数理解析研究所講究録
1049巻 1998年 118-128

Fiber の中の trivial points の位相的性質

新潟大学大学院　自然科学研究科　　石井　隆 (TAKASHI ISHII)

1　序論

D. Suárez [9] は単位開円板 D上の有界正則関数からなる関数環 H^{∞} の極大イデアル空間 $M(H^{\infty})$ の trivial points の集合Γが totally disconnected (以下、T.D. と略す。) であることを証明した。さらに Γ が extremely disconnected (以下、E.D. と略す。) までいえるかという問題を提起している。この問題に対して、T. Ishii and K. Izuchi[10] により、Γ が E.D. ではないことが証明され、これについては、関数環論研究集会（97年、防衛大）で報告したので、ここでは、とくに、Γ をひとつの Fiber の中に制限した集合$\Gamma_{\lambda}(\equiv \Gamma \cap M_{\lambda})$ について報告する。

2　準備と背景

$D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, $H^{\infty} = \{D$ 上の有界正則関数全体 $\}$

$M(H^{\infty}) = \{$ 恒等的に 0 でない H^{∞} 上の複素準同型写像全体 $\}$ とする。

$f \in H^{\infty}$ に対して、その Gelfand 変換 $\hat{f}$ は

$$\hat{f}(m) = m(f) \quad (m \in M(H^{\infty}))$$

と定義される。このとき、$\hat{f}$ は $M(H^{\infty})$ 上の関数で weak *-topology に関して連続関数になる。また、$M(H^{\infty})$ は compact Hausdorff 空間であり、$\hat{H}^{\infty} = \{\hat{f}; f \in H^{\infty}\}$ は $M(H^{\infty})$ 上で定義された関数環となる。 $H^{\infty} \cong \hat{H}^{\infty}$ (isometry isomorphism) であることが容易にわ

かり、H^∞ と $\hat{H}^\infty$ を同一視して考える。また、$M(L^\infty) \subset M(H^\infty)$ であり、H^∞ の Silov boundary は $M(L^\infty)$ と同一視できる。

さて、Γ の位相構造を調べるにあたり、いくつかの定義を設ける。$x, y \in M(H^\infty)$ に対して pseudo hyperbolic distance を

$$\rho(x,y) = \sup\{|f(y)|; f \in H^\infty, \|f\|_\infty = 1, f(x) = 0\}.$$

と定義する。

$P(x) = \{y \in M(H^\infty); \rho(x,y) < 1\}$　と定義して $P(x)$ を Gleason part と呼ぶ。

$x \in M(H^\infty)$ の点が trivial point であるとは、$P(x) = \{x\}$ となるときをいう。そして、$\Gamma \equiv \{x \in M(H^\infty); P(x) = \{x\}\}$ と定義する。Γ は $M(H^\infty)$ の closed set になっている [7]。また, $M(L^\infty) \subset \Gamma$ [4,p.402] である。

定理 2.1 ([3, p.18]) $M(L^\infty)$ は *E.D.* である。すなわち、任意の開集合の閉包は開集合である。

そこで、

問題：$\Gamma(\supset M(L^\infty))$ は E.D. か？

序論でも触れたように、これは D. Suárez によって提起されたものであるが、D. Suárez は Γ が T.D. すなわち、Γ が closed-open basis を持つことを証明している。($M(H^\infty)$ は compact Hausdorff 空間だから、E.D. ならば T.D. であるが、逆は、成立しない。) この問題に対して、我々は、否定的解答を得た。

定理 2.2 Γ は *E.D.* ではない。

ここで、この定理の証明で重要な役割を担う集合を定義しておく。$\lambda \in \partial D$ に対して、

$M_\lambda \equiv \{x \in M(H^\infty)\backslash D; z(x) = \lambda\}$, $\qquad \Gamma_\lambda \equiv \{x \in \Gamma; z(x) = \lambda\} = M_\lambda \cap \Gamma$

(注) M_λ を $\lambda \in \partial D$ における fiber という。M_λ は $M(H^\infty)$ の closed set であるから、Γ_λ は Γ の closed set である。

$\mathcal{I}_\lambda \equiv \{q;$ inner function で $\partial D\backslash\{\lambda\}$ に連続拡張可能なもの $\}$

$A_\lambda = \{x \in M(H^\infty)\backslash D; |q(x)| < 1$ for some $q \in \mathcal{I}_\lambda\}$

(注) A_λ は $M(H^\infty)\backslash D$ の open set である。$A_\lambda \cap M_\zeta = \emptyset(\forall\zeta \in \partial D, \zeta \neq \lambda)$, $A_\lambda \subset M(H^\infty)\backslash D = \bigcup_{|\zeta|=1} M_\zeta$ であることから、$A_\lambda \subset M_\lambda$ である。

補題 2.3 $\{z_n\}_n \subset D$, $z_n \to \lambda$, $\sum_{n=1}^\infty (1-|z_n|) < \infty$, とする。
このとき、$\forall x \in \overline{\{z_n\}_n}\backslash\{z_n\}_n$ に対して、$\overline{P(x)} \subset A_\lambda$ である。

証明 $\{p_n\} \subset \mathbb{N}$ $p_n \to \infty$, $\sum_{n=1}^\infty p_n(1-|z_n|) < \infty$ を満たす自然数列がとれる。そこで、

$$B(z) = \prod_{n=1}^\infty \left(\frac{-\overline{z}_n}{|z_n|}\frac{z-z_n}{1-\overline{z}_n z}\right)^{p_n}, \quad z \in D$$

と定義すると、$B(z)$ は広義一様収束し、Blaschke product となる。このとき、

$B(z) = B_1(z)B_2(z)\cdots B_j(z)\cdots$

$$(\text{ここで、} B_j(x) = 0 \quad \text{for} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in \overline{\{z_n\}_n}\backslash\{z_n\}_n)$$

と分解できる。このとき、$B = 0$ *on* $\overline{P(x)}$ for $\forall x \in \overline{\{z_n\}_n}\backslash\{z_n\}_n$ となる。([7,Lemma 2.3]) 従って、$\overline{P(x)} \subset A_\lambda$ が示された。

補題 2.4 (i) $A_\lambda \cap \Gamma_\lambda$ は、Γ の 空でない open subset である。

(ii) $A_\lambda \cap \Gamma_\lambda$ は Γ_λ の proper subset である。

証明 (i) [1] より、$\overline{P(x)} \cap \Gamma \neq \emptyset \quad (\forall x \in M(H^\infty))$ である。

一方、補題 2.3 より、$\overline{P(x)} \subset A_\lambda \quad (\forall x \in \overline{\{z_n\}_n} \backslash \{z_n\}_n.)$ したがって、$A_\lambda \cap \Gamma_\lambda = A_\lambda \cap (M_\lambda \cap \Gamma) = (A_\lambda \cap M_\lambda) \cap \Gamma = A_\lambda \cap \Gamma \neq \emptyset$

また、$A_\lambda \cap \Gamma$ は Γ の open set であるから、$A_\lambda \cap \Gamma_\lambda$ は Γ の open set である。

(ii) 任意の inner function q に対して、$|q(x)| = 1 \quad (\forall x \in M(L^\infty))$ であるから、$x \notin A_\lambda$ である。よって、$A_\lambda \cap M(L^\infty) = \emptyset$ であるが、一方、$M(L^\infty) \subset \Gamma$ であることより、$A_\lambda \cap \Gamma \subsetneqq \Gamma$ となる。すなわち、$A_\lambda \cap \Gamma_\lambda = A_\lambda \cap (M_\lambda \cap \Gamma) = M_\lambda \cap (A_\lambda \cap \Gamma) \subsetneqq M_\lambda \cap \Gamma = \Gamma_\lambda$ 。□

定理 2.5 $\overline{A_\lambda \cap \Gamma_\lambda} = \Gamma_\lambda$

証明$\overline{A_\lambda \cap \Gamma_\lambda} \supset \Gamma_\lambda$ を示せばよい。$x_0 \in \Gamma_\lambda, \quad x_0$ の近傍 V を任意にとる。

この V に対して、さらに、次のような近傍がとれる。

$$x_0 \in W \equiv \left\{ x \in M(H^\infty); \sum_{j=0}^{k} |f_j(x) - f_j(x_0)| \leq \varepsilon \right\} \subset V$$

ここで、$f_0(z) = z$ である。 corona 定理より、次のようなネットがとれる。

$$\{z_\alpha\}_\alpha \in W \cap D \quad \text{such that} \quad z_\alpha \to x_0.$$

$P(x_0) = \{x_0\}$ なので、 $\forall f \in H^\infty$ and $0 < \forall r < 1$ に対して、

$$f \circ L_{z_\alpha} \to_\alpha f(x_0)(\text{const.}) \text{ uniformly on } D_r = \{z \in D; |z| \leq r\},$$

したがって、

$$\sum_{j=0}^{k} |f_j \circ L_{z_\alpha} - f_j(x_0)| \underset{\alpha}{\to} 0 \quad \text{uniformly on } D_r.$$

$f_0(z) = z$ としておいたから、interpolating sequence $\{w_n\}_n \subset \{z_\alpha\}_\alpha$ をとって、$w_n \to \lambda$ とできて、

$$\sum_{j=0}^{k} |f_j \circ L_{w_n} - f_j(x_0)| \to 0 \quad \text{uniformly on } D_r \text{ as } n \to \infty.$$

となる。$y \in \overline{\{w_n\}_n} \backslash \{w_n\}_n$ とすると、$P(y) \neq \{y\}$ であり、$P(y) \subset M_\lambda$ である。よって、

$f_j \circ L_y = f_j(x_0) \quad \text{on} \quad D_r \quad (0 \leq \forall j \leq k.)$ $f_j \circ L_y \in H^\infty$ なので、$f_j \circ L_y = f_j(x_0) \quad \text{on} \quad D$

すなわち、$f_j = f_j(x_0) \quad \text{on} \quad P(y)$

したがって、$f_j = f_j(x_0) \quad \text{on} \quad \overline{P(y)} \quad (0 \leq \forall j \leq k.)$

よって、x_0 の近傍のとり方から、$\overline{P(y)} \subset V$ 。また、補題 2.3. より、$\overline{P(y)} \subset A_\lambda$.

ここで、[1, cororally] より、$\overline{P(y)} \cap \Gamma \neq \emptyset \quad (\forall y \in M(H^\infty))$ である。以上より、$(A_\lambda \cap \Gamma_\lambda) \cap V = (A_\lambda \cap \Gamma) \cap V \neq \emptyset$.

x_0 の任意の近傍が $A_\lambda \cap \Gamma_\lambda$ と共有点をもつので、$x_0 \in \overline{A_\lambda \cap \Gamma_\lambda}$ 。□

定理 2.2 の証明 Γ_λ は Γ の closed set なので、$\Gamma \backslash \Gamma_\lambda$ は Γ の open set である。$A_\lambda \cap \Gamma_\lambda, \Gamma \backslash \Gamma_\lambda$ はどちらも Γ の空でない proper な open set である。このとき、定理 2.5. より、

$\overline{A_\lambda \cap \Gamma_\lambda} \cap \overline{\Gamma \backslash \Gamma_\lambda} = \Gamma_\lambda \cap \overline{\Gamma \backslash \Gamma_\lambda} \neq \emptyset$. 従って、$\overline{A_\lambda \cap \Gamma_\lambda}, \overline{\Gamma \backslash \Gamma_\lambda}$ の少なくともどちらか一方は open set ではない。すなわち、Γ は E.D. ではない。□

3　Γ_λ の位相構造

一般に、位相空間 X が T.D. であるとき、その部分空間は T.D. である。このことは、E.D. については成立しない。例えば、$M(L^\infty)$ は E.D. であるが、$M(L^\infty)$ とひとつの fiber M_λ との共通部分 $M(L^\infty) \cap M_\lambda$ は E.D. ではないことが知られている [6, p171]。従って、$\Gamma_\lambda (\equiv \Gamma \cap M_\lambda)$ が E.D. であるか否かは興味深い。

定理 3.1 Γ_λ は *E.D.* ではない。

これを証明するために、準備から始める。$\{z_n\}_n \subset D$ such that

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{n:n\neq k} \left|\frac{z_n - z_k}{1-\overline{z}_k z_n}\right| = 1,$$

を考え、これを sparse sequence という。ここでは、$z_n \to \lambda(\in \partial D)$ as $n \to \infty$. となるものを考える。そして、b を $\{z_n\}_n$ を零点に持つ Blaschke product すると、$b \in \mathcal{I}_\lambda$ となる。そして、[5] より

$$(3-1) \qquad \{x \in M(H^\infty)\backslash D; |b(x)| < 1\} = \bigcup \left\{P(x); x \in \overline{\{z_n\}_n}\backslash\{z_n\}_n\right\}$$

であることが知られている。また、$b(M(L^\infty) \cap \Gamma_\lambda) = b(\Gamma_\lambda) = \partial D$. そこで、次のような集合を定義する。

$$M_{\lambda,\zeta} = \{x \in M_\lambda\ ;\ b(x) = \zeta, \zeta \in \partial D\} \qquad \Gamma_{\lambda,\zeta} = M_{\lambda,\zeta} \cap \Gamma_\lambda.$$

このとき、$\Gamma_{\lambda,\zeta}$ は空でない Γ_λ の closed subset である。また、$\Gamma_\lambda = \bigcup\{\Gamma_{\lambda,\zeta}; \zeta \in \partial D\}$ であり、$\Gamma_{\lambda,\zeta_1} \cap \Gamma_{\lambda,\zeta_2} = \emptyset\ (\zeta_1 \neq \zeta_2)$ である。

$$(3-2) \qquad \mathcal{I}_{\lambda,\zeta} = \{q \in \mathcal{I}_\lambda; |q| = 1 \text{ on } M_{\lambda,\xi} \text{ for every } \xi \in \partial D, \xi \neq \zeta\}$$

さらに、

$$(3-3) \qquad A_{\lambda,\zeta} = \{x \in M_\lambda; |q(x)| < 1 \text{ for some } q \in \mathcal{I}_{\lambda,\zeta}\}.$$

とすると、$A_{\lambda,\zeta} \subset M_{\lambda,\zeta}$、$A_{\lambda,\zeta}$は M_λ の open subset であり、従って、

$$(3-4) \qquad A_{\lambda,\zeta} \cap \Gamma_{\lambda,\zeta} \text{ は、}\Gamma_\lambda\text{の open subset である。}$$

補題 3.2 $\{w_n\}_n$ を $w_n \to \lambda$ *and* $b(w_n) \to \zeta(\in \partial D)$ *as* $n \to \infty$. となる sparse sequance とする。このとき、 Blaschke product $B \in \mathcal{I}_{\lambda,\zeta}$ で $B = 0$ *on* $P(y)(\forall y \in \overline{\{w_n\}_n}\backslash\{w_n\})$ となるものが存在する。従って、 $\overline{P(y)} \subset A_{\lambda,\zeta}\,(\forall y \in \overline{\{w_n\}_n}\backslash\{w_n\})$ となる。

証明 $w_n \to \lambda$, $b(w_n) \to \zeta$ as $n \to \infty$, であるから、

$$z(y) = \lambda \text{ and } b(y) = \zeta \text{ for } y \in \overline{\{w_n\}_n}\backslash\{w_n\}_n.$$

$\|b\|_\infty = 1$ より、$z = \lambda$ and $b = \zeta$ on $P(y)$ for $y \in \overline{\{w_n\}_n}\backslash\{w_n\}_n$. 従って、

$$(3-5) \qquad P(y) \subset M_{\lambda,\zeta} \text{ for every } y \in \overline{\{w_n\}_n}\backslash\{w_n\}_n.$$

q を $\{w_n\}_n$ を零点に持つ Blaschke product とする。(3-1) より, 次のことが成立する。

$$\{y \in M(H^\infty)\backslash D; |q| < 1\} = \bigcup\left\{P(y)\,; y \in \overline{\{w_n\}_n}\backslash\{w_n\}_n\right\}.$$

従って、(3-5) より,

$$(3-6) \qquad |q| = 1 \text{ on } M(H^\infty)\setminus M_{\lambda,\zeta}.$$

そこで、$u = (|z+\lambda| + |b+\zeta|)/4$ on $M(H^\infty)$. とおくと、

$$(3-7) \qquad M_{\lambda,\zeta} = \{x \in M(H^\infty)\,; u(x) = 1\}.$$

となる。$\{r_n\}_n \subset \mathbb{N}$ を $0 < r_n < 1$, $r_n \to 1$ となる自然数列として、$D_n = \{z \in D;\ u(z) \le r_n\}$. とおくと、$D_n \subset D_{n+1}$. (3-7) と corona 定理より,

$$(3-8) \qquad M(H^\infty)\backslash M_{\lambda,\zeta} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\overline{D_n}\backslash D_n).$$

$\{\varepsilon_n\}_n \subset \mathbb{N}$ を

$$(3-9) \qquad 0 < \varepsilon_n < 1 \text{ and } \prod_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n > 0.$$

を満たす自然数列とする。q_k を次で定義する。

$$q_k(z) = \prod_{j=k}^{\infty} \frac{-\overline{w_j}}{|w_j|} \frac{z - w_j}{1 - \overline{w_j} z}, \quad z \in D$$

各 n に対して， 次のような整数 N_n がとれることを示す。

$$(3-10) \qquad |q_{N_n}| \geq \varepsilon_n \text{ on } D_n.$$

(3-6) と (3-8) により，

$|q| = 1 \text{ on } \overline{D}_n \backslash D_n$

そして、D の compact subset E_n で

$$(3-12) \qquad |q| \geq \varepsilon_n \text{ on } \overline{D}_n \backslash E_n.$$

となるものがとれる。$|q_k| \to 1$(uniformly on E_n as $k \to \infty$) であるから、

$$(3-13) \qquad |q_{N_n}| \geq \varepsilon_n \text{ on } E_n.$$

を満たす整数 N_n がとれる、。(3-12) と (3-13) より，(3-10) を得る。N_n をとりなおせば、$N_n < N_{n+1}$ $(\forall n \subset \mathbb{N})$ としてよい。そして、

$$(3-14) \qquad B = \prod_{n=1}^{\infty} q_{N_n}$$

は Blaschke product となる。しかも、

$$(3-15) \qquad B \in \mathcal{I}_{\lambda,\zeta}.$$

であることを示そう。

$$(3-16) \qquad |B| = 1 \text{ on } \overline{D}_n \backslash D_n (\forall n \in \mathbb{N})$$

を示せば、(3-2),(3-8) より、(3-15) を得るから、(3-16) を示す。$0 < \varepsilon < 1$ を任意にとる。(3-9) より, 正整数 $p (\geq n)$ で、$\varepsilon \leq \prod_{j=p}^{\infty} \varepsilon_j$ であるものがとれる。(3-10) より、$|\prod_{j=p}^{\infty} q_{N_j}| \geq \varepsilon$ on D_n であるから $\left|\prod_{j=p}^{\infty} q_{N_j}\right| \geq \varepsilon$ on $\overline{D}_n \backslash D_n$ よって、(3-11) より、$|B| = \left|\prod_{j=p}^{\infty} q_{N_j}\right| \geq \varepsilon$ on $\overline{D}_n \backslash D_n$ すなわち、(3-15) がわかる。最後に、$y \in \overline{\{w_n\}_n} \backslash \{w_n\}_n$ とする。$q(y) = 0$ なので、(3-5) より、$P(y) \subset M_{\lambda,\zeta}$ である。$|q_{N_n}| = |q|$ on $M(H^\infty) \backslash D$ であることから、(3-14) より、$B = 0$ on $\overline{P(y)}$ 従って、(3-3) と (3-15) より、$\overline{P(y)} \subset A_{\lambda,\zeta}$ が示された。□

定理 3.3 (i) $\overline{A_{\lambda,\zeta} \cap \Gamma_{\lambda,\zeta}} = \Gamma_{\lambda,\zeta} (\forall \zeta \in \partial D)$ である。

(ii) Γ_λ は *E.D.* ではない。

証明 $x_0 \in \Gamma_{\lambda,\zeta}$,V を $x_0 \in M(H^\infty)$ の任意の近傍とする。このとき、$f_1, f_2, \ldots\ldots, f_k \in H^\infty$ 、$\varepsilon > 0$ を適当にとって、

$$(3-17) \qquad W \equiv \left\{x \in M(H^\infty)\, ;\, \sum_{j=1}^{k} |f_j(x) - f_j(x_0)| < \varepsilon\right\} \subset V$$

とできる。ここで、$f_1(z) = z$ 、$f_2(z) = b(z)$ とする。定理 2.2 と同様にして、次を満たす sparse sequence $\{w_n\}_n \subset D$ がとれる。

$$(3-18) \qquad \sum_{j=1}^{k} |f_j \circ L_{w_n} - f_j(x_0)| \to 0 \text{ uniformly on } D_r \text{ as } n \to \infty \text{ for } 0 < r < 1 \text{ and}$$

$$(3-19) \qquad \overline{P(y)} \subset W \text{ for every } y \in \overline{\{w_n\}_n} \backslash \{w_n\}_n.$$

(3-18) より、$x_0 \in \Gamma_{\lambda,\zeta}$、

$$w_n = f_1(w_n) = f_1 \circ L_{w_n}(0) \to f_1(x_0) = z(x_0) = \lambda$$

$$b(w_n) = f_2 \circ L_{w_n}(0) \to f_2(x_0) = \zeta.$$

補題 3.2 より、

$$\emptyset \neq \overline{P(y)} \cap \Gamma \subset A_{\lambda,\zeta} \cap \Gamma_{\lambda,\zeta} \quad (\forall y \in \overline{\{w_n\}_n} \backslash \{w_n\}_n)$$

よって、 (3-17) と (3-19) より、x_0 の任意の近傍に対して、

$$\emptyset \neq (A_{\lambda,\zeta} \cap \Gamma_{\lambda,\zeta}) \cap V$$

が成立するので、 (i) が示された。

$\zeta \in \partial D$ を固定して、$U = \Gamma_\lambda \backslash \Gamma_{\lambda,\zeta}$ とする。$\Gamma_{\lambda,\zeta}$ は Γ_λ の closed subset であるから、 U は Γ_λ の open subset である。$U, \Gamma_{\lambda,\zeta} \cap A_{\lambda,\zeta}$ は どちらも、Γ_λ の proper な open subset で、$U \cap (\Gamma_{\lambda,\zeta} \cap A_{\lambda,\zeta}) = \emptyset$ である。(i) より、 $\overline{U} \cap \overline{(A_{\lambda,\zeta} \cap \Gamma_{\lambda,\zeta})} = \overline{U} \cap \Gamma_{\lambda,\zeta} \neq \emptyset$. 従って、 Γ_λ は E.D. ではない。□

References

[1] P. Budde, Support sets and Gleason parts. Michigan Math. J. 37, 367–383(1990).

[2] L. Carleson, Interpolations by bounded analytic functions and the corona theorem, Ann. of Math. 76, 547–559(1962).

[3] T. W. Gamelin, Uniform algebras. New Jersey 1969.

[4] J. B. Garnett, Bounded analytic functions. New York 1981.

[5] P. Gorkin, H.- M. Lingenberg and R. Mortini, Homeomorphic disks in the spectrum of H^∞. Indiana Univ. Math. J. 39, 961–983(1990).

[6] K. Hoffman, Banach spaces of analytic functions. New Jersey 1962.

[7] K. Hoffman, Bounded analytic functions and Gleason parts. Ann. of Math. 86, 74–111(1967).

[8] T. Ishii and K. Izuchi, Trivial points in the maximal ideal space of H^∞. preprint(1997).

[9] D.Suárez, Trivial Gleason parts and the topological stable rank of H^∞. Amer. J. Math. 118, 879–904(1996).