数理解析研究所講究録
1047巻 1998年 77-98

非線形項に導関数を含む非線形Schrödinger方程式の解の存在および一意性について

名大多元数理　北　直泰（Naoyasu Kita）

§1　Introduction

考える非線形Schrödinger方程式の初期値問題は

$$(\mathrm{NLS})\quad \begin{cases} i\partial_t u = -\triangle u + P(u, \bar{u}, \partial u, \partial \bar{u}) & (t,x)\in\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

である。ここで、$\triangle = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$、$\partial = (\partial_1, \cdots, \partial_n)$ であり、$\bar{u}$ は複素数に値をとる関数 u の共役複素数を表す。空間次元については $n \geqq 1$ とする。非線形項 P は $\mathbb{C}^{2n+2}$ で定義された多項式であり、その次数は2次以上である：

$$P(z_1, z_2, \cdots, z_{2n+2}) = \sum_{2\le|\alpha|\le p} C_\alpha z^\alpha, \qquad (1.1)$$

$$C_\alpha \in \mathbb{C}, \quad \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{2n+2}) \in \mathbb{N}^{2n+2}.$$

ここでは small initial data u_0 に対する時間局所解の存在一意性の結果について述べる。（去る12月2日に発表された結果よりも幾分良くなったので、改良されたものを報告します。）得られた結果は次である。記号の定義についてはこの節の最

後を見ていただきたい。

Theorem 1.1

$0<\varepsilon<\frac{1}{4}$ とする。$u_0 \in H^{[\frac{n}{2}]+\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{n}{2}+\frac{3}{4}+\varepsilon,\, \frac{3}{4}+2\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \equiv X$ で $|||u_0|||_X$ が十分小さければ、正定数 $T=T(|||u_0|||_X)$ がとれて、区間 $[0,T]$ 上で次の性質を満たす(NLS)の解 u が一意的に存在する。

$$u \in C([0,T]\,;X), \tag{1.2}$$

$$\sup_{\substack{1\leq j\leq n \\ |\alpha|=[\frac{n}{2}]+2}} \|\partial_x^\alpha \partial_{x_j} u\|_{L^\infty_{x_j}(L^2_{t\tilde{x}_j})} < \infty. \tag{1.3}$$

また、$|||u_0|||_X \to 0$ のとき $T(|||u_0|||_X) \longrightarrow \infty$ となる。

解の存在を示すために、(NLS)を積分方程式に書き直したものすなわち、

$$u(t) = U_0(t)u_0 - i\, G_0 P(u,\bar{u},\partial u,\partial\bar{u}) \tag{1.4}$$

を以後では取り扱うことにする。ここで、$U_0(t)u_0 = e^{it\Delta}u_0$, $G_0P = \int_0^t U_0(t-s)P(s)\,ds$ である。初期値問題(NLS)を解く際に厄介なところは大まかに言って次の2つがあげられる。

(i) 非線形項に導関数が含まれる為に生ずる derivative loss をいかに回復するか?

(ii) 非線形項に2次式が含まれるので、空間方向の decay をかせぐことが出来ない。そのために weight をつけた評価が必要になる。

(NLS)に関するこれまでの経緯

(NLS)に絡んだごく最近の諸結果について述べておく。代表的なものは非線形項に特殊性を課してエネルギー評価式を利用するもの([18],[19],[2] 参照)や初期 data に analyticity を課すもの([7], [10] 参照)が挙げられる。いずれも derivative loss の困難を克服する為に役立つ。新しい方法としては Kenig-Ponce-Vega([14] 参照)によるものがある。彼らは U_0, G_0 の smoothing effect を見い出すことで derivative loss の回復に成功した。この方法の利点は、非線形項に特殊性を課さないで極めて一般的な場合でも解の存在が示されるところにある。ただし、初期 data u_0 には smallness が必要である。空間次元が $n=1$ の場合には Hayashi-Ozawa([9] 参照)のゲージ変換を用いた方法がある。一般的な非線形項を持つ Schrödinger 方程式でもゲージ変換を施すことで、エネルギー評価式が構成できる非線形 Schrödinger 方程式に帰着される。彼らの結果は大きな初期 data $u_0 \in H^{2,1}(\mathbb{R}^1) \cap H^3(\mathbb{R}^1)$ に対しても(NLS)の解が存在することを示している。空間次元が $n \geq 1$ の場合には Chihara([3] 参照)の方法が挙げられる。そこでは invertible な order 0 の疑微分作用素を用いることにより、一般的な非線形 Schrödinger 方程式がエネルギー評価式を持つものに変換されている。(n 次元の場合のゲージ変換に相当するような操作である。)

この方法によって大きな初期data u_0に対しても解の存在が示される。ただし、疑微分作用素を用いたテクニックを使用するので、u_0には十分な滑らかさが必要である。

今回の結果(Theorem1.1)ではできるだけ初期data u_0 の regularity を下げることに興味がある。次に Theorem の証明法について概観しておこう。

証明の概観について

まず前にあげた初期値問題の困難(i)(derivative loss)を解決するために Hayashi - Hirata の smoothing effect ([8] あるいは§2を参照)を用いる。G_0については1階微分を吸収してしまうので、derivative loss を回復することができる。その結果、非線形項 $P(u, \bar{u}, \partial u, \partial \bar{u})$ の評価から maximal function が登場する。ここで関数 $u(t, x)$ の maximal function $u_T^*(x_j)$とは次のように定義された関数である。

$$u_T^*(x_j) \equiv \sup_{\substack{0 \le t \le T \\ \tilde{x}_j \in \mathbb{R}^{n-1}}} |u(t, x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots x_n)| \qquad (1.5)$$

ただし、$x_j \in \mathbb{R}^1$ で $\tilde{x}_j$ は $x = (x_1, \cdots, x_n)$ から第 j 成分を取り除いたものである。§4でわかるように u_T^* の $L^1(\mathbb{R}_j)$ norm が現れてくる。従って、contraction map を構成する為に斉次項 $U_0(t)u_0$ および非斉次項 G_0P の maximal function の評価、具体的には$\|U_0 u_0\|_{L^1_{x_j}(L^\infty_{t\tilde{x}_j})}$ および$\|G_0 P\|_{L^1_{x_j}(L^\infty_{t\tilde{x}_j})}$の評価が必要になってくる。できるだけ少ない regularity を持つ u_0, P に対してこれらの norm が評価できれ

ばそれだけ少ない regularity を持つ初期 data に対して (NLS) の解が構成できる。この評価の際に (ii) の困難 (weight をつけた空間での評価) が生じてくる。(§3 を参照) 面倒なのは時刻についてまず suprimum をとっていることであり、その為今までによく知られた U_0, G_0 の L^p-L^q 評価や Strichartz の評価などを用いることが出来ない。ここでは空間1次元の場合に得られている不等式 ([17]を参照):

$$\|U_0 u_0\|_{L_x^4(\mathbb{R}^1; L_t^\infty(\mathbb{R}^1))} \leqq C \| D_x^{\frac{1}{4}} u_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^1)} \tag{1.6}$$

を空間 n 次元の場合に拡張したものを構成し、これを利用して maximal function を評価していくことにする。この時に次のような交換関係も用いる。

$$[\langle x\rangle^s, U_0] u_0 = i G_0\{(\partial\langle x\rangle^s)\partial U_0 u_0 + (\partial^2\langle x\rangle^s) U_0 u_0\}, \tag{1.7}$$

$$[\langle x\rangle^s, G_0] F = i G_0\{(\partial\langle x\rangle^s)\partial G_0 F + (\partial^2\langle x\rangle^s) G_0 F\} \tag{1.8}$$

この論文の構成は以下のようになっている。

§1 Introduction

§2 Smoothing Effects

§3 Estimate of Maximal Function

§4 Iteration

最後にこの論文で使われる記号の説明をしてこの節を終えることにする。

Notation について

$$L^r_t([0,T];L^p_x(\mathbb{R}^n)) \equiv \{u:(t,x)\to\mathbb{C} \mid \|u\|_{L^r_t(L^p_x)}<\infty\}, \qquad (1.9)$$

$$L^p_x(\mathbb{R}^n;L^r_t[0,T]) \equiv \{u:(t,x)\to\mathbb{C} \mid \|u\|_{L^p_x(L^r_t)}<\infty\}. \qquad (1.10)$$

ここで、$\|u\|_{L^r_tL^p_x} = \left(\int_{[0,T]}\|u(t,\cdot)\|^r_{L^p_x}dt\right)^{\frac{1}{r}}$ および $\|u\|_{L^p_xL^r_t} = \left(\int_{\mathbb{R}^n}\|u(\cdot,x)\|^p_{L^r_t}dx\right)^{\frac{1}{p}}$ である。特に(1.10)では関数 u を $x\in\mathbb{R}^n$ から $L^r_t([0,T])$ に値をとるような vector-valued function として扱っていることに注意。次のような関数空間も用いる。$1\leqq j\leqq n$ に対して、

$$L^p_{x_j}(\mathbb{R}^1;L^q_{t\tilde{x}_j}([0,T]\times\mathbb{R}^{n-1})) \equiv \{u:(t,x)\to\mathbb{C} \mid \|u\|_{L^p_{x_j}(L^q_{t\tilde{x}_j})}<\infty\} \qquad (1.11)$$

ここで、$\|u\|_{L^p_{x_j}(L^q_{t\tilde{x}_j})} = \left(\int_{\mathbb{R}^1}\|u(\cdot,\dots,x_j,\dots)\|^p_{L^q_{t\tilde{x}_j}}dx_j\right)^{\frac{1}{p}}$ である。簡単のため以後 $[0,T]$、$\mathbb{R}^n$ などを書かないで単に $L^r_t(L^p_x)$、$L^p_x(L^r_t)$、$L^p_{x_j}(L^q_{t\tilde{x}_j})$ のように表記することもある。

$$H^{r,s}(\mathbb{R}^n) = \{u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C} \mid \|u\|_{H^{r,s}}<\infty\}. \qquad (1.12)$$

ここで、$\|u\|_{H^{r,s}} = \|\langle D\rangle^r\langle x\rangle^s u\|_{L^2_x}$。ただし、$\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}$ であり、$\langle D\rangle^r u = \mathcal{F}^{-1}\langle\xi\rangle^r\mathcal{F}u$, $D^r u = \mathcal{F}^{-1}|\xi|^r\mathcal{F}u$ とする。$\mathcal{F}$、$\mathcal{F}^{-1}$ はそれぞれ Fourier 変換および逆 Fourier 変換を表す。不等式の中に現れる正定数については同一の記号 C を用いて表現し、必要があれば、$C(*,\dots,*)$ のように書いて定数が( )内の量に依存することを強調する。

§2 Smoothing Effects

この節では Schrödinger group $\{U_0(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ および G_0 が有する

smoothing 評価を紹介する。特に G_0 については1階微分が吸収されるので、非線形項 P による derivative loss を回復することが可能になり Theorem の証明に大きく貢献することになる。以下の結果は Hayashi - Hirata（[8]を参照）によるものである。

Proposition 2.1（[8]）

(i) $u_0 \in L^2_x(\mathbb{R}^n)$ に対して次の不等式が成立する。$1 \leq j \leq n$ に対して、

$$\sup_{x_j \in \mathbb{R}} \| D_{x_j}^{\frac{1}{2}} U_0 u_0(x_j) \|_{L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{n-1}_{\tilde{x}_j})} \leq C \| u_0 \|_{L^2_x(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.1}$$

(ii) $F \in L^1_{x_j}(\mathbb{R}^1; L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{n-1}_{\tilde{x}_j}))$ に対して次の不等式が成立する。

$$\sup_{x_j \in \mathbb{R}} \| \partial_{x_j} G_0 F \ (x_j) \|_{L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{n-1}_{\tilde{x}_j})} \leq C \| F \|_{L^1_{x_j}(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{n-1}_{\tilde{x}_j}))}. \tag{2.2}$$

Smoothing effect については T. Kato（[13]を参照）による Korteweg-de Vries 方程式の解に対する評価を契機として、Constantin-Saut（[5] を参照）や Sjölin（[22]）、Vega（[28]）による Schrödinger group の smoothing effect がある。（ただし、空間次元については1次元である。）空間次元が n の場合には Kenig - Ponce - Vega（[14]）による smoothing effect があるが、考える関数空間がやや複雑なので、ここでは Proposition 2.1 で紹介されている比較的関数空間が簡潔な smoothing effect を利用する。

Proposition 2.1 (i) の評価と duality argument を用いることによって次の Corollary が得られる。

Corollary 2.2

$F \in L^1_{x_j}(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{n-1}_{\tilde{x}_j}))$ に対して次の不等式が成立する。

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \| D^{\frac{1}{2}}_{x_j} \int_0^t U_0(s) F(s)\, ds \|_{L^2_x(\mathbb{R}^n)} \leq C \| F \|_{L^1_{x_j}(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{n-1}_{\tilde{x}_j}))} . \qquad (2.3)$$

さて、次の Theorem は後の §3 で maximal function の評価を考える際に重要な役割を果たす。

Theorem 2.3

$2 \leqq q < \infty$ なる q に対して以下の不等式が成立する。

(i) $$\| D^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}_{x_j} U_0 u_0 \|_{L^q_{x_j}(\mathbb{R}^1; L^2([0,T] \times \mathbb{R}^{n-1}_{\tilde{x}_j}))} \leq C T^{\frac{1}{q}} \| u_0 \|_{L^2_x(\mathbb{R}^n)} , \qquad (2.4)$$

(ii) $$\| D^{1-\frac{1}{q}}_{x_j} G_0 F \|_{L^q_{x_j}(\mathbb{R}^1; L^2([0,T] \times \mathbb{R}^{n-1}_{\tilde{x}_j}))} \leq C T^{\frac{1}{q}} \| F \|_{L^1_{x_j}(\mathbb{R}^1; L^2([0,T] \times \mathbb{R}^{n-1}_{\tilde{x}_j}))} . \qquad (2.5)$$

<u>注意</u>　空間次元が $n=1$ の場合には Bekiranov - Ogawa - Ponce ([1] を参照) によって同様の評価が示されている。

Theorem 2.3 の証明には以下の Lemma が必要になってくる。

Lemma 2.4

H を Hilbert 変換、すなわち、$Hf = \mathcal{F}^{-1} \operatorname{sgn} \xi \mathcal{F} f \ (\xi \in \mathbb{R}^1)$ とする。このとき、Banach 空間 X に値をとる $\mathbb{R}^1$ 上の関数 f に対して

$$\| Hf \|_{L^p_x(\mathbb{R}^1; X)} \leqq C_p \| f \|_{L^p_x(\mathbb{R}^1; X)} \qquad (2.6)$$

が成り立つ。ここで $1 < p < \infty$ である。

Lemma 2.4 の証明については例えば [23] を参照のこと。

Lemma 2.5

(i) ある定数 $C>0$ が存在して、任意の $\eta\in\mathbb{R}^1$ に対し、

$$\sup_{x_j\in\mathbb{R}^1}\| D_{x_j}^{\frac{1}{2}+i\eta} U_0 u_0(x_j)\|_{L^2(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^{n-1}_{\tilde{x}_j})} \le C\|u_0\|_{L^2_x(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.7}$$

(ii) ある定数 $C>0$ が存在して、任意の $\eta\in\mathbb{R}^1$ に対し、

$$\sup_{x_j\in\mathbb{R}^1}\| \tilde{D}_{x_j}^{1+i\eta} G_0 F(x_j)\|_{L^2(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^{n-1}_{\tilde{x}_j})} \le C\|F\|_{L^1_{x_j}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^{n-1}_{\tilde{x}_j}))}. \tag{2.8}$$

ここで、$\tilde{D}_{x_j}^{1+i\eta}=\mathcal{F}^{-1}\xi_j^{1+i\eta}\mathcal{F}$ である。

<u>証明</u> (i) $u_0\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とする。

$$\left(\mathcal{F}_{\tilde{x}_j} D_{x_j}^{\frac{1}{2}+i\eta} U_0(t)u_0\right)(x_j,\tilde{\xi}_j)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int|\xi_j|^{\frac{1}{2}+i\eta}e^{-it\xi^2+ix_j\xi_j}\mathcal{F}u_0(\xi)\,d\xi_j$$

である。ここで $\mathcal{F}_{\tilde{x}_j}$ については $\tilde{x}_j\in\mathbb{R}^{n-1}$ についての Fourier 変換を表している。従って、Plancherell の定理から、

$$\| D_{x_j}^{\frac{1}{2}+i\eta} U_0 u_0(x_j)\|^2_{L^2(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^{n-1}_{\tilde{x}_j})} = \frac{1}{2\pi}\int dt\,d\tilde{\xi}_j\left(\int|\zeta_j|^{\frac{1}{2}-i\eta}e^{+it\zeta_j^2-ix_j\zeta_j}\overline{\mathcal{F}u_0(\zeta_j,\tilde{\xi}_j)}\,d\zeta_j\int|\xi_j|^{\frac{1}{2}+i\eta}e^{-it\xi_j^2+ix_j\xi_j}\mathcal{F}u_0(\xi_j,\tilde{\xi}_j)\,d\xi_j\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\int\left(\int e^{it(\zeta_j^2-\xi_j^2)-ix_j(\zeta_j-\xi_j)}|\zeta_j|^{\frac{1}{2}-i\eta}|\xi_j|^{\frac{1}{2}+i\eta}W(\zeta_j,\xi_j)\,d\zeta_j\right)dt\,d\xi_j$$

ここで、$W(\zeta_j,\xi_j)=\int\overline{\mathcal{F}u_0(\zeta_j,\tilde{\xi}_j)}\,\mathcal{F}u_0(\xi_j,\tilde{\xi}_j)\,d\tilde{\xi}_j$ である。変数変換より

$$=\frac{1}{4\pi}\iint\left(\int e^{it\zeta_j\xi_j-ix_j\xi_j}|\zeta_j+\xi_j|^{\frac{1}{2}-i\eta}|\zeta_j-\xi_j|^{\frac{1}{2}+i\eta}W(\zeta_j+\xi_j,\zeta_j-\xi_j)\,d\zeta_j\right)dt\,d\xi_j$$

$$=\frac{1}{2}\int(\mathrm{sgn}\,\xi_j)\,e^{-ix_j\xi_j}W(\xi_j,-\xi_j)\,d\xi_j$$

$$\le\frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2_x(\mathbb{R}^n)}.$$

(ii) やや形式的ではあるが、$v=G_0F$ とおくと v は次の微分方程式を満たしている。

$$i\partial_t v=-\Delta v+F \tag{2.9}$$

(2.9) の両辺に $\tilde{x}_j, t$ についての Fourier 変換を作用することから

次の式が得られる。

$$\{-\partial_{x_j}^2+(\xi_j^2+\tau)\}\mathcal{F}_{t,\bar{x}_j}v=-\mathcal{F}_{t,\bar{x}_j}F \tag{2.10}$$

故に(2.10)から $\tilde{D}_{x_j}^{1+i\eta}\mathcal{F}_{t,\bar{x}_j}v$ について

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{x_j}^{1+i\eta}\mathcal{F}_{t,\bar{x}_j}v &= -\mathcal{F}_{x_j}^{-1}\frac{\xi_j^{1+i\eta}}{\xi_j^2+(\bar{\xi}_j^2+\tau)}\mathcal{F}F\\ &= -\int K_\eta(x_j-y_j)\mathcal{F}_{t,\bar{x}_j}F(\tau,y_j,\bar{\xi}_j)dy \end{aligned}\tag{2.11}$$

を得る。ここで $K_\eta(z)=\frac{1}{2\pi}\int e^{i(x_j-y_j)\xi_j}\frac{\xi_j^{1+i\eta}}{\xi_j^2+(\bar{\xi}_j^2+\tau)}d\xi_j$ である。留数計算を用いることによって $|K_\eta(z)|\le C$（Cは$\eta, z, \bar{\xi}_j, \tau$に依存しない定数）がわかるので、これからLemma 2.5が得られる。

（証明終わり）

Theorem 2.3の証明　Plancherellの定理から次の不等式が容易に得られる。

$$\|\tilde{D}_{x_j}^{i\eta}U_0u_0\|_{L^2_{x_j}(\mathbb{R};L^2([0,T]\times\mathbb{R}^{n-1}_{\bar{x}_j}))}\le T^{\frac{1}{2}}\|u_0\|_{L^2_x(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.12}$$

Theorem 2.3 (i) はLemma 2.5(i)と(2.12)を用いたinterpolation（[23]を参照）から従う。次にPlancherellの定理とCorollary 2.2を用いることで次の不等式が得られる。

$$\|\tilde{D}_{x_j}^{\frac{1}{2}+i\eta}G_0F\|_{L^2_{x_j}(\mathbb{R};L^2([0,T]\times\mathbb{R}^{n-1}_{\bar{x}_j}))}\le CT^{\frac{1}{2}}\|F\|_{L^1_{x_j}(\mathbb{R};L^2([0,T]\times\mathbb{R}^{n-1}_{\bar{x}_j}))} \tag{2.13}$$

Theorem 2.3 (ii) はLemma 2.5 (ii) と(2.13)を用いたinterpolationおよびLemma 2.4を適用することで得られる。（証明終わり）

次に $U_0(t)$, G_0 に関する評価でStrichartzの不等式と呼ばれるものを紹介する。この不等式も§4で利用される。証明については[2]、[6]、[25]および[29]を参照のこと。

Proposition 2.6

(i) $0 \leqq \frac{2}{r} = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) < 1$ を満たす (r, p) に対して次の不等式が成立する。

$$\| U_0 u_0 \|_{L^r(\mathbb{R}_t; L^p(\mathbb{R}^n_x))} \leq C \| u_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)}. \tag{2.14}$$

(ii) $0 \leqq \frac{2}{r_k} = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}\right) < 1$ $(k = 1, 2)$ を満たす (r_1, p_1)、(r_2, p_2) に対して次の不等式が成立する。

$$\| G_0 F \|_{L^{r_1}(\mathbb{R}_t; L^{p_1}(\mathbb{R}^n_x))} \leq C \| F \|_{L^{r_2'}(\mathbb{R}_t; L^{p_2'}(\mathbb{R}^n_x))}. \tag{2.15}$$

ここで $\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2'} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2'} = 1$ を満たしている。

§3 Estimate of Maximal Function

この節では関数 $U_0(t)u_0$ と $G_0 F(t, x)$ の maximal function の評価について考える。ただし、ここで言う maximal function とは以下のように定義された関数のことである。関数 $f(t, x)$ に対して maximal function $f^*_T(x_j) \equiv \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{\tilde{x}_j \in \mathbb{R}^{n-1}} |f(t, x_1, \cdots, x_j, \cdots x_n)|$。次の命題を得た。

Proposition 3.1

$\frac{1}{2} < s < \frac{3}{4}$ とする。このとき次の不等式が成立する。

(i) $$\| \langle x \rangle^{s} U_0 u_0 \|_{L^2_{x_j}(\mathbb{R}; L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^{n-1}_{\tilde{x}_j}))} \leq C \| u_0 \|_{H^{\frac{n}{2} - \frac{1}{4} + \varepsilon, s + \frac{1}{4} + \varepsilon}} + C(T) \| u_0 \|_{H^{\frac{n}{2} + s + 2\varepsilon}} \tag{3.1}$$

(ii) $$\| \langle x \rangle^{s} G_0 F \|_{L^2_{x_j}(\mathbb{R}; L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^{n-1}_{\tilde{x}_j}))} \leq C(T) \sup_{\substack{1 \leq j \leq n \\ |\alpha| = [\frac{n}{2}] + 1}} \| \partial_x^\alpha F \|_{L^1_{x_j}(L^2_{t\tilde{x}_j})} + C(T) \| F \|_{L^\infty_t(H^{\frac{n}{2} - \frac{1}{4} + \varepsilon, s + \frac{1}{4} + \varepsilon})} \tag{3.2}$$

Proposition 3.1を得るために次の定理が必要である。

Theorem 3.2

次の不等式が成立する。

$$\| U_0 u_0 \|_{L^4(\mathbb{R}^n_x ;\, L^\infty(\mathbb{R}_t))} \leq C \| D_x^{\frac{n}{4}} u_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)} . \qquad (3.3)$$

空間次元が1のときには不等式(3.3)はKenig - Ruiz ([17]を参照)によって証明されている。Theorem 3.2は空間次元がnの場合のKenig - Ruiz 評価と言えるものである。Theorem 3.2ではscale変換 $U_0(t)u_0(x) \to U_0(\lambda^2 t)u_0(\lambda x)$ に対して定数Cがλに依存しない。この意味でoptimalな不等式であると呼ぶことができる。Theorem 3.2の証明について次のLemmaが必要である。

Lemma 3.3

$s>0$, $z \in \mathbb{R}^1$ に対して次の不等式が成立する。

$$\left| \int_{\mathbb{R}^1} e^{-is\eta^2 + iz\eta} |\eta|^{-\frac{1}{2}} d\eta \right| \leq C |z|^{-\frac{1}{2}}. \qquad (3.4)$$

証明はstationary phase method による([11]を参照)。次にmulti-parameter group $W_0(t_1, \dots, t_n)$ を以下のように定義する。

$$W_0(t_1, \dots, t_n) u_0(x) = \int e^{-i(t_1\xi_1^2 + \cdots + t_n\xi_n^2) + ix\cdot\xi} \mathcal{F} u_0(\xi) d\xi \qquad (3.5)$$

このときに次のLemmaが成立する。

Lemma 3.4

ある正定数Cが存在して次の不等式が成立する。

$$\|D_{x_1}^{-\frac{1}{2}}\cdots D_{x_n}^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} W_0(t_1-s_1,\cdots,t_n-s_n)F(s_1,\ldots,s_n)\,ds_1\cdots ds_n\|_{L^4(\mathbb{R}_x^n;\,L^\infty(\mathbb{R}_t^n))}$$

$$\leq C\|F\|_{L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}_x^n;\,L^1(\mathbb{R}_t^n))}. \tag{3.6}$$

<u>証明</u>　Lemma 3.3より次の評価が得られる。

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^n}\left|D_{x_1}^{-\frac{1}{2}}\cdots D_{x_n}^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} W_0(t-s)F(s,x)\,ds\right|$$

$$\leq C\int_{\mathbb{R}^n}|x_1-y_1|^{-\frac{1}{2}}\cdots|x_n-y_n|^{-\frac{1}{2}}\|F(\cdot,y)\|_{L^1(\mathbb{R}_t^n)}\,dy \tag{3.7}$$

1次元での Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式（[Sog]を参照）を n 回繰り返して用いることによって Lemma 3.4 を得る。

（証明終わり）

<u>Theorem 3.2の証明</u>　　$L^2(\mathbb{R}_x^n)$ での内積 $(\cdot,\cdot)$ を用いることによって、

$$\left\|D_{x_1}^{\frac{1}{4}}\cdots D_{x_n}^{\frac{1}{4}}\int_{\mathbb{R}^n} W_0(-s)F(s)\,ds\right\|_{L^2(\mathbb{R}_x^n)}^2=\int\left(F(t,\cdot),\,D_{x_1}^{-\frac{1}{2}}\cdots D_{x_n}^{-\frac{1}{2}}\int W_0(t-s)F(s,\cdot)\,ds\right)dt$$

と書ける。Lemma 3.4より

$$\leq C\|F\|_{L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}_x^n;\,L^1(\mathbb{R}_t^n))}^2. \tag{3.8}$$

故に $L^2(\mathbb{R}_t^n\times\mathbb{R}_x^n)$ での内積 $((\cdot,\cdot))$ を用いて

$$|((D_{x_1}^{-\frac{1}{4}}\cdots D_{x_n}^{-\frac{1}{4}}W(\cdot)u_0,\,F))|=\left|\left(u_0,\,D_{x_1}^{-\frac{1}{4}}\cdots D_{x_n}^{-\frac{1}{4}}\int_{\mathbb{R}^n}W_0(-s)F(s)\,ds\right)\right|$$

$$\leq\|u_0\|_{L_x^2}\left\|D_{x_1}^{-\frac{1}{4}}\cdots D_{x_n}^{-\frac{1}{4}}\int_{\mathbb{R}^n}W_0(-s)F(s)\,ds\right\|_{L_x^2},$$

ここで(3.8)の評価を用いると、

$$\leq C\|u_0\|_{L_x^2}\|F\|_{L_x^{\frac{4}{3}}(L_t^1)}.$$

従って、

$$\|W(\cdot)u_0\|_{L^4(\mathbb{R}_x^n;\,L^\infty(\mathbb{R}_t^n))}\leq C\|D_{x_1}^{\frac{1}{4}}\cdots D_{x_n}^{\frac{1}{4}}u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.9}$$

あとは $\sup_{t\in\mathbb{R}^1}|U_0(t)u_0(x)| \le \sup_{s\in\mathbb{R}^n}|W_0(s)u_0(x)|$ を用いればよい。

（証明終わり）

次に Proposition 3.1 の証明に移る。

Proposition 3.1の証明 (i) Sobolevの埋め込み定理を用いると

$$\|\langle x\rangle^s U_0 u_0\|_{L^2_{x_j}(\mathbb{R};L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^{n-1}_{\tilde{x}_j}))} \le C\|\langle D_{\tilde{x}_j}\rangle^{\frac{n-1}{4}+\varepsilon}\langle x\rangle^s U_0 u_0\|_{L^2_{x_j}(\mathbb{R};L^\infty([0,T];L^4_{\tilde{x}_j}))}$$
$$\le C\|\langle D_{\tilde{x}_j}\rangle^{\frac{n-1}{4}+\varepsilon}\langle x\rangle^{s+\frac{1}{4}+\tilde{\varepsilon}}U_0 u_0\|_{L^4_x(\mathbb{R}^n;L^\infty_t([0,T]))},$$

$\tilde{\varepsilon}<\varepsilon$ となるように選んでおく。 (3.10)

さて、ここで commutator $[\langle x\rangle^{s+\frac{1}{4}+\tilde{\varepsilon}}, U_0]$ について考える。$w=U_0u_0$ とおけば w は次の微分方程式を満たす。

$$i\partial_t w = -\Delta w \quad , \quad w|_{t=0}=u_0 \tag{3.11}$$

(3.11) の両辺に weight $\langle x\rangle^{s+\frac{1}{4}+\tilde{\varepsilon}}$ を乗ずることにより $\langle x\rangle^{s+\frac{1}{4}+\varepsilon}w$ の方程式が構成される。つまり、

$$i\partial_t(\langle x\rangle^{s+\frac{1}{4}+\tilde{\varepsilon}}w) = -\Delta(\langle x\rangle^{s+\frac{1}{4}+\tilde{\varepsilon}}w) - [\langle x\rangle^{s+\frac{1}{4}+\tilde{\varepsilon}}, \Delta]w \tag{3.12}$$

故に Duhamel の原理から

$$\langle x\rangle^{s+\frac{1}{4}+\tilde{\varepsilon}}U_0(t)u_0 = U_0(t)\langle x\rangle^{s+\frac{1}{4}+\tilde{\varepsilon}}u_0 + iG_0\{2\partial_x\langle x\rangle^{s+\frac{1}{4}+\tilde{\varepsilon}}\partial_x U_0 u_0 + \partial_x^2\langle x\rangle^{s+\frac{1}{4}+\tilde{\varepsilon}}U_0 u_0\} \tag{3.13}$$

が得られる。(3.10)、(3.13) そして Theorem 3.2を適用すると

$$\|\langle x\rangle^s U_0 u_0\|_{L^2_{x_j}(L^\infty_{t\tilde{x}_j})} \le C\|\langle x\rangle^{s+\frac{1}{4}+\tilde{\varepsilon}}u_0\|_{H^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}+\varepsilon}}$$
$$+\|\langle D_x\rangle^{\frac{n-1}{4}+\varepsilon}D_x^{\frac{n}{4}}\{\partial_x\langle x\rangle^{s+\frac{1}{4}+\tilde{\varepsilon}}\partial_x U_0(t)u_0 + \partial^2\langle x\rangle^{s+\frac{1}{4}+\tilde{\varepsilon}}U_0(t)u_0\}\|_{L^2_x}dt$$
$$\le C\|\langle x\rangle^{s+\frac{1}{4}+\tilde{\varepsilon}}u_0\|_{H^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}+\varepsilon}} + CT\|u_0\|_{H^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}+\varepsilon}}$$
$$+CT^{\frac{1}{2}}\sup_{1\le j\le n}\|\langle D_x\rangle^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}+\varepsilon}\partial_{x_j}U_0u_0\|_{L^8_{x_j}(L^2_{t\tilde{x}_j})} \tag{3.14}$$

ここで、q は $\frac{1}{q}=s+\varepsilon-\frac{1}{4}$ となるように選んでおく。(3.14)の第3項を評価する為にTheorem 2.3 (i) を利用すると

$$\|\langle D_x\rangle^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}+\varepsilon}\partial_{x_j}U_0u_0\|_{L^q_{x_j}(L^2_{t\tilde{x}_j})}\le CT^{s+\varepsilon-\frac{1}{4}}\|u_0\|_{H^{\frac{n}{2}+s+2\varepsilon}} \tag{3.15}$$

が得られてProposition 3.1 (i) を示すことが出来た。

(ii) についても同様に評価すると

$$\|\langle x\rangle^s G_0F\|_{L^2_{x_j}(L^\infty_{t\tilde{x}_j})}\le C\|\langle D_x\rangle^{\frac{n-1}{4}+\varepsilon}\langle x\rangle^{s+\frac{1}{4}+\tilde{\varepsilon}}G_0F\|_{L^4_x(L^\infty_t)}. \tag{3.16}$$

commutator $[\langle x\rangle^{s+\frac{1}{4}+\tilde{\varepsilon}}, G_0]$ についても (3.11)～(3.13) のようにして

$$[\langle x\rangle^{s+\frac{1}{4}+\tilde{\varepsilon}}, G_0]F=iG_0\{2\partial_x\langle x\rangle^{s+\frac{1}{4}+\tilde{\varepsilon}}\cdot\partial_xG_0F+\partial_x^2\langle x\rangle^{s+\frac{1}{4}+\tilde{\varepsilon}}\cdot G_0F\} \tag{3.17}$$

のように書けるので、(3.16)と(3.17)から

$$\begin{aligned}\|\langle x\rangle^s G_0F\|_{L^2_{x_j}(L^\infty_{t\tilde{x}_j})}&\le C\|G_0\langle D_x\rangle^{\frac{n-1}{4}+\varepsilon}\langle x\rangle^{s+\frac{1}{4}+\tilde{\varepsilon}}F\|_{L^4_x(L^\infty_t)}\\&+C\|G_0\langle D_x\rangle^{\frac{n-1}{4}+\varepsilon}\{\partial_x\langle x\rangle^{s+\frac{1}{4}+\tilde{\varepsilon}}\cdot\partial_xG_0F+\partial_x^2\langle x\rangle^{s+\frac{1}{4}+\tilde{\varepsilon}}\cdot G_0F\}\|_{L^4_x(L^\infty_t)}\end{aligned}$$

ここでTheorem 3.2を適用すると

$$\begin{aligned}&\le C(T+T^2)\|\langle x\rangle^{s+\frac{1}{4}+\tilde{\varepsilon}}F\|_{L^\infty_t(H^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}+\varepsilon})}\\&+CT\sup_{1\le j\le n}\|\tilde{D}_x^{[\frac{n}{2}]+\frac{1}{2}}\partial_{x_j}G_0F\|_{L^\infty_t(L^2_x)}\end{aligned} \tag{3.18}$$

更にCorollary 2.2 (ii) を適用すればProposition 3.1 (ii) を示すことが出来る。

(証明終わり)

Proposition 3.1の証明中の(3.13)や(3.17)を利用すると U_0 や G_0 のweighted Sobolev空間での評価も得ることが出来る。§4においてはweighted Sobolev空間を用いた不等式も必要になってくるので、ここでその結果を述べておく。

Proposition 3.5

$\frac{1}{2}<s<1$ とする。このとき以下の不等式が成立する。

(i) $\|\langle x\rangle^s U_0 u_0\|_{L_t^\infty(L_x^2)} \leq C\|\langle x\rangle^s u_0\|_{L_x^2} + C(T)\|u_0\|_{H^{s+\varepsilon}}$ (3.19)

(ii) $\|\langle x\rangle^s G_0 F\|_{L_t^\infty(L_x^2)} \leq C(T)(\|\langle x\rangle^s F\|_{L_t^\infty(L_x^2)} + \|\partial_x G_0 F\|_{L_t^\infty(L_x^2)})$

(3.20)

<u>証明</u> (i) (3.13)より

$$\begin{aligned}\|\langle x\rangle^s U_0 u_0\|_{L_t^\infty(L_x^2)} &\leq \|U_0\langle x\rangle^s u_0\|_{L_t^\infty(L_x^2)}\\ &\quad+\|G_0\{2\partial_x\langle x\rangle^s\cdot\partial_x U_0 u_0+\partial_x^2\langle x\rangle^s\cdot U_0 u_0\}\|_{L_t^\infty(L_x^2)}\\ &\leq \|\langle x\rangle^s u_0\|_{L_x^2}+CT\|u_0\|_{L_x^2}\\ &\quad+CT^{\frac{1}{2}}\sup_{1\leq j\leq n}\|\partial_{x_j}U_0 u_0\|_{L_{x_j}^{\theta}(L^2_{t\bar{x}_j})}, \qquad (3.21)\end{aligned}$$

ここで $\frac{1}{\theta}=s-\frac{1}{2}+\varepsilon$ を満たすようにとる。Theorem 2.3(i)を(3.21)の第3項に適用すればProposition 3.5 (i)を得る。

(ii) (3.17)より

$$\begin{aligned}\|\langle x\rangle^s G_0 F\|_{L_t^\infty(L_x^2)} &\leq \|G_0\langle x\rangle^s F\|_{L_t^\infty(L_x^2)}\\ &\quad+\|G_0\{2\partial_x\langle x\rangle^s\cdot\partial_x G_0 F+\partial_x^2\langle x\rangle^s\cdot G_0 F\}\|_{L_t^\infty(L_x^2)}\\ &\leq T\|\langle x\rangle^s F\|_{L_t^\infty(L_x^2)}+cT^2\|F\|_{L_t^\infty(L_x^2)}\\ &\quad+T\|\partial_x G_0 F\|_{L_t^\infty(L_x^2)}\end{aligned}$$

以上より、Proposition 3.5 が示された。 （証明終わり）

<u>注意</u> Proposition 3.5 (ii)で右辺に G_0F を残した理由は、後の§4 (4.7)の評価を行う際に分数階微分を使わないようにしたいからである。

§4 Iteration

この節では§2, §3で作られた評価を用いて、積分方程式(1.4)が解を持つことを示す。その為に次のように定義された作用素Φが contraction mapping になっていること示す。

$$\Phi(u) = U_0(t)u_0 - i\,G_0 P(u, \bar{u}, \partial_x u, \partial_x \bar{u}) \tag{4.1}$$

ここでは簡単の為に $P(u, \bar{u}, \partial_x u, \partial_x \bar{u}) = \sum_{1 \le k, \ell \le n} C_{k,\ell}\, \partial_{x_k} u\, \partial_{x_\ell} \bar{u}$ の場合について考えることにする。Iteration を行う集合は以下のようになっている。

$$B_\delta \equiv \{ v : (t,x) \to \mathbb{C} \mid |||v|||_Y \le \delta \} \tag{4.2}$$

ここで、

$$\begin{aligned} |||v|||_Y = {} & \|v\|_{L_t^\infty(H^{\sigma-\frac{1}{2}})} + \|v\|_{L_t^\infty(H^{\frac{n}{2}+\frac{3}{4}+\varepsilon,\, \frac{3}{4}+2\varepsilon})} \\ & + \sum_{\substack{|\alpha|=\sigma-1 \\ 1 \le j \le n}} \|\partial_x^\alpha \partial_{x_j} v\|_{L_{x_j}^\infty(L^2_{t\tilde{x}_j})} + \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le k \le n}} \|\langle x \rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \partial_{x_k} v\|_{L^2_{x_j}(L^\infty_{t\tilde{x}_j})} \\ & + \sum_{|\alpha|=\sigma-1} \|\partial_x^\alpha v\|_{L_t^{r^*}(L_x^{2^*})}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

ただし、$\sigma = [\frac{n}{2}] + 3$ および $2^* = \frac{2n}{n-2+\varepsilon}$ (if $n \ge 2$), $= \infty$ (if $n = 1$), $\frac{2}{r^*} = n(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*})$.

(4.2)に見られる正定数δの大きさは後ほど決定される。まず $|\alpha| = s-1$ として、Proposition 2.1 を用いると、

$$\begin{aligned} \|\partial_x^\alpha \partial_{x_j} \Phi(u)\|_{L_{x_j}^\infty(L^2_{t\tilde{x}_j})} & \le C\|u_0\|_{H^{\sigma-\frac{1}{2}}} + C \sup_{k,\ell} \|\partial_x^\alpha(\partial_{x_k} u\, \partial_{x_\ell} \bar{u})\|_{L^1_{x_j}(L^2_{t\tilde{x}_j})} \\ & \le C\|u_0\|_{H^{\sigma-\frac{1}{2}}} + C \sup_{k,\ell} \|\partial_{x_k} u \cdot \partial_x^\alpha \partial_{x_\ell} \bar{u}\|_{L^1_{x_j}(L^2_{t\tilde{x}_j})} \\ & \quad + C \sup_{\substack{k,\ell \\ 1 \le |\beta| \le |\alpha|-1}} \|\partial_x^\beta \partial_{x_k} u \cdot \partial_x^{\alpha-\beta} \partial_{x_\ell} \bar{u}\|_{L^1_{x_j}(L^2_{t\tilde{x}_j})}, \end{aligned}$$

ここで不等式 $\|\partial_{x_k} u \cdot \partial_x^\alpha \partial_{x_\ell} \bar{u}\|_{L^1_{x_j}(L^2_{t\tilde{x}_j})} \le C\|\langle x \rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \partial_{x_k} u \cdot \partial_x^\alpha \partial_{x_\ell} \bar{u}\|_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^n_x)}$ および Hölder の不等式を用いて評価すれば、

$$\|\partial_x^\alpha \partial_{x_j} \Phi(u)\|_{L^\infty_{x_j}(L^2_{t\tilde{x}_j})} \le C\|u_0\|_{H^{\sigma-\frac{1}{2}}} + C\sup_{k,\ell} \|\langle x\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \partial_{x_k} u\|_{L^2_{x_\ell}(L^\infty_{t\tilde{x}_\ell})} \|\partial_x^\alpha \partial_{x_\ell} u\|_{L^\infty_{x_\ell}(L^2_{t\tilde{x}_\ell})}$$
$$+ C \sup_{\substack{2\le|\beta|\le|\gamma|\le\sigma-1 \\ |\beta|+|\gamma|=\sigma+1}} \|\langle x\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \partial_x^\beta u\|_{L^\infty_t(L^{\tilde{p}}_x)} \|\partial_x^\gamma u\|_{L^2_t(L^p_x)}.$$

ここで $p, \tilde{p}$ は $\frac{n}{p} > \frac{n}{2}+|\gamma|-\sigma$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{\tilde{p}}=\frac{1}{2}$ となるように選ぶ。第 3 項を更に評価する為に Sobolev の埋め込み $H^{\frac{n}{2}+|\gamma|-\sigma+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\tilde{p}}(\mathbb{R}^n)$ および $W^{\sigma-|\gamma|-1, \frac{2n}{n-2+\varepsilon}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ を用いれば

$$\|\partial_x^\alpha \partial_{x_j} \Phi(u)\|_{L^\infty_{x_j}(L^2_{t\tilde{x}_j})} \le C\|u_0\|_{H^{\sigma-\frac{1}{2}}} + C\sup_{k,\ell} \|\langle x\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \partial_{x_k} u\|_{L^2_{x_\ell}(L^\infty_{t\tilde{x}_\ell})} \|\partial_x^\alpha \partial_{x_\ell} u\|_{L^\infty_{x_\ell}(L^2_{t\tilde{x}_\ell})}$$
$$+ C(T)\|\langle x\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon} u\|_{L^\infty_t(H^{\frac{n}{2}+1+\varepsilon})} \sup_{|\alpha|=s-1} \|\partial^\alpha u\|_{L_t^{\frac{4n}{2-\varepsilon}}(L_x^{\frac{2n}{n-2+\varepsilon}})}$$
$$\le C\|u_0\|_X + (C+C(T))|||u|||_Y^2. \tag{4.4}$$

ただし、(4.4) を導く時に complex interpolation から従う不等式

$$\|w\|_{H^{\frac{n}{2}+1+\varepsilon, \frac{1}{2}+\varepsilon}} \le \|w\|^{\theta}_{H^{\frac{n}{2}+\frac{3}{4}+\varepsilon, \frac{3}{4}+\varepsilon}} \|w\|^{1-\theta}_{H^{\frac{n}{2}+\frac{3}{2}+2\varepsilon}}$$

を用いた。($\theta = (\frac{1}{2}+\varepsilon)/(\frac{3}{4}+\varepsilon)$ とする。) 次に Proposition 3.1 から

$$\|\langle x\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \partial_x \Phi(u)\|_{L^2_{x_j}(L^\infty_{t\tilde{x}_j})} \le C\|u_0\|_{H^{\frac{n}{2}+\frac{3}{4}+\varepsilon, \frac{3}{4}+2\varepsilon}} + C(T)\|u_0\|_{H^{\frac{n}{2}+\frac{3}{2}+3\varepsilon}}$$
$$+ C(T)\sup_{\substack{k,\ell,j \\ |\alpha|=\sigma-1}} \|\partial_x^\alpha(\partial_{x_k} u\, \partial_{x_\ell}\bar{u})\|_{L^1_{x_j}(L^2_{t\tilde{x}_j})}$$
$$+ C(T)\sup_{k,\ell} \|\partial_{x_k} u \cdot \partial_{x_\ell}\bar{u}\|_{L^\infty_t(H^{\frac{n}{2}+\frac{3}{4}+\varepsilon, \frac{3}{4}+2\varepsilon})}.$$

第 2 項の評価は (4.4) と同様に行えばよい。第 4 項については

$$\|\partial_x u \cdot \partial_x \bar{u}\|_{L^\infty_t(H^{\frac{n}{2}+\frac{3}{4}+\varepsilon, \frac{3}{4}+2\varepsilon})} \le C\|u\|^2_{L^\infty_t(H^{\frac{n}{2}+\frac{3}{4}+\varepsilon, \frac{3}{4}+2\varepsilon})}$$

を利用して評価する。すると

$$\|\langle x\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \partial_x \Phi(u)\|_{L^2_{x_j}(L^\infty_{t\tilde{x}_j})} \le C\|u_0\|_X + C(T)|||u|||_Y^2 \tag{4.5}$$

次に Proposition 2.6 を用いると

$$\sum_{|\alpha|=\sigma-1} \|\partial_x^\alpha \Phi(u)\|_{L^{r^*}_t(L^{2^*}_x)} \le C\|u_0\|_{H^{\sigma-1}} + C\sup_{\substack{|\alpha|=\sigma-1 \\ k,\ell}} \|\partial_x^\alpha(\partial_{x_k} u \cdot \partial_{x_\ell}\bar{u})\|_{L^1_t(L^2_x)}$$
$$\le C\|u_0\|_{H^{\sigma-1}} + CT^{\frac{1}{2}} \sup_{\substack{|\alpha|=\sigma-1 \\ k,\ell}} \|\partial_{x_k} u \cdot \partial_x^\alpha \partial_{x_\ell}\bar{u}\|_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^n_x)}$$

$$+CT^{\frac{1}{2}}\sup_{\substack{1\le|\beta|\le|\alpha|-1\\ k,l}}\|\partial_x^{\beta}\partial_{x_k}u\cdot\partial_x^{\alpha-\beta}\partial_{x_l}\bar{u}\|_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^n_x)}$$

となる。あとは(4.4)を導く様にして評価すればよい。故に

$$\sum_{|\alpha|=\sigma-1}\|\partial_x^{\alpha}\Phi(u)\|_{L_t^{r^*}(L_x^{2^*})}\le C\|u_0\|_X + C(T)\|u\|_Y^2. \tag{4.6}$$

次にProposition 3.5を用いると

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)\|_{L_t^\infty(H^{\frac{n}{2}+\frac{3}{4}+\varepsilon,\frac{3}{4}+2\varepsilon})}\le{}& C\|u_0\|_{H^{\frac{n}{2}+\frac{3}{4}+\varepsilon,\frac{3}{4}+2\varepsilon}}+C(T)\|u_0\|_{H^{\frac{n}{2}+\frac{3}{2}+3\varepsilon}}\\ &+C(T)\sup_{k,l}\|\partial_{x_k}u\,\partial_{x_l}\bar{u}\|_{L_t^\infty(H^{\frac{n}{2}+\frac{3}{4}+\varepsilon,\frac{3}{4}+2\varepsilon})}\\ &+C(T)\sup_{\substack{k,l,m\\|\beta|=[\frac{n}{2}]+2}}\|\partial_x^{\beta}D_{x_m}^{\frac{1}{2}}G_0(\partial_{x_k}u\,\partial_{x_l}\bar{u})\|_{L_t^\infty(L_x^2)}\end{aligned}$$

上式の第3項は(4.5)で用いた評価で処理できる。第4項についてはCorollary 2.2を用いて評価できる。故に

$$\|\Phi(u)\|_{L_t^\infty(H^{\frac{n}{2}+\frac{3}{4}+\varepsilon,\frac{3}{4}+2\varepsilon})}\le C\|u_0\|_X + C(T)\|u\|_Y^2. \tag{4.7}$$

最後にCorollary 2.2を用いることで次の不等式を得る。

$$\|\Phi(u)\|_{L_t^\infty(H^{\sigma-\frac{1}{2}})}\le C\|u_0\|_{H^{\sigma-\frac{1}{2}}}+C\sup_{\substack{j,k,l\\|\alpha|=\sigma-1}}\|\partial^{\alpha}(\partial_{x_k}u\cdot\partial_{x_l}\bar{u})\|_{L^1_{x_j}(L^2_{t\tilde{x}_j})}.$$

右辺第2項については(4.4)と同じように評価すればよい。従って、

$$\|\Phi(u)\|_{L_t^\infty(H^{\sigma-\frac{1}{2}})}\le C\|u_0\|_X + (C+C(T))\|u\|_Y^2. \tag{4.7}$$

(4.4)～(4.7)の評価を合わせると

$$\|\Phi(u)\|_Y\le C\|u_0\|_X + (C+C(T))\|u\|_Y^2.$$

を得る。一般的にp次式の非線形項$P(u,\bar{u},\partial u,\partial\bar{u})$に対しては計算が更に煩雑になるが次のような評価を得る。

$$\|\Phi(u)\|_Y\le C\delta_0 + (C+C(T))\|u\|_Y^2(1+\|u\|_Y^{p-2}). \tag{4.8}$$

(4.8)からδ_0を十分小さくとり、空間Yの球の半径δをうまく

選ぶことにより写像ΦがB_δをB_δにうつすことがわかる。δとしては方程式

$$\delta = c\delta_0 + (c + C(T))\delta^2(1+\delta^{p-2}) \tag{4.9}$$

を満たすように選べば良い。(4.4)〜(4.7)の評価と同様にすれば、$u_1, u_2 \in B_\delta$ に対して

$$\begin{aligned}
|||\Phi(u_1) - \Phi(u_2)|||_Y &\le (c + C(T)) \sup_{j=1,2}(|||u_j|||_Y + |||u_j|||_Y^{p-2})\, |||u_1 - u_2|||_Y \\
&\le (c + C(T))(\delta + \delta^{p-2})|||u_1 - u_2|||_Y \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

が得られる。δを十分小さく選んでおけばΦがcontraction mapであることが示される。これでTheorem 1.1は示された。

<u>注意</u> 初期dataにsmallnessを課さなくてはいけない理由は(4.4)と(4.8)の評価で厄介な定数cが現れてしまうからである。この定数の為に、時間幅Tをどれだけ小さく絞っても縮小写像の係数が1よりも小さくはならない。また、この定数cはProposition 2.1およびCorollary 2.2の評価を用いて非斉次項$G_0P(u, \bar{u}, \partial u, \partial\bar{u})$を処理することから生じている。大きな初期dataに対して解の存在を示すためには、非線形項Pをラプラシアン$-\Delta$の摂動として取り扱う方法では難しい。エネルギー評価を利用するか、あるいは摂動付きのハミルトニアンHに対して、e^{-itH}のsmoothing effectを考えるのが良いようである。

References

[1] D.Bekiranov, T.Ogawa and G.Ponce, *On the well-posedness of Benny's interaction equation of short and long waves*, Advances in Diff. Eq., (1996) 919-937.

[2] T.Cazenave and F.B.Weissler, *Some remarks on the nonlinear Schrödinger equation in the critical case*, Lecture in Math., **1392**, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1989, 18-29.

[3] H.Chihara, *Local existence for semilinear Schrödinger equations*, Math. Japon. **42** (1995), 35-52.

[4] F.M.Christ and M.I.Weinstein, *Dispersion of small amplitude solutions of the generalized Korteweg-de Vries equation*, J. Funct. Anal. **100** (1991), 87-109.

[5] P.Constantin and J.C.Saut, *Local smoothing properties of dispersive equations*, J. Amer. Math. Soc., **1** (1989), 413-446.

[6] J.Ginibre and G.Velo, *On a class of Schrödinger equations*, J. Funct. Anal., **32** (1979), 1-71.

[7] N.Hayashi, *Global existence of small analytic solutions to nonlinear Schrödinger equations*, Duke Math. J., **62** (1991), 575-592.

[8] N.Hayashi and H.Hirata, *Global existence of small solutions to nonlinear Schrödinger equations*, preprint.

[9] N.Hayashi and T.Ozawa, *Remarks on nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Diff. and Integral Eq.**7** (1994), 453-461.

[10] N.Hayashi and S.Saitoh, *Analyticity and global existence of small solutions to some nonlinear Schrödinger equations*, Comm. Math. Phys., **129**, (1990), 27-41.

[11] L.Hörmander, *The Analysis of Liniear Partial Differential Operators I*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo. 1983.

[12] T.Kato, *On nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Phisique théoretique, **46** (1987), 113-129.

[13] T.Kato, *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation*, Advances in Math. Supp. Studies, Studies in Applied Math., **8** (1983), 93-128.

[14] C.E.Kenig, G.Ponce and L.Vega, *Small solutions to nonlinear Schrödinger equations*, Annales de l'I.H.P. Analyse Nonlinéare, **10** (1993), 225-288.

[15] C.E.Kenig, G.Ponce and L.Vega, *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction mapping principle*, Comm. Pure Appl. Math., **46** (1993), 527-620.

[16] C.E.Kenig, G.Ponce and L.Vega, *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations*, Indiana Univ. Math. J., **40** (1991), 33-69.

[17] C.E.Kenig and Ruiz, *A strong type* $(2,2)$ *estimate for the maximal function associated to the schrödinger equation*, Trans. Amer. Math. Soc., **280** (1983), 239-246.

[18] S.Klainerman, *Long time behavior of solutions to nonlinear evolution equations*, Arch. Ration. Mech. and Analysis, **78**, (1981), 73-98.

[19] S.Klainerman and G.Ponce, *Global small amplitude solutions to nonlinear evolution equations*, Comm. Pure Appl. Math., **36**, (1983), 133-141.

[20] T.Ozawa, *Remarks on quadratic nonlinear Schrödinger equations*, Funkcialaj Ekvacioj, **38** (1995), 217-232.

[21] J.Shatah, *Global existence of small solutions to nonlinear evolution equations*, J. Diff. Eq., **46** (1982), 409-425.

[22] P.Sjölin, *Regularity of solutions to the Schrödinger equations*, Duke Math., **55** (1987), 699-715.

[23] E.M.Stein and G.Weiss, "Introduction to Fourier Analysis in Euclidean Spaces," Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.

[24] W.A.Strauss, *Nonlinear Wave Equations*, Conference Board of Mathematical Sciences, Regional Conferences Series in Mathematics, **73**, Amer. Math. Soc., 1989.

[25] R.S.Strichartz, *Restriction of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equation*, Duke Math. J., **44**(1977), 705-714.

[26] Y.Tsutsumi, L^2*-solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear group*, Funkcialaj Ekvacioj, **30** (1987), 115-125.

[27] Y.Tsutsumi and K.Yajima, *The asymptotic behavior of nonlinear Schrödinger equations*, Bull. Amer. Math. Soc. **11** (1984), 186-188.

[28] L.Vega, *The Schrödinger equation: pointwise convergence to the initial data*, Proc. Amer. Math. Soc., **102** (1988), 874-878.

[29] K.Yajima, *Existence of solutions for Schrödinger evolution equations,* Comm. Math. Phys., **110** (1987), 415-426.