数理解析研究所講究録
1049 巻 1998 年 1-10

CAMPANATO 空間, MORREY 空間上の POINTWISE MULTIPLIERS

大阪教育大学 中井 英一 (EIICHI NAKAI)

1. はじめに

E, F を集合 X 上の函数空間とし, g を X 上の函数とする。

任意の $f\in E$ に対して $fg\in F$

となるとき, g を E から F への pointwise multiplier と呼ぶ。E から F への pointwise multiplier の全体を記号 $PWM(E,F)$ で表す。$PWM(E,E)$ を単に $PWM(E)$ と書く。

$1/p_1+1/p_3=1/p_2$ のとき, 次のことが知られている。

$$PWM(L^{p_1}(X),L^{p_2}(X))=L^{p_3}(X), \tag{1.1}$$

$$\|g\|_{\mathrm{Op}}=\|g\|_{L^{p_3}}. \tag{1.2}$$

ここで, $\|g\|_{\mathrm{Op}}$ は作用素ノルムである。

(1.1) において, $p_1=p_2=p$ のとき

$$PWM(L^p(X))=L^\infty(X) \quad \text{for} \quad 0<p\le\infty \tag{1.3}$$

である。しかし, L^p を BMO に代えると $X=\mathbb{R}^n$ or $\mathbb{T}^n$ の場合でも (1.3) は成り立たない。

ここでは $X=(X,d,\mu)$ を homogeneous 型空間とし, 函数空間としては BMO を特別な場合として含む Campanato 空間および Morrey 空間の場合の結果を述べる。

2. Homogeneous 型空間

次の条件を満たす擬距離 d と測度 μ を伴う空間 $X=(X,d,\mu)$ を homogeneous 型空間という。

$$d(x,y)\le K_1\,(d(x,z)+d(z,y)), \quad x,y,z\in X, \tag{2.1}$$

$$0<\mu(B(x,2r))\le K_2\,\mu(B(x,r))<\infty, \quad x\in X,\ r>0. \tag{2.2}$$

ただし $B(x,r)$ は中心 $x \in X$, 半径 $r>0$ の球である。すなわち

$$B(x,r)=\{y \in X : d(x,y)<r\}.$$

これらが点 x の近傍系の基をなす。

また

$$|d(x,z)-d(y,z)| \le K_3\,(d(x,z)+d(y,z))^{1-\theta} d(x,y)^{\theta} \tag{2.3}$$

を満たすとする。ここで $0<\theta \le 1$. d が距離ならば $K_1=K_3=\theta=1$ とできる。

$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{T}^n$ は通常の距離と Lebesgue 測度により homogeneous 型空間である。ここで述べるものは $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{T}^n$ の場合でも新しい結果である。

3. Campanato 空間, Morrey 空間

3.1. 定義. $\phi : X \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ とする。球 $B=B(x,r)$ に対して記号 $\phi(B)$ で $\phi(x,r)$ を表すことにする。

$1 \le p < \infty$ に対して Campanato 空間 $\mathcal{L}_{p,\phi}(X)$ を次の条件を満たす f の全体として定義する。

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}} = \sup_B \frac{1}{\phi(B)} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(x)-f_B|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} < +\infty.$$

ここで,

$$f_B = \frac{1}{\mu(B)} \int_B f(x)\, d\mu.$$

もし $p=1$ ならば $\mathcal{L}_{1,\phi}(X) = \mathrm{BMO}_\phi(X)$ と書く。さらに $\phi \equiv 1$ ならば $\mathcal{L}_{1,\phi}(X) = \mathrm{BMO}(X)$ である。

$0<p\le\infty$ に対して Morrey 空間 $L_{p,\phi}(X)$ を次の条件を満たす f の全体として定義する。

$$\|f\|_{p,\phi} = \sup_B \frac{1}{\phi(B)} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} < +\infty, \qquad 0<p<\infty,$$
$$\|f\|_{\infty,\phi} = \sup_B \frac{1}{\phi(B)} \operatorname*{esssup}_{x\in B} |f(x)| < +\infty, \qquad p=\infty.$$

もし $\phi(B)=\mu(B)^{-1/p}$ ならば $L_{p,\phi}(X)=L^p(X)$ である。

球 B_0 を固定すると, $\mathcal{L}_{p,\phi}(X)$ は $\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}} + |f_{B_0}|$ をノルムとして Banach 空間になる。別の球に固定してもそれらは同値なノルムになる。

$1\le p\le\infty$ のとき $L_{p,\phi}(X)$ は $\|f\|_{L_{p,\phi}}$ をノルムとして Banach 空間になる。

必要に応じて次の条件を使う。

$$\frac{1}{A_1} \le \frac{\phi(a,s)}{\phi(a,r)} \le A_1 \quad \text{for} \quad \frac{1}{2} \le \frac{s}{r} \le 2, \tag{3.1}$$

$$\frac{\phi(a,r)}{r^\theta} \le A_2 \frac{\phi(a,s)}{s^\theta} \quad \text{for} \quad 0 < s < r, \tag{3.2}$$

$$\int_0^r \mu(B(a,t))^{1/p} \frac{\phi(a,t)}{t}\, dt \le A_3\, \mu(B(a,r))^{1/p} \phi(a,r) \quad \text{for} \quad r > 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{A_4} \le \frac{\phi(a,r)}{\phi(b,r)} \le A_4 \quad \text{for} \quad d(a,b) \le r, \tag{3.4}$$

$$\phi(a,r) \le A_5 \phi(b,s) \quad \text{for} \quad B(a,r) \subset B(b,s), \tag{3.5}$$

$$\inf_{B(a,r)\subset B} \phi(a,r) = C_B > 0 \quad \text{for each ball } B. \tag{3.6}$$

また

$$\lambda_{p,\phi}(x,r) = \begin{cases} \phi(x,r)\mu(B(x,r))^{1/p}, & 0 < p < \infty, \\ \phi(x,r), & p = \infty \end{cases}$$

とおく。$\mathcal{L}_{p,\phi}(X)$, $L_{p,\phi}(X)$ の定義において$\lambda_{p,\phi}$ はつねに条件 (3.5) を満たすものとする。

3.2. $X = \mathbb{R}^n$ または $\mathbb{T}^n$ の場合.

$$X = \mathbb{R}^n, \quad d(x,y) = |x-y|, \quad \mu = \text{Lebesgue 測度}$$

の場合については, $\phi(x,r) = r^\alpha$ の形のとき, 次のことが知られている (Campanato [1, 2], Mayers [7] and Peetre [12])。

$$-n/p \le \alpha < 0 \implies \begin{cases} \mathcal{L}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{C} = L_{p,\phi}(\mathbb{R}^n) \\ (= L^p(\mathbb{R}^n) \text{ if } \alpha = -n/p), \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\alpha = 0 \implies \begin{cases} \mathcal{L}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n) \\ \supset L^\infty(\mathbb{R}^n) = L_{p,\phi}(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{3.8}$$

$$0 < \alpha \le 1 \implies \begin{cases} \mathcal{L}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{BMO}_\phi \\ = \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{3.9}$$

ここで $\mathcal{C}$ は定数函数の空間である。

また $X = \mathbb{T}^n$ の場合には (3.7) の代りに

$$-n/p \le \alpha < 0 \implies \begin{cases} \mathcal{L}_{p,\phi}(\mathbb{T}^n) = L_{p,\phi}(\mathbb{T}^n) \\ (= L^p(\mathbb{T}^n) \text{ if } \alpha = -n/p), \end{cases}$$

となる。(3.8), (3.9) は同じ形で成立する。Figure 1 は, この関係を図式化したものである。

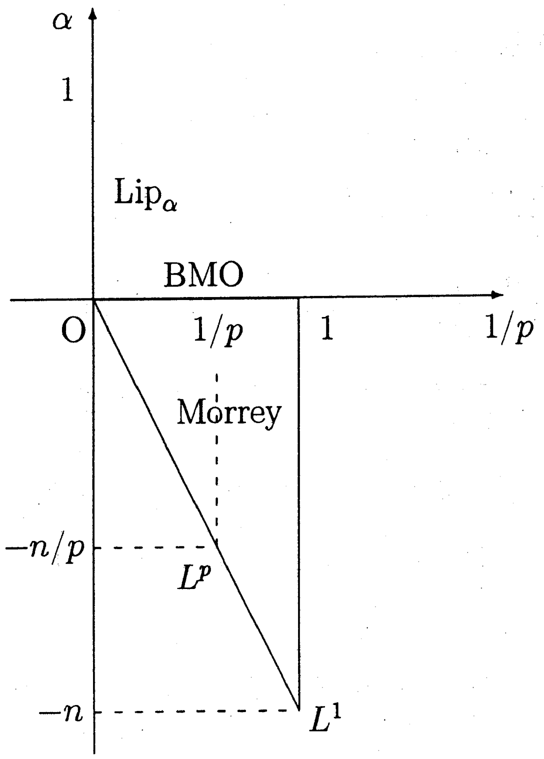

FIGURE 1. Campanato spaces $\mathcal{L}_{p,\phi}(\mathbb{T}^n)$, $\phi = r^\alpha$

第 4 象限においては点 $(1/p, \alpha)$ が Campanato 空間 $\mathcal{L}_{p,r^\alpha}(\mathbb{T}^n)$ を表す。この図に描かれている三角形の辺のうちで, 横軸と重なる太線部分以外, および三角形の内部では, Campanato 空間 $\mathcal{L}_{p,r^\alpha}(\mathbb{T}^n)$ が Morrey 空間 $L_{p,r^\alpha}(\mathbb{T}^n)$ と一致する。特に三角形の斜辺では, $L^p(\mathbb{T}^n)$ と一致する。

$\alpha \geq 0$ のとき Campanato 空間は p に依らない空間となる。$\alpha > 0$ のときは, 縦軸上の点 $(0, \alpha)$ で $\mathcal{L}_{p,r^\alpha}(\mathbb{T}^n)$ を表している。ここでは, $\mathcal{L}_{p,r^\alpha}(\mathbb{T}^n)$ は Lipschitz (Hölder) 空間 $\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{T}^n)$ と一致する。尚, 太線部分の点 $(1/p, 0)$ $(0 < 1/p \leq 1)$ はすべて $\mathrm{BMO}(\mathbb{T}^n)$ を表すものとする。

上にある函数空間ほど, また左にある函数空間ほど函数の局所的性質が良い。

Figure 2 は $\phi(r) = r^\alpha$ の場合に加えて,

$$\phi(r) = (\log(1/r))^{-m}, \quad \phi(r) = (\log(1/r))^m, \quad m > 0$$

の場合も書き入れたものである。この ϕ に対しては Campanato 空間は Morrey 空間とも Hölder 空間とも一致しない。

4. 以前の結果

Campanato 空間について知られている結果を述べる。

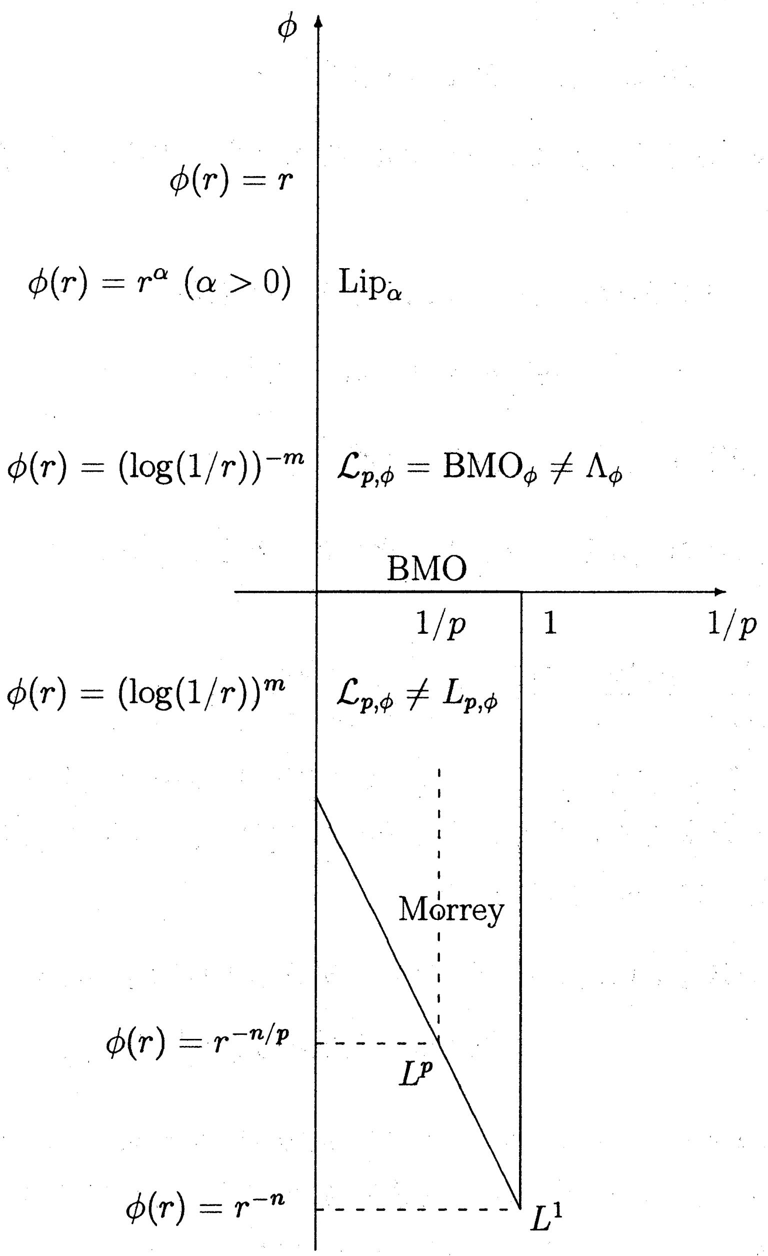

FIGURE 2. Campanato spaces $\mathcal{L}_{p,\phi}(\mathbb{T}^n)$

$x_0 \in X$ を固定し $B_0 = B(x_0, 1)$ とおく。$\mathcal{L}_{p,\phi}(X)$ のノルムは $\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}} + |f_{B_0}|$ とする。ϕ に対して

$$\Phi^*(a,r) = \int_1^{\max(2,d(x_0,a),r)} \frac{\phi(x_0,t)}{t}\,dt,$$

$$\Phi^{**}(a,r) = \int_r^{\max(2,d(x_0,a),r)} \frac{\phi(a,t)}{t}\,dt$$

とおく。同様にϕ_i に対して Φ_i^*, Φ_i^{**} を定義する $(i = 1, 2, 3)$ 。

定理 **4.1** (Nakai and Yabuta [11], 1997). もし $\mu(X)=\infty$ ならば

$$B(x_0,K_4r)\setminus B(x_0,r)\neq\emptyset,\quad r>r_0$$

を仮定する。$1\le p<\infty$ とし, ϕ は (3.1)-(3.4) を満たすとする。$\psi=\phi/(\Phi^*+\Phi^{**})$ とおくと

$$PWM(\mathcal{L}_{p,\phi}(X))=\mathcal{L}_{p,\psi}(X)\cap L^\infty(X),$$
$$\|g\|_{\mathrm{Op}}\sim\|g\|_{\mathcal{L}_{p,\psi}}+\|g\|_{L^\infty}.$$

$\mathcal{L}_{1,\phi}(X)=\mathrm{BMO}_\phi(X)$, $L_{1,\phi}(X)=L_\phi(X)$ と書く。

定理 **4.2** (Nakai [8], 1997). $\mu(X)=\infty$ のときには, ある $\varepsilon>0$ に対して $p=1+\varepsilon$ としたとき,

$$\int_{r_0}^r\left(\frac{\phi_2(x_0,t)}{\phi_1(x_0,t)}\right)^p\frac{\mu(B(x_0,t))}{t}\,dt\le A_6\left(\frac{\phi_2(x_0,r)}{\phi_1(x_0,r)}\right)^p\mu(B(x_0,r)),\quad r>r_0 \tag{4.1}$$

を仮定する。ϕ_1 がある p_1 $(1\le p_1<\infty)$ に対して (3.1)-(3.4) と (3.5) を満たし, ϕ_2 が (3.1), (3.4), (3.5) を満たすとする。また $(\Phi_2^*+\Phi_2^{**})/\phi_2\le C(\Phi_1^*+\Phi_1^{**})/\phi_1$ とする。このとき$\phi_3=\phi_2/(\Phi_1^*+\Phi_1^{**})$ に対して,

$$PWM(\mathrm{BMO}_{\phi_1}(X),\mathrm{BMO}_{\phi_2}(X))=\mathrm{BMO}_{\phi_3}(X)\cap L_{\phi_2/\phi_1}(X),$$
$$\|g\|_{\mathrm{Op}}\sim\|g\|_{\mathrm{BMO}_{\phi_3}}+\|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1}}.$$

定理 **4.3** (Nakai [8], 1997). $1<p_2<p_1<\infty$, $p_1p_2\ge p_1+p_2$ とする。ϕ_1, p_1 が (3.1) - (3.4) を満たし, ϕ_2 が (3.1), (3.4) を満たすとする。さらに $(\Phi_2^*+\Phi_2^{**})/\phi_2\le C(\Phi_1^*+\Phi_1^{**})/\phi_1$ とする。もし $\mu(X)=\infty$ のときには, $p=p_2$ に対して (4.1) が成り立つと仮定する。$\phi_3=\phi_2/(\Phi_1^*+\Phi_1^{**})$ が (3.5) を満たせば

$$PWM(\mathcal{L}_{p_1,\phi_1}(X),\mathcal{L}_{p_2,\phi_2}(X))=\mathrm{BMO}_{\phi_3}(X)\cap L_{\phi_2/\phi_1}(X),$$
$$\|g\|_{\mathrm{Op}}\sim\|g\|_{\mathrm{BMO}_{\phi_3}}+\|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1}}.$$

これらの定理は homogeneous 型空間上の一般の Campanato 空間に適用できるが, 特に Figure 2 に限って考えると, 定理 4.1 はすべての Campanato 空間に適用できる。定理 4.2 は BMO を含めてこれより良い Campanato 空間に適用できる。定理 4.3 は$\phi_i(r)=(\log(1/r))^{m_i}$ $(-1<m_1<m_2\le m_1+1<\infty)$, $1<p_2<p_1<\infty$, $p_1p_2\ge p_1+p_2$ の場合に適用できる。

5. 結果

まず Morrey 空間についての結果を求め, これを利用して Campanato 空間について今まで知られていない場合を求める。

定理 5.1. $0 < p_2 < p_1 < \infty$, $1/p_1 + 1/p_3 = 1/p_2$ とする。ϕ_1, ϕ_2 がともに (3.1), (3.4) を満たすとする。${\phi_2}^{p_2/p_1}/\phi_1$ が (3.5) を満たし, ϕ_2/ϕ_1 が (3.6) を満たせば,

$$PWM(L_{p_1,\phi_1}(X), L_{p_2,\phi_2}(X)) = L_{p_3,\phi_2/\phi_1}(X),$$
$$\|g\|_{\mathrm{Op}} \sim \|g\|_{L_{p_3,\phi_2/\phi_1}}.$$

$p_1 = p_2$ の場合には, さらに ϕ_1 が (3.6) を満たせば, 同様の結果が得られる。
${\phi_2}^{p_2/p_1}/\phi_1$ が (3.5) を満たさなくても, 次が成り立つ。

$$PWM(L_{p_1,\phi_1}(X), L_{p_2,\phi_2}(X)) \supset L_{p_3,\phi_2/\phi_1}(X).$$

${\phi_2}^{p_2/p_1}/\phi_1$ が (3.5) を満たさない場合で, 結果が成り立たない例がある。

Proof. Hölder の不等式により

$$\begin{aligned}\frac{1}{\phi_2(B)}&\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B |f(x)g(x)|^{p_2}\,d\mu(x)\right)^{1/p_2}\\ &\le \frac{1}{\phi_1(B)}\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B |f(x)|^{p_1}\,d\mu(x)\right)^{1/p_1}\\ &\qquad\times \frac{1}{\phi_3(B)}\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B |g(x)|^{p_3}\,d\mu(x)\right)^{1/p_3}.\end{aligned}$$

よって

$$\|fg\|_{L_{p_2,\phi_2}} \le \|f\|_{L_{p_1,\phi_1}}\|g\|_{L_{p_3,\phi_2/\phi_1}}.$$

次に任意の $g \in L_{p_3,\phi_2/\phi_1}(X)$ に対して

$$\|fg\|_{L_{p_2,\phi_2}} \ge C\|f\|_{L_{p_1,\phi_1}}\|g\|_{L_{p_3,\phi_2/\phi_1}}$$

を満たす $f \in L_{p_1,\phi_1}(X)$ が存在することを示す。このとき${\phi_2}^{p_2/p_1}/\phi_1$ が (3.5) を満たすことを用いる。 □

Campanato 空間が Morrey 空間に直接一致するための条件は

$$\Phi^* + \Phi^{**} \le C\phi$$

であり, 定数を法として一致するための条件は

$$\int_r^\infty \frac{\phi(a,t)}{t}\,dt \le C\phi(a,t)$$

である (Nakai [10], preprint)。これを用いて次の結果が得られる。

系 **5.1.** $1 \le p_2 < p_1 < \infty$, $1/p_1 + 1/p_3 = 1/p_2$ とする。定理 *5.1* の仮定に加えて,

$$\Phi_i^* + \Phi_i^{**} \le C_i\phi_i \quad (i = 1,2,3)$$

を満たせば,

$$PWM(\mathcal{L}_{p_1,\phi_1}(X), \mathcal{L}_{p_2,\phi_2}(X)) = \mathcal{L}_{p_3,\phi_2/\phi_1}(X),$$
$$\|g\|_{\mathrm{Op}} \sim \|g\|_{\mathcal{L}_{p_3,\phi_2/\phi_1}} + |g_{B_0}|.$$

定理 **5.2.** $\mu(X) = +\infty$, $1 \le p_2 < p_1 < \infty$, $1/p_1 + 1/p_3 = 1/p_2$ とする。定理 *5.1* の仮定に加えて,

$$\int_r^\infty \frac{\phi_2(a,t)}{t}\,dt \le C\phi_2(a,t)$$

を満たせば,

$$PWM(\mathcal{L}_{p_1,\phi_1}(X), \mathcal{L}_{p_2,\phi_2}(X)) = L_{p_3,\phi_2/\phi_1}(X) \cap L_{p_2,\phi_2}(X),$$
$$\|g\|_{\mathrm{Op}} \sim \|g\|_{L_{p_3,\phi_2/\phi_1}} + \|g\|_{L_{p_2,\phi_2}}.$$

6. Multication algebra

最後に, Campanato 空間が multiplication algebra になるための必要十分条件について述べる。

任意の $f, g \in \mathcal{L}_{p,\phi}(X)$ に対して, $fg \in \mathcal{L}_{p,\phi}(X)$ かつ

$$\|fg\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}} \le C\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}}\|g\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}}$$

であるとき Campanato 空間 $\mathcal{L}_{p,\phi}(X)$ は multiplication algebra であるという。

$\mathrm{C}^0(X)$ を $\|f\|_{L^\infty}$ をノルムとする有界な一様連続函数の全体からなる空間とする。

Besov 空間および Triebel-Lizorkin 空間については次のことが知られている。

定理 **6.1.** (Triebel [13], 1978) 次の各々は同値である。

1. $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ は *multiplication algebra* である。
2. $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \subset C^0(\mathbb{R}^n)$. (連続な埋め込み)
3. *either* $0 < p \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $s > n/p$
   or $0 < p \le \infty$, $0 < q \le 1$, $s = n/p$.

定理 6.2. (Franke [5], 1986) 次の各々は同値である。

1. $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ は *multiplication algebra* である。
2. $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \subset C^0(\mathbb{R}^n)$.（連続な埋め込み）
3. *either* $0 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$, $s > n/p$
   or $0 < p \le 1$, $0 < q \le \infty$, $s = n/p$.

Campanato 空間については次の結果が得られる。$\phi = \phi(r)$ の場合には上の結果と同じ形の定理が得られるが, 一般の ϕ についてはそうではない。

定理 6.3. $\mu(X) = \infty$ ならば (4.1) を仮定する。$1 \le p < \infty$ とし, $\phi = \phi(r)$ が (3.1)–(3.3) を満たすとき, 次の各々は同値である。

1. $\mathcal{L}_{p,\phi}(X)$ は *multiplication algebra* である。
2. $\mathcal{L}_{p,\phi}(X) \subset \mathrm{C}^0(X)$.（連続な埋め込み）
3. $\Phi^* + \Phi^{**} \le C$.

定理 6.4. ϕ が (3.1)–(3.4) を満たすとき,

$$1 \Leftrightarrow 3 \Leftarrow 2.$$

実際, multiplication algebra であってしかも不連続な函数を含む Campanato 空間 $\mathcal{L}_{p,\phi}(X)$ が存在する。

証明には, 定理 4.1 と以下の補題や定理を使う。

補題 6.1 (Nakai and Yabuta [11], 1997). $1 \le p < \infty$ とし ϕ が (3.1) – (3.4) を満たすとすると,

$$f_a(x) = \int_{d(a,x)}^1 \frac{\phi(a,t)}{t}\,dt \tag{6.1}$$

は任意の $a \in X$ に対して $\mathcal{L}_{p,\phi}(X)$ の元であり, a に依らない定数 $C > 0$ が存在して, $\|f_a\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}} \le C$ を満たす。

補題 6.2 (Nakai [8], 1997). $1 \le p < \infty$ とし, ϕ は (3.1) を満たすとすると,

$$\mathcal{L}_{p,\phi}(X) \subset L_{p,\Phi^*+\Phi^{**}}(X) \quad \textit{and} \quad \|f\|_{L_{p,\Phi^*+\Phi^{**}}} \le C\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}}.$$

定理 6.5. ϕ は (3.1) を満たすとする。$x \in X$ において

$$\int_0^{d(x,y)} \frac{\phi(x,t) + \phi(y,t)}{t}\,dt \to 0 \quad as \quad d(x,y) \to 0 \tag{6.2}$$

ならば, 任意の $f \in \mathcal{L}_{p,\phi}(X)$ は $x \in X$ において連続である。逆に ϕ が (3.1) - (3.4) を満たすとき(6.2) が成り立たなければ, $x \in X$ において不連続な $f \in \mathcal{L}_{p,\phi}(X)$ が存在する。

定理 6.3, 6.4 の証明の概略を述べる。

定理 4.1 により, $\mathcal{L}_{p,\phi}(X)$ が multiplication algebra であることは

$$\mathcal{L}_{p,\phi}(X) \subset PWM(\mathcal{L}_{p,\phi}(X)) = \mathcal{L}_{p,\psi}(X) \cap L^\infty(X), \tag{6.3}$$

$$C\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}} \geq \|f\|_{\mathrm{Op}} \sim \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\psi}} + \|f\|_{L^\infty}. \tag{6.4}$$

であることと同値である。ただし$\psi = \phi/(\Phi^* + \Phi^{**})$.

(6.4) に補題 6.1 の f_a を代入して $\|f_a\|_{L^\infty} \leq C$. これより$\Phi^* + \Phi^{**} \leq C$ が得られる。逆に$\Phi^* + \Phi^{**} \leq C$ のとき$\psi \sim \phi$ かつ $L_{p,\Phi^*+\Phi^{**}}(X) = L^\infty(X)$ であり, 補題 6.2 より(6.3) および (6.4) が得られる。

また$\mathcal{L}_{p,\phi}(X) \subset \mathrm{C}^0(X) \subset L^\infty(X)$ のとき $\|f_a\|_{L^\infty} \leq C$. これより$\Phi^* + \Phi^{**} \leq C$ が得られる。逆に $\phi = \phi(r)$ のときには$\Phi^* + \Phi^{**} \leq C$ から (6.2) が得られるが, 一般には反例がある。

References

[1] S. Campanato, *Proprietà di Hölderiantà di alcune classi funzioni*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **17** (1963), 175–188.

[2] ______ *Proprietà di una famiglia di spazi funzionali*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **18** (1964), 137–160.

[3] R. R. Coifman and G. Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogenes*, Lecture Notes in Math., vol.242, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1971.

[4] ______ *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), 569–645.

[5] J. Franke, *On the spaces F^s_{pq} of Triebel-Lizorkin type: Pointwise multipliers and spaces on domains*, Math. Nachr., **125** (1986), 29–68.

[6] F. John and L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 415–426.

[7] N. G. Mayers, *Mean oscillation over cubes and Hölder continuity*, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 717–721.

[8] E. Nakai, *Pointwise multipliers on weighted BMO spaces*, Studia Math., **125** (1997), 35–56.

[9] ______ *Pointwise multipliers on the Morrey Spaces*, Mem. Osaka Kyoiku Univ. III Natur. Sci. Appl. Sci., **46** (1997), 1–11.

[10] ______ *The Campanato, Morrey and Hölder spaces on spaces of homogeneous type*, preprint

[11] E. Nakai and K. Yabuta, *Pointwise multipliers for functions of weighted bounded mean oscillation on spaces of homogeneous type*, Math. Japon. **46** (1997), 15–28.

[12] J. Peetre, *On the theory of $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ spaces*, J. Funct. Anal. **4** (1969), 71–87.

[13] H. Triebel, *Spaces of Besov-Hardy-Sobolev Type*, Teubner-Texte Math. 15, Teubner, Leipzig, 1978.