数理解析研究所講究録
1049 巻 1998 年 129-136

L^p-空間の間のコンパクトな合成作用素

信州大理　成田　公一　(Kouichi Narita)
高木　啓行　(Hiroyuki Takagi)

合成作用素の研究は, 1968 年の E.A. Nordgren や H.J. Schwartz の論文 [8], [13] にはじまる. その後, さまざまな関数空間 ——Hardy 空間, Bergman 空間, L^p-空間, 連続関数の空間など—— の上の合成作用素が研究されるようになり, 現在では, ひとつの研究領域を形成するにいたっている. その様子は, 報告 [3], [9] や 専門書 [4], [14], [18], [24] から うかがい知ることができる.

ここでは, L^p-空間上の合成作用素を考える. この方面の研究は, R.K. Singh, A. Kumar, A. Lambert, W.C. Ridge, R. Whitley など, 多くの数学者によって行われている. 彼らの成果は, R.K. Singh and J.S. Manhas 著の本 [18] の Chapter 2 に みることができる. そこからもわかることだが, これまでの研究は, 主に L^2-空間の間の合成作用素に関するものであった. そんな中で, S. Axler ([1]), K. Izuchi ([6]), 大野氏 ([11]) が, 異なる L^p-空間の間の作用素を研究しているのが 注目される. さらに, 横内氏の修士論文 [21] では, 2 つの L^p-空間の間の合成作用素がとりあげられていて, それが 完全に特徴づけられている. この講演では, その結果を引き継いで, その作用素の性質を 調べる.

さて, 作用素の重要なクラスを形造るものとして, コンパクト作用素がある. そこで,

2 つの L^p-空間の間の合成作用素が, いつ コンパクトになるか?

という問題を設定する. コンパクトな合成作用素を 特徴づける問題は, J.H. Shapiro の本 [14] のテーマになっているように, 興味深い問題である. §1 で, 上の問題の解答を 与える. また, コンパクト作用素に関連づけて, 完全連続作用素, 弱コンパクト作用素についても 考える. つまり,

2 つの L^p-空間の間の合成作用素が, いつ 完全連続になるか?
いつ 弱コンパクトになるか?

という問題を考える. これらの問題の解答は, それぞれ, §2, §3 で与える.

ここで得られた結果をみると, コンパクト作用素, 完全連続作用素, 弱コンパクト作用素の微妙な違いが, かなり明確になる. また, J.L. Romero ([10]) が扱っているような 2 つの L^p-空間を結びつきを考えるとき, これらの結果が 価値のあるものになると思われる.

準 備

$(X,\mathfrak{M},\mu)$, $(Y,\mathfrak{N},\nu)$ を σ-有限な測度空間とし, その上の L^p-空間を,

$$L^p(X)=L^p(X,\mathfrak{M},\mu), \qquad L^q(Y)=L^q(Y,\mathfrak{N},\nu)$$

とかく $(1\leq p\leq\infty,\ 1\leq q\leq\infty)$.

また, $\mu(A)>0$ なる集合 $A\in\mathfrak{M}$ が **原子元** (atom) であるとは,

$$E\subset A,\ E\in\mathfrak{M} \implies \mu(A)=0 \text{ または } \mu(A\setminus E)=0$$

となることである. σ-有限な測度空間 X は, たかだか可算個の 原子元 $\{A_k\}_{k\in I}$ と 原子元を含まない集合 B とに たがいに交わらないように 分割できる:

$$X\ =\ \left(\bigcup_{k\in I}A_k\right)\ \cup\ B$$

ただし, 添字集合 I は, 有限集合か 自然数の集合 $\mathbb{N}$ である.

つぎに, φ を Y から X への写像 とする. これが,

$$E\in\mathfrak{M} \implies \varphi^{-1}(E)\in\mathfrak{N}$$

をみたすとき, φ を, Y から X への**可測変換** (measurable transformation) という. さらに,

$$\mu(E)=0 \implies \nu(\varphi^{-1}(E))=0$$

となっていたら, φ は **非特異** (non-singular) であるという.

定義 Y から X への非特異な可測変換 φ をひとつ固定しておき, 作用素 C_φ を,

$$C_\varphi f=f\circ\varphi \qquad (f\in L^p(X))$$

と定める. ここで, もし,

$$f\in L^p(X) \implies C_\varphi f\in L^q(Y)$$

となっていたら, C_φ を, $\boldsymbol{L^p(X)}$ **から** $\boldsymbol{L^q(Y)}$ **への 合成作用素** (composition operator) という.

これは, “合成” という演算を 作用素としてとらえたものである. ここで, φ が 非特異な可測変換という仮定は, C_φ が $L^p(X)$ 上の写像として きちんと定義されるために必要な 条件である. また, φ が非特異ということは, 測度 $\nu\varphi^{-1}$

$$\nu\varphi^{-1}(E)=\nu(\varphi^{-1}(E)) \qquad (E\in\mathfrak{M})$$

が μ に関して 絶対連続であるということだから, Radon-Nikodým の定理により,

$$\nu\varphi^{-1}(E) = \int_E u_\varphi \, d\mu \qquad (E \in \mathfrak{M})$$

をみたす X 上の非負の可測関数 u_φ が存在する.

さて, 合成作用素の もっとも基本的な問題:

どのような φ に対して, C_φ は $L^p(X)$ から $L^q(Y)$ への合成作用素になるか?

は, すでに 横内氏によって 解決されている.

定理 (横内 [21] ~ [23]) φ を, Y から X への 非特異な可測変換とする. このとき, C_φ が $L^p(X)$ から $L^q(Y)$ への合成作用素になるための必要十分条件は, つぎのとおりである:

$p \backslash q$	$1 \leq q < \infty$			$q = \infty$
	$p > q$	$p = q$	$p < q$	
$1 \leq p < \infty$	$u_\varphi \in L^r(X)$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=\frac{1}{q}\right)$	$\sup_E \frac{\nu\varphi^{-1}(E)}{\mu(E)} < \infty$ 注1	$\nu\varphi^{-1}(B) = 0$ $\sup_k \frac{\nu\varphi^{-1}(A_k)^{\frac{1}{q}}}{\mu(A_k)^{\frac{1}{p}}} < \infty$	$\nu\varphi^{-1}(B) = 0$ $\sup_k \frac{\mathrm{sgn}(\nu\varphi^{-1}(A_k))}{\mu(A_k)} < \infty$ 注2
$p = \infty$	$\nu(Y) < \infty$ 注3			無条件 注4

定理の表について 少し注釈をいれておく.

注 1 : この $\sup_E$ は, $\mu(E) \neq 0$ となるすべての $E \in \mathfrak{M}$ についての上限を 意味する.

注 2 : sgn は 符号関数である. すなわち, $x > 0$ のとき, $\mathrm{sgn}(x) = 1$, $x = 0$ のとき, $\mathrm{sgn}(x) = 0$.

注 3 : これは, つぎのような意味である.

$\nu(Y) < \infty$ のとき, すべての φ に対して, C_φ は $L^\infty(X)$ から $L^q(Y)$ への 合成作用素になり,

$\nu(Y) = \infty$ のとき, どんな φ に対しても, C_φ は $L^\infty(X)$ から $L^q(Y)$ への 合成作用素にならない.

注 4 : すべての φ に対して, C_φ が $L^\infty(X)$ から $L^\infty(Y)$ への 合成作用素になる という意味.

これから, $L^p(X)$ から $L^q(Y)$ への合成作用素の性質を 調べていこう. 以後, φ は 上の定理の条件をみたすものとして, 話をすすめていく.

合成作用素の有界性は, つぎのように 簡単に記述される. この定理は, 閉グラフ定理から 容易にみちびける.

定理 (横内 [21] ~ [23]) $L^p(X)$ から $L^q(Y)$ への合成作用素は, すべて 有界である.

---

§1. コンパクトな合成作用素

この節では, つぎの問題を考える.

問題 いつ, $L^p(X)$ から $L^q(Y)$ への合成作用素 C_φ が コンパクトになるか?

つまり, $L^p(X)$ から $L^q(Y)$ への合成作用素 C_φ が コンパクトになるための必要十分条件を求めるわけである. **コンパクト**作用素とは, 有界集合を コンパクト集合の中にうつす作用素のことである.

2 つの L^p-空間 $L^p(X)$, $L^q(Y)$ について, $X = Y$ かつ $1 \leq p = q < \infty$ の場合, 上の問題に関して, R.K. Singh ([15] ~ [17]), Xu ([20]), 第二著者 ([19]) らが いくつかの結果をみちびいている. ここでは, それら結果を含めて, つぎの定理を得た.

定理 1 C_φ を $L^p(X)$ から $L^q(Y)$ への合成作用素とする. C_φ が コンパクト作用素になるための必要十分条件は, つぎのとおりである.

<table>
<tr><th>p \ q</th><th colspan="3">$1 \leq q < \infty$</th><th>$q = \infty$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$1 \leq p < \infty$</td><td>$p > q$</td><td>$p = q$ [19]</td><td>$p < q$</td><td rowspan="2">$\dfrac{\mathrm{sgn}(\nu\varphi^{-1}(A_k))}{\mu(A_k)} \xrightarrow{\text{注}} 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\nu\varphi^{-1}(B) = 0$</td><td>$\nu\varphi^{-1}(B) = 0$
$\dfrac{\nu\varphi^{-1}(A_k)}{\mu(A_k)} \xrightarrow{\text{注}} 0$</td><td>$\dfrac{\nu\varphi^{-1}(A_k)^{\frac{1}{q}}}{\mu(A_k)^{\frac{1}{p}}} \xrightarrow{\text{注}} 0$</td></tr>
<tr><td>$p = \infty$</td><td colspan="2"></td><td>$\nu\varphi^{-1}(B) = 0$
$\nu\varphi^{-1}(A_k) > 0$
となる k が有限個</td></tr>
</table>

注: X の原子元 $\{A_k\}_{k \in I}$ における添字集合 I が $\mathbb{N}$ のとき, “注” 印のついた各極限は, $k \to \infty$ のときの極限を 表す. また, I が 有限集合のときは, この極限の条件は 自動的にみたされると 解釈する.

定理 1 の $p = q = \infty$ の場合の条件は, C_φ が 退化作用素になるための必要十分条件でもある. このことは 簡単に示せる.

さらに, 定理 1 から, つぎの系が 得られる.

系 $L^p(X)$ から $L^q(Y)$ への合成作用素 C_φ が コンパクトならば, $\nu\varphi^{-1}(B) = 0$ である.

例 <u>$X = Y = [0,1]$, μ, ν が $[0,1]$ 上の Lebesgue 測度の場合</u>　上の系から, $L^p([0,1])$ から $L^q([0,1])$ へのコンパクトな合成作用素が存在しないことが わかる.

§2. 完全連続な合成作用素

この節では, コンパクト作用素にかえて 完全連続作用素を とりあげる. Banach 空間 $\mathcal{X}$ から Banach 空間 $\mathcal{Y}$ への線形作用素 T が, **完全連続** (completely continuous) とは,

$$\mathcal{X} \text{ において } f_n \to 0 \text{ (弱収束)} \implies \mathcal{Y} \text{ において } \|Tf_n\| \to 0$$

となることである. よく知られているように, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ が Hilbert 空間のときは, T が コンパクトであることと 完全連続であることとは 同値である. そのためか, ある本では, コンパクト作用素と完全連続作用素を 同じものとして扱っている. しかし, 一般には,

T が コンパクトならば, 完全連続である

ことしか いえない. ただし, $\mathcal{X}$ が回帰的なときは, T が コンパクトであることと 完全連続であることとは 同値になる. J.B. Conway の本 [2] では, コンパクト作用素と完全連続作用素が きちんと区別されていて, 後者が あまりかえりみられてこなかったと かかれている. そこで, つぎのような問題を考えてみた.

問題 いつ, $L^p(X)$ から $L^q(Y)$ への合成作用素 C_φ が 完全連続になるか?

つまり, $L^p(X)$ から $L^q(Y)$ への合成作用素 C_φ が 完全連続になるための必要十分条件を求めるわけである. 結果は つぎのように得られた.

定理 2 C_φ を $L^p(X)$ から $L^q(Y)$ への合成作用素とする. C_φ が 完全連続作用素になるための必要十分条件は, つぎのとおりである.

<table>
<tr><th>$p \setminus q$</th><th>$q=1$</th><th colspan="3">$1<q<\infty$</th><th>$q=\infty$</th></tr>
<tr><td>$p=1$</td><td rowspan="2"></td><td colspan="4">無 条 件</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$1<p<\infty$</td><td>$p>q$</td><td>$p=q$</td><td>$p<q$</td><td rowspan="2">$\dfrac{\mathrm{sgn}(\nu\varphi^{-1}(A_k))}{\mu(A_k)} \to 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\nu\varphi^{-1}(B)=0$</td><td>$\nu\varphi^{-1}(B)=0$
$\dfrac{\nu\varphi^{-1}(A_k)}{\mu(A_k)} \to 0$</td><td>$\dfrac{\nu\varphi^{-1}(A_k)^{\frac{1}{q}}}{\mu(A_k)^{\frac{1}{p}}} \to 0$</td></tr>
<tr><td>$p=\infty$</td><td colspan="4">無 条 件</td><td>$\nu\varphi^{-1}(B)=0$
$\nu\varphi^{-1}(A_k)>0$
となる k が有限個</td></tr>
</table>

$1<p<\infty$ のとき, $L^p(X)$ は 回帰的だから, このときの表の条件は, 当然 定理 1 のコンパクト性の条件と 一致する. $p=q=\infty$ のときの条件も, 定理 1 の条件と同じになる. ところが, その他の場合は 条件が異なる. とくに, $p=\infty$, $1 \le q < \infty$ の場合については, より

一般に, $L^{\infty}(X)$ から $L^q(Y)$ への有界線形作用素が すべて完全連続になることが いえる. このことは, Grothendieck の結果 [5] を用いて 示される.

§3. 弱コンパクトな合成作用素

この節では, 弱コンパクト作用素を考える. Banach 空間$\mathcal{X}$から Banach 空間$\mathcal{Y}$への線形作用素Tが, **弱コンパクト** (weakly compact) とは, $\mathcal{X}$ の任意の有界集合 B に対して, $T(B)$ が $\mathcal{Y}$の弱コンパクト集合に含まれることである. 明らかに, コンパクト作用素は 弱コンパクトであり, 弱コンパクト作用素は 有界である. また, $\mathcal{X}$ か$\mathcal{Y}$のどちらかが 回帰的なとき, $\mathcal{X}$ から$\mathcal{Y}$への有界線形作用素は, すべて弱コンパクトになる.

そこで, つぎの問題を考えよう.

問題 いつ, $L^p(X)$ から $L^q(Y)$ への合成作用素 C_φ が 弱コンパクトになるか?

つまり, $L^p(X)$ から $L^q(Y)$ への合成作用素 C_φ が 弱コンパクトになるための必要十分条件を求めるわけである. $1<p<\infty$ または $1<q<\infty$ の場合は, $L^p(X)$ か $L^q(Y)$ のどちらかが 回帰的なので, $L^p(X)$ から $L^q(Y)$ への合成作用素は, すべて 弱コンパクトになる. ここでの問題は, それ以外の場合である. 得られた解答を まとめると,

定理 3 C_φ を $L^p(X)$ から $L^q(Y)$ への合成作用素とする. C_φ が 弱コンパクト作用素になるための必要十分条件は, つぎのとおりである.

$p \setminus q$	$q=1$	$1<q<\infty$	$q=\infty$
$p=1$	$\nu\varphi^{-1}(B)=0$ $\dfrac{\nu\varphi^{-1}(A_k)}{\mu(A_k)} \to 0$		
$1<p<\infty$		無 条 件	
$p=\infty$			$\nu\varphi^{-1}(B)=0$ $\nu\varphi^{-1}(A_k)>0$ となる k が有限個

$p=q=1$, $p=q=\infty$ のときの条件は, 定理 1 のコンパクト性の条件と同じである. $p=q=1$ のときは, [19] の Theorem 3 と同様の方法により, また, $p=q=\infty$ のときは, [12] の Theorem 1.2 に帰着させることで, 結果をみちびくことができる.

ここで報告した結果 (定理 1 ～ 3) には どれも場合分けが含まれていて, 証明には それぞれに違った考察を しなければならない. それを解説すると 長くなってしまうので, この報告では, 定理の内容を 記すにとめた. 詳しくは, [7] を 参照してください.

参考文献

[1] S. Axler, *Zero multipliers of Bergman spaces*, Canad. Math. Bull., **28** (1985), 237–242.

[2] J.B. Conway, "A Course in Functional Analysis," 2nd ed.,Springer-Verlag, New York, 1990.

[3] C.C. Cowen, *Composition operators on Hilbert spaces of analytic functions; A status report*, in "Operator Theory / Operator Algebras and Applicantions," **51** Part I, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1990, pp. 131–145.

[4] C.C. Cowen and B.D. MacCleur, "Composition Operators on Spaces of Analytic Functions," CRC Press, Boca Raton, 1995.

[5] A. Grothendieck, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type* $C(X)$, Canad. J. Math., **5** (1953), 129–173.

[6] K. Izuchi, *A function theoretic proof of Axler's zero multiplier theorem*, Canad. Math. Bull., **31** (1988), 117–120.

[7] 成田 公一, L^p-空間の間のコンパクトな合成作用素, 修士論文, (信州大), 1998.

[8] E.A. Nordgren, *Composition Operators*, Canad. J. Math., **20** (1968), 442–449.

[9] E.A. Nordgren, *Composition Operators on Hilbert spaces*, in "Hilbert Space Operators," Lecture Note in Math., **693**, Springer-Verlag, New York, 1978,. 38–63

[10] J.L. Romero, *When is* $L^p(\mu)$ *contained in* $L^q(\mu)$ *?* , Amer. Math. Monthly., **90** (1983), 203–206.

[11] 大野 修一, *Multipliers on the spaces of analytic functions*, 関数環研究会集会報告集, (信州大, 1994), 65–72.

[12] S. Ohno and J. Wada, *Compact homomorphisms of function algebras*, Tokyo J. Math., **4** (1981), 105–112.

[13] H.J. Schwartz, *Composition Operators on* H^p, Thesis, Univ. Toledo, 1969.

[14] J.H. Shapiro, "Composition Operators and Classical Function Theory," Springer-Verlag, New York, 1993.

[15] R.K. Singh, *Compact and quasinormal composition operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **45** (1974), 80–82.

[16] R.K. Singh and N.S. Dharmadhikari, *Compact and Fredholm Composite Multiplication Operators*, Acta Sci. Math.(Szeged), **52** (1988), 437–441.

[17] R.K. Singh and A. Kumar, *Compact composition operators*, J. Aust. Math. Soc. (Series A), **28** (1979), 309–314.

[18] R.K. Singh and J.S. Manhas, "Composition Operators on Function Spaces," North-Holland, 1993.

[19] H. Takagi, *Compact weighted composition operators on L^p*, Proc. Amer. Math. Soc., **116** (1992), 505–511.

[20] Xu, Xiau Min, *Compact Composition Operators on $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$*, Adv. in Math. (China), **20** (1991), 221–225.

[21] 横内 克彦, *L^p-空間の間の合成作用素*, 修士論文, (信州大), 1996.

[22] 横内 克彦, 高木 啓行, *L^p-空間の間の合成作用素*, 数理解析研究所講究録, **946** (1996), 18-24.

[23] 横内 克彦, 高木 啓行, *L^p-空間の間の合成作用素 II*, 関数環研究会集会報告集, (日本工業大, 1996), 18–21.

[24] K. Zhu, "Operator Theory in Function Spaces," Marcel Dekker, New York, 1990.