数理解析研究所講究録
1048 巻 1998 年 66-71

Poisson ジャンプを伴う幾何 Brown 運動の最適停止問題

大西 匡光 (Masamitsu OHNISHI)
大阪大学 経済学部

1 はじめに

本論文では, Poisson 過程に従い, 独立同一分布に従う大きさの変化率を持つジャンプをする幾何 Brown 運動に対して, 停止時刻における終端報酬の期待割引き値を最大化する最適停止問題を議論する. Dixit [1], Dixit and Pindyck [2] の提案した Smooth Pasting の技法が, より一般的な問題に対して, 最適値関数, 最適停止領域, そして最適停止時刻の導出に有効であることを示す.

2 問題の定式化

基礎となる確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とし, そこで定義される以下の確率要素を考える:

$\mathcal{W} = (W_t; t \in \mathcal{R}_+)$: 標準 Brown 運動;

$\mathcal{N} = (N_t; t \in \mathcal{R}_+)$: 強度 $\lambda \geq 0$ の時間斉次 (右連続) Poisson 計数過程;

$\mathcal{U} = (U_i; i \in \mathcal{Z}_{++})$: 平均 m_U を持つ共通の累積分布関数を F_U とする, 独立で同一の分布に従う $(-1, 0]$ 値確率変数列, したがって

$$F_U(-1) = 0; \quad F_U(0) = 1, \tag{2.1}$$

$$m_U = E[U_i] = \int_{-1}^{0} u dF_U(u). \tag{2.2}$$

ただし, これらは互いに確率的に独立であると仮定する. いま,

$\mathcal{T} = (T_i; i \in \mathcal{Z}_+)$: Poisson 計数過程 $\mathcal{N}$ の事象時刻列 (ただし $0 = T_0 \leq T_1 \leq \cdots$)

として, 以下で記述される右連続な $\mathcal{R}_{++}$ 値確率過程 $\mathcal{X} = (X_t; t \in \mathcal{R}_+)$ を考える.

(D1) 時間区間 $[T_i, T_{i+1})$ $(i \in \mathcal{Z}_+)$ では, μ, $\sigma \geq 0$ を定数として, 確率微分方程式

$$dX_t = X_t\left(\mu dt + \sigma dW_t\right) \tag{2.3}$$

に従う;

(D2) 時刻 T_i $(i \in \mathcal{Z}_{++})$ において, $\mathcal{X}$ は変化率 $1 + U_i$ のジャンプをする, すなわち,

$$X_{T_i} = X_{T_i -}(1 + U_i). \tag{2.4}$$

このとき, $t \in [T_i, T_{i+1})$ $(i \in \mathcal{Z}_+)$ では,

$$X_t = X_{T_i} \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\} \tag{2.5}$$

と表されることを繰り返し用いれば, 任意の $t \in \mathcal{R}_+$ に対して,

$$X_t = X_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\}\left[\prod_{i=1}^{N_t}(1 + U_i)\right] \tag{2.6}$$

と表すことができる (Lamberton and Lapeyre [4]). 以下では, 簡単のため, $X_0 = x$ $(\in \mathcal{R}_{++})$ としたときの式 (2.6) で表される X_t を X_t^x で表す.

この状態過程 $\mathcal{X}$ に対し, $p > 0$, $q > 0$, $\beta \geq 0$ を定数として, 終端報酬関数を

$$R(x) := px^\beta - q, \quad x \in \mathcal{R}_{++} \tag{2.7}$$

と定義し, 期待割引き報酬を目的関数とする最適停止問題:

$$v^*(x) := \sup_\tau E\left[e^{-\alpha\tau} R\left(X_\tau^x\right) 1_{\{\tau < +\infty\}}\right], \quad x \in \mathcal{R}_{++} \tag{2.8}$$

を考える. ただし, $\alpha > 0$ は割引き率であり, 式 (2.8) の右辺の sup は $\mathcal{X}$ に対する, すべての停止時刻 τ に関して取られる.

注 2.1

(1) $\beta = 0$ のとき, 上記の最適停止問題は以下の通りの自明な最適停止時刻を持つ, すなわち,

(+) $R(x) \equiv p - q \geq 0$ ならば, $\tau^* = 0$, a.s. は最適停止時刻であり, $v^*(x) \equiv p - q$;

(−) $R(x) \equiv p - q \leq 0$ ならば, $\tau^* = +\infty$, a.s. は最適停止時刻であり, $v^*(x) \equiv 0$.

(2) 停止時刻 τ まで単位時間当たりの費用率が課せられるとした, より一般的に思われる評価規範:

$$E\left[-\int_0^\tau e^{-\alpha s}(X_s^x)^\beta ds + e^{-\alpha\tau}\left\{p'(X_\tau^x)^\beta - q'\right\} 1_{\{\tau < +\infty\}}\right], \quad x \in \mathcal{R}_{++} \tag{2.9}$$

も, 式 (2.8) の型の等価な評価規範に帰着することができる. □

3 解析

$\mathcal{X}$ の無限小生成作用素 L を以下のように定義する: 2 回微分可能な関数 $w : \mathcal{R}_{++} \to \mathcal{R}$ に対して,

$$[Lw](x) := \lim_{h \downarrow 0+} \frac{e^{-\alpha h} E\left[w(X_h^x)\right] - w(x)}{h}, \quad x \in \mathcal{R}_{++}. \tag{3.1}$$

このとき, 伊藤の補題を用いれば,

$$[Lw](x) = -\alpha w(x) + \mu x w'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 w''(x) + \lambda \left(\int_{-1}^{0} w((1+u)x) dF_U(u) - w(x) \right) \tag{3.2}$$

を得る.

いま, 準線形な常微分方程式

$$[Lw](x) = 0, \quad x \in \mathcal{R}_{++} \tag{3.3}$$

を考える. a, b を定数として,

$$w(x) = a x^b, \quad x \in \mathcal{R}_{++} \tag{3.4}$$

の型の解を想定して, 式 (3.3) に代入すると,

$$a g(b) x^b = 0, \quad x \in \mathcal{R}_{++} \tag{3.5}$$

を得る, ただし, 関数 $g : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ は

$$g(b) := \frac{1}{2}\sigma^2 b^2 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) b - \alpha + \lambda \left(\int_{-1}^{0} (1+u)^b dF_U(u) - 1 \right), \quad b \in \mathcal{R} \tag{3.6}$$

で定義される.

仮定 3.1

(A1)

$$-\alpha + \mu + \lambda m_U < 0. \tag{3.7}$$

□

補題 3.1 (A1) を仮定する. このとき, 方程式 $g(b) = 0$ は 2 個の異なる実根を持ち, その内の大きい方を b^+ とすると,

$$b^+ > 1 \tag{3.8}$$

である. □

仮定 3. 2

(A2)

$$0 < \beta < b^+ \tag{3.9}$$

□

定理 3. 1 (A1), (A2) を仮定する. いま, 関数 $w^* : \mathcal{R}_{++} \to \mathcal{R}$ を

$$w^*(x) := \begin{cases} w(x) = a^* x^{b^+}, & 0 < x < x^*, \\ R(x) = px^\beta - q, & x^* \le x \end{cases} \tag{3.10}$$

で定義する, ただし, $a^* > 0$, $x^* > 0$ は連立方程式:

(Value Matching Condition)

$$w(x^*) = R(x^*); \tag{3.11}$$

(Smooth Pasting Condition)

$$w'(x^*) = R'(x^*) \tag{3.12}$$

の解として一意的に定まる定数で,

$$a^* = q\left(\frac{q}{p}\right)^{-\frac{b^+}{\beta}} \frac{\beta}{b^+ - \beta}\left(\frac{b^+}{b^+ - \beta}\right)^{-\frac{b^+}{\beta}}; \tag{3.13}$$

$$x^* = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{b^+}{b^+ - \beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} \tag{3.14}$$

で与えられる. このとき,

(S1) 関数 w^* は最適値関数である, すなわち,

$$v^*(x) = w^*(x), \quad x \in \mathcal{R}_{++}; \tag{3.15}$$

(S2) 最適停止領域 S^* と最適停止時刻 τ^* は以下で与えられる:

$$S^* := \{x \in \mathcal{R}_{++} : w^*(x) = R(x)\}; \tag{3.16}$$

$$\tau^* := \inf\{t \in \mathcal{R}_+ : X_t^x \in S\}. \tag{3.17}$$

証明の概略:

まず, 関数 $w^* : \mathcal{R}_{++} \to \mathcal{R}$ は, 以下の性質 (P1), (P2), (P3), (P4) を満足することを示す:

(P1) すべての $x \in \mathcal{R}_{++}$ に対して,

$$E\left[e^{-\alpha t}\left|w^*(X_t^x)\right|\right] < +\infty, \quad t \in \mathcal{R}_+, \tag{3.18}$$

$$E\left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha s}\left|[Lw^*](X_s^x)\right| ds\right] < +\infty; \tag{3.19}$$

(P2) すべての $x \in \mathcal{R}_{++}$ に対して,

$$[Lw^*](x) \leq 0; \tag{3.20}$$

(P3) すべての $x \in \mathcal{R}_{++}$ に対して,

$$w^*(x) \geq R(x); \tag{3.21}$$

(P4) すべての $x \in \mathcal{R}_{++}$ に対して, 不等式 (3.20), (3.21) のいずれか一方は等号で成立する.

次に, 関数 $w^* : \mathcal{R}_{++} \to \mathcal{R}$ を用いて, 確率過程 $\mathcal{M} = (M_t; t \in \mathcal{R}_+)$ を

$$M_t := e^{-\alpha t} w^*(X_t^x) - w^*(X_0^x) - \int_0^t e^{-\alpha s}[Lw^*](X_s^x) ds \tag{3.22}$$

で定義すれば, $\mathcal{M}$ は平均 0 のマルチンゲールとなり, $\mathcal{X}$ に対する任意の停止時刻 τ と任意の $t \in \mathcal{R}_+$ に対し, Dynkin の公式:

$$E\left[e^{-\alpha(\tau \wedge t)} w^*(X_{\tau \wedge t}^x)\right] = w^*(x) + E\left[\int_0^{\tau \wedge t} e^{-\alpha s}[Lw^*](X_s^x) ds\right] \tag{3.23}$$

が成立する. したがって, w^* の持つ性質 (P1) から,

$$E\left[e^{-\alpha(\tau \wedge t)} w^*(X_{\tau \wedge t}^x)\right] \leq w^*(x) \tag{3.24}$$

が成立する. 式 (3.24) の両辺の $\liminf_{t \to +\infty}$ を取れば, Fatou の補題より,

$$E\left[e^{-\alpha \tau} w^*(X_\tau^x) 1_{\{\tau < +\infty\}}\right] \leq w^*(x) \tag{3.25}$$

が成立する. 関数 w^* は性質 (P3) を持つから,

$$E\left[e^{-\alpha \tau} R(X_\tau^x) 1_{\{\tau < +\infty\}}\right] \leq E\left[e^{-\alpha \tau} w^*(X_\tau^x) 1_{\{\tau < +\infty\}}\right] \leq w^*(x). \tag{3.26}$$

一方, 式 (3.16), (3.17) で定義される停止時刻 τ^* に対しては,

$$E\left[e^{-\alpha(\tau^* \wedge t)} w^*(X_{\tau^* \wedge t}^x)\right] = w^*(x) \tag{3.27}$$

が成立する. また,

$$0 \leq w^*(X_{\tau^* \wedge t}) \leq R(x^*), \quad \text{a.s.} \tag{3.28}$$

が成立することから, 式 (3.27) の両辺の $\lim_{t\to+\infty}$ を取れば, Lebesgue の有界収束定理により,

$$E\left[e^{-\alpha\tau^*}w^*(X^x_{\tau^*})1_{\{\tau^*<+\infty\}}\right] = E\left[e^{-\alpha\tau^*}R(X^x_{\tau^*})1_{\{\tau^*<+\infty\}}\right] = w^*(x) \tag{3.29}$$

が成立する, ここで, $\tau^* < +\infty$ のとき,

$$w^*(X_{\tau^*}) = R(X_{\tau^*}) \tag{3.30}$$

が成立することを用いた. 式 (3.26), (3.29) より,

$$v^*(x) = w^*(x) = E\left[e^{-\alpha\tau^*}R(X^x_{\tau^*})1_{\{\tau^*<+\infty\}}\right] \tag{3.31}$$

を得る. □

定理 3. 1 より, 最適停止領域は, 式 (3.11) で定義される x^* を用いて,

$$S^* = [x^*, +\infty) \tag{3.32}$$

と表される.

定理 3. 1 の Smooth Pasting Condition は, Dixit [1], Dixit and Pindyck [2] において, 様々な不確実状況における最適な投資時期を決定するための, より限定された最適停止問題に対する最適値関数の解析的導出のために導入された条件であるが, その正当性と適用範囲について十分な検討がなされていなかったものである.

参考文献

[1] Dixit, A., *The Art of Smooth Pasting*, Harwood Academic Publishers, Switzerland, 1993.

[2] Dixit, A. and Pindyck, R., *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, New Jersey, 1994.

[3] Karatzas, I. and Shreve, S. E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, 1988.

[4] Lamberton, D. and Lapeyre, B. (Translated by Rabeau, N. and Mantion, F.), *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall, London, 1996.

[5] 辻村元男, Real Option Model による二酸化炭素排出権価格分析, 大阪大学大学院経済学研究科修士論文, 1998.