}_{\infty,1}(\mathrm{R};L_2(I))}\},$$

が成立する.

を証明できる．この定理と (5.7) により，

$$\|\Phi(u)\|_Z\le C_0\|u_0\|_{B^{5/2}_{2,1}(\mathrm{R})\cap B^{3/2}_{1,1}(\mathrm{R})}+C_1\|u\|_Z^2,$$

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)-\Phi(v)\|_Z &\le \|Q(u,u-v)\|_Z+\|Q(u-v,v)\|_Z\\ &\le C_1\{\|u\|_Z+\|v\|_Z\}\|u-v\|_Z,\end{aligned}$$

が分かる．よって，初期値が十分小ならば Φ が縮小写像であることがわかり，したがて，不動点が存在する．

積分方程式 (5.1) の解の微分可能性を示すには，

補題 5．1．(Pazy[15] p.107 Theorem 2.4.) $\{T(t)\}_{t\ge0}$ を Banach 空間 X における線型作用素の C_0-半群とし，A をその生成作用素とする．$0<T<\infty$ とし，$f(t)\in C((0,T);\mathcal{D}(A))\cap L_1([0,T];X)$ と仮定する．このとき，

$$g(t) := \int_0^t T(t-s)f(s)ds\in C^1((0,T);X)\cap C((0,T);\mathcal{D}(A)), \tag{5.12}$$

$$\frac{dg}{dt} = f(t)+Ag(t)\quad\text{for } t\in(0,T), \tag{5.13}$$

である.

を使えばよい.

参考文献

[1] J. Berge and J. Löfström, Interpolation Spaces, an introduction, Springer, 1976.

[2] J. Bourgain, A remark on Schrödinger operators, Israel J. Math., 77(1992), 1-16.

[3] A. Carbery, Radial Fourier multipiers and associated maximal functions, in: Recent Progress in Fourier Analysis, Proc. Seminar on Fourier Analysis held at El Escorrial, Spain, 1983, North-Holland Math. Stud. 111. North-Holland, 1985, 49-56.

[4] L. Carleson, Some analytic problems related to stational mecanics, in Euclidean Harmonic Analysis, Lecture Notes in Math. 779(1979), Springer, 55-45.

[5] M. Cowling, Pointwise behaviour of solutions to Schrödinger equations, in Harmonic Analysis, Proc. Conf. Cortona, Italy, 1982, Lecture Notes in Math. 992(1983), Springer, 83-90.

[6] B. E. J. Dahlberg and C. E. Kenig, A note on the almost everywhere behaviour of solutions to the Schrödinger equation, in Harmonic Analysis, Proc. Conf. Univ. of Minnesota, Minneapolis, Lecture Notes in Math. 908(1982), Springer, 205-209.

[7] N.Hayashi and T. Ozawa, Remarks on nonlinear Schrödinger equations in one space dimension, Diff. Int. Eq., Vol. 7, 1994, pp. 453-461.

[8] T. Kato, On the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation, Advances in Mathematics Supplementary Studies, Studies in Applied Math. 8(1983), 93-128.

[9] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, Oscllartory integrals and regularity of dispersive equations, Indiana Univ. Math. J., 40(1991), 33-69.

[10] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, Well-posedness of the intial value problem for the Kortweg-de Vries equation, J. Amer. Math. Sec. 4(1994), 323-347.

[11] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, Small solutions to nonlinear Schrödinger equations, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 10, 1993, pp. 255-288.

[12] C. E. Kenig and Ruiz, A strong type (2,2) estimates for the maximal operator assoiated to the Schrödinger equation, Trans. Amer. Math. Soc. 280(1983), 239-245.

[13] A. Moyual A. Vargas and L. Vega, Schrödinger maximal function amd restriction properties of the Fourier transform, preprint.

[14] 村松壽延，補間空間論と線型作用素,紀伊国屋書店 (1985).

[15] A. Pazy, Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, 1983.

[16] E. Prestini, Radial functions and regularity of solutions to the Schrödinger equation, Monatsh. Math. 109(1990), 135-143.

[17] P. Sjölin, Convolusion with oscillating kernel, Indiana Univ. Math. J. 30(1981), 45-55.

[18] P. Sjölin, Regularity of solutions to the Schrödinger equation, Duke Math. J. 55(1987), 699-715.

[Sjö3] P. Sjölin, Radial function and maximal estimates for solutions to the Schrödinger equation, J. Austral Math. Soc., 59(1995), 134-142.

[19] P. Sjölin, Global maximal estimates for solutions to the Schrödinger equation, Studia Math. 110(2)(1994), 105-114.

[20] H. Tribel, Complex interpolation and Fourier multipliers for the space $B^s_{p,q}$ and $F^s_{p,q}$ of Besov-Hardy-Sobolev type: The case $0 < p < \infty$, $0 < q < \infty$, Math. Z., 176(1981), 495-510.

[21] L. Vega, Schrödinger equations: pointwise convergence to the intial data, Proc. Amer. Math. Sec., 103(1988), 874-878.