数理解析研究所講究録
1047巻 1998年 26-35

Inverse Scattering Problems for Dirac Operator with Time-Dependent Electromagnetic Potentials

伊藤 宏 (京都大学大学院理学研究科)

1 序

電磁場に様々な状態の電子を衝突させて、衝突前と衝突後の電子の状態から電磁場が決定できるかという問題は、数学的にいうと散乱作用素が与えられたときに電磁場を決定できるかという問題になる。ここでは、散乱作用素から電磁場を再構成することを考える。

この問題に対して高エネルギーでの散乱作用素の挙動を用いる2つの方法が有効である。定常的方法(時間に依存しない方法)と時間に依存する方法である。

ポテンシャルが時間に依存せず粒子が シュレディンガー方程式に従う場合には、Faddeev [F] 以来の定常的な方法で、再構成が可能であることが示されてきた([Is-K], [M], [Sa], [Wa], [Ni])。この方法は、レゾルベントを用いて表現した散乱振幅の高エネルギーでの挙動からポテンシャルを取り出すという方法である。この方法は精密な議論ができる反面、散乱振幅の表現やレゾルベントの評価など簡単ではない。特に、多粒子系になると非常に複雑である [Wa]。

一方、Enss と Weder は、多体系シュレディンガー方程式の場合、散乱振幅の表現を経ないで直接散乱作用素からポテンシャルをとり出す方法を考えた [E-We]。この方法は簡単であり、この方法を用いて様々な研究がなされた ([A1], [A2], [We2], [We3], [J], [T])。

以上ポテンシャルが時間に依存しない場合であるが、最近 Weder によって時間に依存するポテンシャルを持つシュレディンガー方程式の場合にも、散乱作用素からポテンシャルが再構成されることが示された時間に依存する方法で示された [We2].

一方、ディラック方程式で電磁場が時間に依存しない場合には、（方法は異なるが）[Is] と [It1] が定常的な方法で、[J] が時間に依存する方法で、ともに散乱作用素から電磁場が再構成できることを示した。ところで、ディラック方程式は、相対論的量子力学に現れる方程式であり、そのためこの方程式の散乱理論は慣性系によらない形で記述されなければならない。とくに、ある慣性系で電磁場が時間に依存しない場合でも異なる慣性系においては時間に依存する。このことを考えれば、電磁場としては時間に依存する形で取り扱った方が自然であろう。そこで、ここでは時間に依存する電磁ポテンシャルを持つディラック方程式の場合に、散乱作用素から電磁場を再構成できるか？ という問題を考える。あとで、示すようにここで得られた結果は、命題 1.4 を除いて、相対論的不変な形で述べられている。

証明など詳しいことは [It2] を参照してください。

2 結果

時間に依存する電磁場を持つ Dirac 方程式の逆散乱問題を考える。

電磁ポテンシャル $A = (A^0, A^1, A^2, A^3) : \boldsymbol{R}_t \times \boldsymbol{R}^3_x \longrightarrow \boldsymbol{R}^4$ をもつ ディラック方程式は次で与えられる。

$$
i\frac{d}{dt}\Psi(t) = H_A(t)\Psi(t), \quad \Psi(t) \in \mathcal{H} := L^2(\boldsymbol{R}^3_x; \boldsymbol{C}^4), \tag{2.1}
$$

$$
H_A(t) = c\sum_{j=1}^{3} \alpha_j(D_j - A^j(t,x)) + \alpha_4 mc^2 - A^0(t,x)I_4,
$$

ここで, $c > 0$, $m \geq 0$ は各々光速、静止質量を表わす定数, また $D_j = -i\partial/\partial x_j$ である。 α_j は 4×4 エルミート行列で次の反交換関係を満たすものとする。

$$
\alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j = 2\delta_{jk}I_4, \qquad 1 \leq j,k \leq 4,
$$

ここに, δ_{jk} は Kroneker の デルタ, I_n は n 次の単位行列である。

さて、L を $(\boldsymbol{R}^4)^*$ （時空間 $\boldsymbol{R}^4 = R_t \times \boldsymbol{R}^3_x$ の双対空間）の自明でない部分空間, $V_1, \cdots, V_n$ を L の一組の基底とする．このとき、ポテンシャルのクラス $S(L)$ を

$$
S(L) := \left\{\ A \in \mathcal{B}^1(\boldsymbol{R}^4, \boldsymbol{R}^4)\ ;\ \int_0^\infty g_A(r)dr < \infty\ \right\},
$$

で定義する. ここで,

$$g_A(r) := \sup_{\sum_{j=1}^n |\langle V_j, X\rangle| \geq r} |A(X)|$$

とおく. ただし、$X=(t,x)$ である. いま, $(\boldsymbol{R}^4)^*$ を $\boldsymbol{R}^4$ と同一視し、L を $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間と考える。X_L を $X \in \boldsymbol{R}^4$ の L への直交射影とすると、ある定数 $K>0$ があって,

$$K^{-1}|X_L| \leq \sum_{j=1}^n |\langle V_j, X\rangle| \leq K|X_L|, \quad \forall X \in \boldsymbol{R}^4$$

が成り立つ。よって、$S(L)$ の定義は L の基底の取り方によらないことがわかる。

注意 $A \in \mathcal{B}^1$ であり、定数 $K>0, \rho>1$ があって、評価

$$|A(X)| \leq K(1+|X_L|)^{-\rho}$$

をみたすなら、A は $S(L)$ に属する.

有限個の部分空間の列 $L_1, \cdots, L_N$ があって,

$$A = \sum_{j=1}^N A_j, \quad A_j \in S(L_j),$$

と分解できるときポテンシャル A は S に属するという。以下, 常に A は S に属すると仮定する。このとき、Dirac 方程式 (2.1) の unitary propagator が一意に存在することが知られている。これを $U_A(t,s)$ で表わす;

$$i\frac{d}{dt}U_A(t,s) = H_A(t)U_A(t,s), \qquad U_A(s,s) = I.$$

さらに、波動作用素の存在が言える。

命題 1.1 任意の $s \in \boldsymbol{R}$ に対して、波動作用素

$$W_A^{\pm}(s) := s - \lim_{t\to\pm\infty} U_A(s,t)e^{-i(t-s)H_0}$$

が存在する。ここで、$H_0 = c\sum_{j=1}^3 \alpha_j D_j + \alpha_4 mc^2$, は自由粒子に対するディラック作用素である。

波動作用素を用いて, 各 $s \in \boldsymbol{R}$ に対して、散乱作用素 $S_A(s)$ が定義出来る:

$$S_A(s) := W_A^+(s)^* W_A^-(s).$$

ここで、定義より $S_A(s)$ と $S_A(0)$ の間には次の簡単な関係が成り立つことに注意しよう：

(2.2) $$S_A(s) = e^{-isH_0} S_A(0) e^{isH_0}, \quad s \in \boldsymbol{R}.$$

さて、一般に電磁場を与えても、ポテンシャルは一意には定まらない。また、古典電磁気学によると、実際に観測できるのはポテンシャルではなく電磁場である。ポテンシャル A によって定まる電磁場 F_A は次で与えられる.

$$F_A = (F_A^{jk})_{0 \le j < k \le 3} = \left(\frac{\partial A^k}{\partial x_j} - \frac{\partial A^j}{\partial x_k} \right)_{0 \le j < k \le 3} : \boldsymbol{R}^4 \longrightarrow \boldsymbol{R}^6,$$

ここで $x_0 = t$ である.

次の定理は、散乱作用素はポテンシャルではなくその電磁場によって定まることを示している。

定理 1.2 $A_{(1)} \in S$ と $A_{(2)} \in S$ の差 A が

$$A := A_{(2)} - A_{(1)} = \sum_{j=1}^{N} A_j, \quad A_j \in S(L_j)$$

と分解出来るとする。ただし、$\dim L_j \ge 2,\ 1 \le j \le N$ とする。さらに、$F_{A_{(1)}} = F_{A_{(2)}}$ とすると

$$S_{A_{(1)}}(s) = S_{A_{(2)}}(s), \quad s \in \boldsymbol{R}$$

が成り立つ。

つぎにこの定理の逆を考える。

ポテンシャルの場合と同じように、自明でない部分空間 L にたいして、$S(L)$ と同じく電磁場のクラス $\tilde{S}(L)$ を定義する:

$$\tilde{S}(L) := \left\{ F \in \mathcal{B}^0(\boldsymbol{R}^4, \boldsymbol{R}^6) \ ; \ \int_0^\infty g_F^L(r) dr < \infty \right\},$$

ここで, $g_F^L(r) := \sup_{|X_L| \ge r} |F(X)|$.

我々は $\Xi = (\tau, \xi) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^3 = (\boldsymbol{R}^4)^*$ で $X = (t, x)$ の共役変数を表わし、開集合 D を

$$D := \{(\tau, \xi) \in \boldsymbol{R}^4 ; |\tau| < c|\xi|\} \tag{2.3}$$

で定義すると、これは $(\boldsymbol{R}^4)^*$ の中の相対論的不変な開集合であることがわかる。$F \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^4; \boldsymbol{C}^6)$ のフーリエ変換を

$$\widehat{F}(\tau, \xi) = (2\pi)^{-2} \iint e^{-it\tau - ix\cdot\xi} F(t, x) dt dx.$$

で表わす。また、 $\widehat{F}|_{\Omega}$ で $\widehat{F}$ の開集合 Ω への制限を表わす。

定理 1.3 ポテンシャル A および 電磁場 F_A が次のように分解できるとする: (i) $A = \sum_{j=1}^{N} A_j, \; A_j \in S(L_j)$. (ii) $F_A = \sum_{k=1}^{N'} F_k, \quad F_k \in \tilde{S}(L'_k)$.

このとき、$\widehat{F_A}|_{D \backslash \Sigma}$ が $S_A(0)$ から再構成できる。ここで、

$$\Sigma := \left(\bigcup_{\substack{1 \le j \le N \\ \dim L_j = 1}} L_j \right) \bigcup \left(\bigcup_{\substack{1 \le k \le N' \\ \dim L'_k = 1}} L'_k \right). \tag{2.4}$$

注意 (i), (ii) の分解は一意的ではない。従って、1 次元部分空間の和集合 Σ はこの分解に依っている。

この定理からは, D の補集合 D^c における $\widehat{F}_A$ については何もわからない。次の命題はこの領域が散乱作用素に影響を与えることを示している。

命題 1.4 簡単のため、$c = m = 1$ とする。D^c の部分集合 D_1 を

$$D_1 := \{ \, (\tau, \xi) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^3 \, ; \, \tau > \sqrt{|\xi|^2 + 4} \, \}$$

で定義する. $\operatorname{supp} \widehat{\phi} \cap D_1 \neq \emptyset$ なる $\phi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}_t \times \boldsymbol{R}^3_x ; \boldsymbol{R})$ を固定する. $S_{\lambda A}(0)$ をポテンシャル $\lambda A = (\lambda \phi, 0)$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対する散乱作用素とする.

このとき $S_{\lambda A}(0) \neq I$ が十分小さい $\lambda \neq 0$ については成り立つ.

注意　次の粗い考察によると support が $D' := \{ \, (\tau, \xi) \, ; \, |\tau| > c|\xi| \, \}$ に含まれる電磁場は相対論の立場からは特異なものかもしれない: 逆フーリエ変換用いて、

$$F(t, x) = (2\pi)^{-2} \int_{D'} F_{\tau, \xi}(t, x) d\tau d\xi,$$

とかく。ここに、 $F_{\tau,\xi}(t,x) := e^{it\tau+ix\cdot\xi}\widehat{F}(\tau,\xi)$ である。ところが、

$$\frac{1}{\tau^2|\xi|^{-2}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}F_{\tau,\xi}(t,x) = \Delta_x F_{\tau,\xi}(t,x).$$

が成り立つ。このことは、 F の各成分 $F_{\tau,\xi}$ は光速を越える速さ $|\tau||\xi|^{-1} > c$ で伝播することを示している。

さて、定理 1.3 を用いて電磁場が散乱作用素から完全に決定できる場合を考えよう。

定理 1.5 定理 1.3 の (i), (ii) を仮定する. さらに、$\Sigma \cap D = \emptyset$ および、

$$\text{supp}\widehat{F_A} \setminus \{0\} \cap D^c = \emptyset. \tag{2.5}$$

を仮定する. このとき、 F_A は完全に $S_A(0)$ から再構成できる.

あとで述べるように、適当な減衰条件のもと時間に依存しないポテンシャルの場合、完全に散乱作用素から再構成できることが知られている。上の定理の系として、適当な慣性系においては時間に依存しないようなポテンシャルの有限和で与えられる電磁場は再構成できることがわかる。

系 1.6 定理 1.3 の (i), (ii) と $\Sigma \cap D = \emptyset$ を仮定する. さらに, 各 $k = 1, \cdots, N'$ にたいして、

$$F_k(sV_k + X) = F_k(X), \quad s \in \boldsymbol{R}, \quad X \in \boldsymbol{R}^4. \tag{2.6}$$

となる 定ベクトル V_k が $T := \{X = (t,x) \in \boldsymbol{R}^4 ; c|t| > |x|\}$ の中にとれるとする。すると、電磁場 F_A は散乱作用素から完全に再構成できる.

注意 $V \in T$ であるとき、定ベクトル V は時間的と呼ばれ、適当なローレンツ変換によって、時間軸に平行なベクトルに変換されることが知られている。したがって、(2.6) は, (F_k に依存する) 適当な慣性系においては F_k は時間に依存しない電磁場であることを意味する.

とくに, ポテンシャルおよび電磁場が時間に依存しない短距離型の場合, すなわち、ある定数 $K > 0$, $\rho > 1$ があって

$$|A(x)| + |F_A(x)| \le K(1+|x|)^{-\rho} \tag{2.7}$$

という減衰条件を満たしているとき、電磁場は散乱作用素から完全に再構成できる。

時間に依存しないポテンシャルの場合には、短距離型より強い減衰条件のもとではすでに同様の結果が得られている（[It1], [J], [Is]）．

最後に、もう一つ電磁場が完全にきまる場合を考える。電磁場がある指数的減衰条件を満たすなら、そのフーリエ像はある種の解析性を持つ。定理 1.3 とこのことを組み合わせると次の定理が得られる。

定理 1.7 $A \in S$ とする．１次独立な２つのベクトル $V, V' \in \boldsymbol{R}^4$ と $g(t)(1+t)^{-1} \in L^1((0,\infty))$ を満たす有界関数 g があり、

$$|F_A(X)| \le g(|\langle V', X\rangle_{R^4}|)e^{-|\langle V,X\rangle_{R^4}|} \quad \text{on } \boldsymbol{R}^4, \tag{2.8}$$

を満たしているとき、電磁場 F_A は散乱作用素から完全に決まる。

3 相対論的不変性

時空間 $\boldsymbol{R}^4$ にローレンツ計量

$$\langle X, X'\rangle_{LM} := c^2 x_0 x_0' - \sum_{j=1}^{3} x_j x_j', \quad X = (x_0, \cdots, x_3)$$

を入れる。この計量を不変にする $\boldsymbol{R}^4$ 上の線形変換をローレンツ変換という。線形変換 Λ がローレンツ変換であることと次の条件は同値である：

$$^t\Lambda G \Lambda = G, \quad \text{ここに} \quad G := \begin{pmatrix} c^2 I_1 & O \\ O & -I_3 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

$\boldsymbol{R}^4$ 上の変換

$$X' = \Pi(\Lambda, a)X := \Lambda X + a, \tag{3.2}$$

は、ポアンカレ変換と呼ばれる。ここに、Λ はローレンツ変換、a は定ベクトルである。ところで、２つの慣性系同士の間の座標変換はポアンカレ変換で与えられる。いま、$\Lambda = (\Lambda_{jk})_{0\le j,k\le 3}$ とすると、(3.1) より $\Lambda_{00} \ge 1$ または $\Lambda_{00} \le -1$ となることがわかる。後者の場合は、時間反転を含み少し複雑になるので、ここでは簡単のため $\Lambda_{00} \ge 1$ を仮定する。

ある慣性系 I の座標を $X=(t,x)$, もう1つの慣性系 I' の座標を $X'=(t',x')$ とし、ポアンカレ変換 (3.2) によって結ばれているとする。慣性系 I において、ディラック方程式が

$$
\begin{aligned}
&i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,x)\\
&\quad=\left[c\sum_{j=1}^{3}\alpha_j(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}-c^{-1}A^j(t,x))+\alpha_4 mc^2+A^0(t,x)I_4\right]\Psi(t,x)
\end{aligned}
$$

で与えられているとすると（便宜上ポテンシャルの係数は、(2.1) と少し変えてある）、慣性系 I' では、ポアンカレ変換 (3.2) により、

$$
\begin{aligned}
&i\frac{\partial}{\partial t'}\Psi'(t',x')\\
&\quad=\left[c\sum_{j=1}^{3}\alpha_j(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x'_j}-c^{-1}A^{*j}(t',x'))+\alpha_4 mc^2+A^{*0}(t',x')I_4\right]\Psi'(t',x')
\end{aligned}
$$

とかけることがわかる。ここで、$A^*(t',x')=\Lambda A(t,x)$、$\Psi'(t',x')=L(\Lambda)\Psi(t,x)$ であり、$L(\Lambda)$ は 4×4 の可逆な行列である（[Tha]）。とくに、$A^*(X')$ の各成分は、$A(\Lambda^{-1}(X'-a))$ の成分の1次結合でかける。したがって、$A\in S(L)$ ならば、$A^*\in S({}^t\Lambda^{-1}L)$ であることがわかる。同様に慣性系 I' での電磁場 $F^*_{A^*}(X')$ の各成分 $F^{*lm}_{A^*}(X')$ も $F_A(\Lambda^{-1}(X'-a))$ の成分 $F^{jk}_A(\Lambda^{-1}(X'-a))$, $0\le j<k\le 3$ の1次結合でかける。よって、$F_A\in\tilde{S}(L)$ なら $F^*_{A^*}\in\tilde{S}({}^t\Lambda^{-1}L)$ である。また、フーリエ変換によって、

$$
\widehat{F^{*lm}_{A^*}}(\Xi)=\sum_{0\le j<k\le 3}c_{jk}e^{-i\langle\Xi,a\rangle}\widehat{F^{jk}_A}({}^t\Lambda\Xi),\quad \Xi\in\boldsymbol{R}^4,
$$

となる。ここに、c_{jk} は Λ によって決まる定数である。ところで、(3.1) から、$\Lambda^{-1}G^{-1t}\Lambda^{-1}=G^{-1}$ がわかり、

$$
\langle{}^t\Lambda^{-1}\Xi,{}^t\Lambda^{-1}\Xi'\rangle_{LM^*}=\langle\Xi,\Xi'\rangle_{LM^*},
$$

が従う。ここに、

$$
\langle\Xi,\Xi'\rangle_{LM^*}:=\xi_0\xi'_0-c^2\sum_{j=1}^{3}\xi_j\xi'_j,\quad \Xi=(\xi_0,\cdots,\xi_3)
$$

である。よって、${}^t\Lambda^{-1}$ は, D を不変にする。このことは、時空間 $\boldsymbol{R}^4$ の双対空間 $(\boldsymbol{R}^4)^*$ における開集合 D は、$\boldsymbol{R}^4$ におけるポアンカレ変換によって

不変であることを示している。以上のことから、定理 1.2, 1.3, 1.5, 1.7 および系 1.6 は慣性系の取り方によらないことがわかった。また、このことは、$\Lambda_{00} \leq -1$ の場合も正しい。

References

[A1] Arians, S., Geometric approach to inverse scattering for the Schrödinger equation with magnetic and electric potentials, *J. Math. Phys.* **38** (1997), 2761-2773.

[A2] Arians, S., Geometric approach to inverse scattering for Hydrogen-like systems in a homogeneous magnetic field, preprint.

[E-We] Enss, V., Weder, R., The geometrical approach to multidimensional inverse scattering, *J. Math. Phys.* **36** (1995), 3902-3921.

[F] Faddeev, L. D., Uniqueness of the inverse scattering problem, *Vestn. Leningr. Univ.* **7**(1956), 126-130.

[H] Hörmander, L., "The Analysis of Partial Differential Operators I", Springer Verlag, 1989.

[Is] Isozaki, H., Inverse scattering theory for Dirac operators, *Ann. Inst. H. Poincaré* **66** (1997), 237-270.

[Is-K] Isozaki, H., Kitada, H., Scattering matrices for two-body Schrödinger operators, *Sci. Papers Collede Arts Sci. Univ. Tokyo* **35** (1985), 81-107.

[It1] Ito, H. T., High-energy behavior of the scattering amplitude for a Dirac operators, *Pub. RIMS, Kyoto Univ.* **31** (1995), 1107-1133.

[It2] Ito, H. T., An inverse scattering problem for Dirac equations with time-dependent electromagnetic potentials, preprint.

[J] Jung, W., Geometrical approach to inverse scattering for the Dirac equation, *J. Math. Phys.* **38** (1997), 39-48.

[M] Mochizuki, K., Eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operator with a complex potential and scattering inverse problem, *Proc. Japan Acad.* **43** (1967), 638-643.

[Ne] Newton, R. G., " Inverse Schrödinger Scattering in Three Dimensional", Springer Verlag, 1989.

[Ni] Nicoleau, F., A stationary approach to inverse scattering for Schrödinger operators with first order perturbation, *Comm. Part. Diff. Eq.* **22** (1997),527-553.

[R-S] Ramm, A. G., Sjöstrand, J., An inverse problem for the wave equation, *Math. Z.* **206**(1991), 119-130.

[Sa] Saitō, Y., An asymptotic behavior of the S-matrix and the inverse scattering problem, *J. Math. Phys.* **25**(1984), 3105-3111.

[St] Stefanov, P. D., Uniqueness of the multi-dimensional inverse scattering problem for time dependent potentials, *Math. Z.* **201** (1989), 541-559.

[T] Takiguchi, T., Reconstruction and approximation of the potential for free channel scattering problem, preprint.

[Tha] Thaller, B., "The Dirac Equation", Springer Verlag, 1992.

[Wa] Wang, X. P., On the uniqueness of inverse scattering for N-body systems, *Inverse Problems* **10** (1994), 765-784.

[We1] Weder, R., Inverse scattering for N-body systems with time-dependent potentials, *in* "Inverse Problems of Wave Propagation and Diffraction", Eds. Chavent, G. and Sabatier, P. C., Lecture Notes in Physics 486, Springer Verlag,1997.

[We2] Weder, R., Multidimensional inverse scattering in an elecric field, *J. Funct. Anal.* **139** (1996), 441-465.

[We3] Weder, R., Inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation, *preprint* 1997.