数理解析研究所講究録
1048 巻 1998 年 111-116

n 人ゲームの Shapley 値について

伊澤 康充 (Yasumitsu Izawa)
高橋 渉 (Wataru Takahashi)

東京工業大学大学院情報理工学研究科

1 導入と準備

$N=\{1,2,\cdots,n\}$ とし, 2^N を N の部分集合の全体とする. このとき, (N,v) が n 人ゲームであるとは, $v:2^N\to R$ が $v(\phi)=0$ を満たすときをいう. n 人ゲーム (N,v) に対して, ゲーム (N,v) の imputations の全体 A は

$$A=\left\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n:\sum_{i=1}^n x_i=v(N), x_i\geq v(\{i\}),\ \forall i\in N\right\}$$

で定義される. また, ゲーム (N,v) の core C は

$$C=\left\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A:\sum_{i\in S}x_i\geq v(S),\ \forall S\subset N\right\}$$

で定義される [5] , [6] , [8] . ここで, $S=\phi$ のときは $\sum_{i\in S}x_i=0$ である.

n 人ゲーム (N,v) が convex であるとは, $i\in B\subset N\backslash A$ となる任意の i と $A,B\subset N$ に対して, 常に

$$v(A\cup B)-v(B)\geq v(A\cup(B\backslash\{i\}))-v(B\backslash\{i\})$$

が成立するときをいう. また, ゲーム (N,v) が exact であるとは, 任意の $S\subset N$ に対して

$$\sum_{i\in S}x_i=v(S)$$

となる $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in C$ が存在するときをいう. 1953 年, L.S. Shapley は "A value for n-person games" と題する論文 [3] の中で, n 人ゲーム (N,v) に対して, Shapley 値と呼ばれる R^n の元 $\phi=(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n)$ をつぎのように定義した.

$$\phi_i=\sum_{S\subset N}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[v(S)-v(S\backslash\{i\})],\quad \forall i\in N$$

ここで, 和 $\sum_{S\subset N}$ は N の空でない部分集合 S の全体を動くものとする. また s は S の要素の数である. この論文が発表されて以来, Shapley 値は種々の分野で研究され, 用いられてきているが, Shapley 値に関しては解明されていない部分が多く, 現在なお沢山の人々によって研究が続けられている. 1971 年, Shapley [4] は, ゲーム (N,v) の Shapley 値$\phi=(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n)$ が core C に入る十分条件として, ゲーム (N,v) が convex であることを証明している. また, 最近 E. Iñarra と J.M. Usategui [1] は, convex ゲームよりも一般的な average convex ゲームを定義し, ゲーム (N,v) が average convex ならば, その Shapley 値は core C に属することを証明している. ここで, ゲーム (N,v) が average convex であるとは, $A\cap B=\phi$ となる任意の $A,B\subset N$ に対して, 常に

$$v(A\cup B)-v(B)\geq\frac{1}{b}\sum_{i\in B}[v(A\cup(B\backslash\{i\}))-v(B\backslash\{i\})]$$

が成立するときをいう. Shapley 値に関しては, 1978 年, つぎのようなことも問題になった. W.F. Lucas は彼の論文 [2] の中で, 「 exact ゲームでは Shapley 値は core の要素になっているであろうか 」という問を発した. それに対して 1981 年, M.A. Rabie [7] は core の要素になっていない 5 人 exact ゲームの例をあげている.

この論文では, n 人ゲーム (N,v) の Shapley 値が core の要素になるための, ゲーム (N,v) が満たす必要十分条件を求めている.

2 補助定理

(N,v) を n 人ゲームとしよう. このとき, $S\subset N$ を $i\in N$ に対して

$$v^i(S)=v(S)-v(S\backslash\{i\})$$

とすると, (N,v) の Shapley 値 $\phi=(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n)$ は

$$\phi_i=\sum_{S\subset N}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}v^i(S),\ \forall i\in N$$

と書くことができる. すべてのゲーム (N,v) に対して, [3] より

$$\sum_{i\in N}\phi_i=v(N)$$

であることが知られている. また, 空でない集合 $T\subset N$ に対して, ゲーム (N,v) の subgame (T,v_0) はつぎのように定義される.

$$v_0(K)=v(K),\ \forall K\subset T$$

我々は この subgame (T, v_0) の Shapley 値を ϕ^T によって表すことにする. つぎの補助定理はこの論文の主定理を証明する上で重要なものとなる. 補助定理を述べる前に定義を 1 つ与えておく. n, k を $n \geq k$ となる非負の整数とするとき, 二項係数 ${}_nC_k$ は

$$ {}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)!k!} $$

で定義される. ただし, $0! = 1$ である.

補助定理 n, k, m を $n - k \geq m$ である自然数とする. このとき

$$ \sum_{s=m}^{k+m} \frac{{}_kC_{s-m}}{{}_{n-1}C_{s-1}} = \frac{n}{(n-k)\,{}_{n-k-1}C_{m-1}} $$

が成立する.

証明 数学的帰納法によって証明する, まず $k = 1$ で $n - 1 \geq m \geq 1$ であるとき, 我々は

$$ \begin{aligned} \sum_{s=m}^{m+1} \frac{{}_1C_{s-m}}{{}_{n-1}C_{s-1}} &= \frac{{}_1C_0}{{}_{n-1}C_{m-1}} + \frac{{}_1C_1}{{}_{n-1}C_m} \\ &= \frac{1}{{}_{n-1}C_{m-1}} + \frac{m}{(n-m)\,{}_{n-1}C_{m-1}} \\ &= \frac{n}{(n-m)\,{}_{n-1}C_{m-1}} \\ &= \frac{n}{(n-1)\,{}_{n-2}C_{m-1}} \end{aligned} $$

をもつ. そこで, $t \geq 2$ となる $k = t - 1$ と $n - (t - 1) \geq m \geq 1$ となる n, m に対して, 与えられた等式が成立すると仮定しよう. このとき $n - t \geq m \geq 1$ となる $k = t$ と n, m に対して, 我々は

$$ \begin{aligned} \sum_{s=m}^{m+t} \frac{{}_tC_{s-m}}{{}_{n-1}C_{s-1}} &= \frac{{}_tC_0}{{}_{n-1}C_{m-1}} + \sum_{s=m+1}^{m+t-1} \frac{{}_tC_{s-m}}{{}_{n-1}C_{s-1}} + \frac{{}_tC_t}{{}_{n-1}C_{m+t-1}} \\ &= \frac{{}_{t-1}C_0}{{}_{n-1}C_{m-1}} + \sum_{s=m+1}^{m+t-1} \frac{{}_{t-1}C_{s-m}}{{}_{n-1}C_{s-1}} + \sum_{s=m+1}^{m+t-1} \frac{{}_{t-1}C_{s-(m+1)}}{{}_{n-1}C_{s-1}} + \frac{{}_{t-1}C_{t-1}}{{}_{n-1}C_{m+t-1}} \\ &= \sum_{s=m}^{m+t-1} \frac{{}_{t-1}C_{s-m}}{{}_{n-1}C_{s-1}} + \sum_{s=m+1}^{m+t} \frac{{}_{t-1}C_{s-(m+1)}}{{}_{n-1}C_{s-1}} \\ &= \sum_{s=m}^{m+t-1} \frac{{}_{t-1}C_{s-m}}{{}_{n-1}C_{s-1}} + \sum_{s=m+1}^{m+1+t-1} \frac{{}_{t-1}C_{s-(m+1)}}{{}_{n-1}C_{s-1}} \\ &= \frac{n}{(n-t+1)\,{}_{n-t}C_{m-1}} + \frac{n}{(n-t+1)\,{}_{n-t}C_m} \\ &= \frac{n(m-1)!(n-m-t+1)!}{(n-t+1)!} + \frac{nm!(n-m-t)!}{(n-t+1)!} \\ &= \frac{n(m-1)!(n-m-t)!(n-t+1)}{(n-t+1)!} \end{aligned} $$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n(m-1)!(n-m-t)!}{(n-t)!} \\
&= \frac{n}{(n-t)_{n-t+1}C_{m-1}}
\end{aligned}
$$

をもつ．よって等式の証明は完了する．

3 主定理

この節では，ゲーム (N, v) に対して totally convex の概念を導入し，そのゲームにおける Shapley 値について議論する．

定義 (N, v) を n 人ゲームとする．このとき (N, v) が totally convex であるとは，任意の $T \subset N$ に対して

$$
\sum_{S \subset N} \sum_{i \in S \cap T} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v^i(S) - v^i(S \cap T)] \geq 0
$$

が成り立つことである．ただし，和 $\sum_{S \subset N}$ は空でない集合 $S \subset N$ 全体を動くものとし，$S \cap T = \phi$ ならば$\sum_{i \in S \cap T} [v^i(S) - v^i(S \cap T)] = 0$ となるものとする．

今や，ゲーム (N, v) の Shapley 値がその core に属するための必要十分条件を確立することができる．

定理 (N, v) を n 人ゲームとする．このとき，(N, v) の Shapley 値が core に属するための必要十分条件は，そのゲーム (N, v) が totally convex になることである．

証明 (N, v) を totally convex であるとし，T を N の空でない部分集合とする．このとき，任意の $R \subset T$ と $n - t + r \geq s \geq |R| = r$ となる自然数 s に対して，$S \cap T = R$ かつ $|S| = s$ となる N の部分集合 S の個数は ${}_{n-t}C_{s-r}$ である．ただし，$|R|, |S|$ は集合 R, S の要素の数を表すものとする．そこで我々は

$$
\begin{aligned}
\sum_{i \in T} \phi_i &= \sum_{i \in T} \sum_{S \subset N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} v^i(S) \\
&= \sum_{i \in T} \sum_{S \subset N} \frac{1}{n_{n-1}C_{s-1}} v^i(S) \\
&= \sum_{s \subset N} \frac{1}{n_{n-1}C_{s-1}} \sum_{i \in S \cap T} v^i(S) \\
&\geq \sum_{S \subset N} \frac{1}{n_{n-1}C_{s-1}} \sum_{i \in S \cap T} v^i(S \cap T) \\
&= \sum_{R \subset T} \sum_{s=r}^{n-t+r} \frac{{}_{n-1}C_{s-r}}{n_{n-1}C_{s-1}} \sum_{i \in R} v^i(R) \\
&= \sum_{R \subset T} \frac{1}{t_{t-1}C_{r-1}} \sum_{i \in R} v^i(R) \qquad (\text{補助定理})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i\in T}\sum_{R\subset T}\frac{1}{t\,{}_{t-1}C_{r-1}}v^i(R)\\
&= \sum_{i\in T}\phi_i^T\\
&= v(T)
\end{aligned}
$$

をもつ. $T=\phi$ ならば, $0=\sum_{i\in T}\phi_i=v(T)$ であり, $\sum_{i\in N}\phi_i=v(N)$ でもあるので, ゲーム (N,v) の Shapley 値は, その core に属することが証明できた.

逆に, ゲーム (N,v) の Shapley 値が core に属するならば, 上の式より, そのゲーム (N,v) が totally convex であることは容易にわかる.

4 例

この節では まずはじめに, average convex game が totally convex game になることを証明する. n 人ゲーム (N,v) が average convex であるとする. このとき $A\cap B=\phi$ となる $A,B\subset N$ に対して

$$bv(A\cup B)-bv(B)\geq\sum_{i\in B}[v((A\cup B)\backslash\{i\})-v(B\backslash\{i\})]$$

であるから

$$\sum_{i\in B}v^i(A\cup B)\geq\sum_{i\in B}v^i(B)$$

を得る. ここで $S,T\in N$ に対して $A=S\backslash T$, $B=S\cap T$ とすると

$$\sum_{i\in S\cap T}[v^i(S)-v^i(S\cap T)]\geq 0$$

となる. よって $T\subset N$ に対して

$$\sum_{S\subset N}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\sum_{i\in S\cap T}[v^i(S)-v^i(S\cap T)]\geq 0$$

を得る. だから (N,v) は totally convex である.

例　つぎのような 3-person game (N,v) を考えることにする.

$$
\begin{aligned}
&v(\phi)=v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{3\})=0,\\
&v(\{1,2\})=5,\ v(\{1,3\})=v(\{2,3\})=7,\\
&v(N)=10
\end{aligned}
$$

このとき, これが totally convex game となることを確かめるのは簡単である. しかし そのゲームは average convex でない. 実際 $A=\{1\}$, $B=\{2,3\}$ とすると

$$
\begin{aligned}
3=v(A\cup B)-v(B) &< \frac{1}{2}\sum_{i\in B}[v(A\cup(B\backslash\{i\}))-v(B\backslash\{i\})]\\
&= 6
\end{aligned}
$$

となるからである.

参考文献

[1] E. Iñarra and J.M. Usategui, *The Shapley value and average convex games*, Int. J. Game Theory, 22 (1993), 13-29.

[2] W.F. Lucas, *Report on the fourth international workshop in the game theory*, Tech. Report # 392, School of OR+IE, Cornell University, Ithaca, N. Y. 14853, 1978.

[3] L.S. Shapley, *A value for n-person games*, Anal. Math. Studies, 28 (1953), 307-317.

[4] L.S. Shapley, *Cores and convex games*, Int. J. Game Theory, 1 (1971), 1-26.

[5] N. Shioji and W. Takahashi, *Fan's theorem concerning systems of convex inequalities and its applications*, J. Math. Anal. Appl., 135 (1988), 383-398.

[6] M. Suzuki and S. Muto, *The theory of cooperative games (Japanese)*, Tokyo Univ. Press, 1985.

[7] M.A. Rabie, *A note on the exact games*, Int. J. Game Theory, 10 (1981), 131-132.

[8] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis (Japanese)*, Kindaikagaku-sha, Tokyo, 1988.

E-mail address: bond@is.titech.ac.jp
E-mail address: wataru@is.titech.ac.jp