数理解析研究所講究録
1049 巻 1998 年 21-29

有限連結領域上の Shapiro-Shields 型定理

新潟大学大学院　自然科学研究科　　羽鳥　理　(Osamu Hatori)

序. ここでは単位開円板 D 上の補間列に関する Shapiro-Shields [3] による結果について (1) 有限連結領域上の結果に拡張する (2) weight を他のものにかえられるか考察する.

Shapiro-Shields の定理. Shapiro-Shields [3] は $H^\infty(D)$ に関する補間列と $H^p(D)$ に関するweight 付きの補間列が一致することを示した。

定理 (Shapiro-Shields) $\{z_n\}$ を D の点列とするとき以下は同値である。

(1) $\{z_n\}$ は $H^\infty(D)$ に関する補間列である.

(2) $1 \leq p < \infty$ なる**ある** p について

$$\{\{f(z_n)(1-|z_n|)^{1/p}\} : f \in H^p(D)\} = \ell^p$$

がなりたつ.

(3) $1 \leq p < \infty$ なる**任意の** p について

$$\{\{f(z_n)(1-|z_n|)^{1/p}\} : f \in H^p(D)\} = \ell^p$$

がなりたつ.

Shapiro-Shields の定理における weight $(1-|z_n|)^{1/p}$ は一般の領域では意味を成さないが $(1-|z_n|)^{1/p} \sim -\log|z_n|$ であることに注意すれば weight を Green 関数の $1/p$ ベキとすれば一般の領域上でも定式化できる. 以下ではこの方向での拡張を与える. また、他の weight に置き換えることの可能性も探りたい.

有限連結領域への拡張. 以下では Rは finite bordered Riemann surface で境界∂Rは有限個の解析曲線からなるものとする. また、$a \in R$に対して a に極を持つ R上の Green 関数を $g_R(\cdot; a)$ により表わす.

定理 1 $a \in R$で $\{z_n\}$ は $R \setminus \{a\}$ の点列とする. このとき以下は同値である.

(1) $\{z_n\}$ は $H^\infty(R)$ に対する補間列である. つまり、$\{\{f(z_n)\} : f \in H^\infty(R)\} = \ell^\infty$.

(1') $\ell^1 \subset \{\{f(z_n)\} : f \in H^\infty(R)\}$.

(2) $1 \leq p < \infty$ なる**ある** p に対して

$$\{\{f(z_n) g_R(z_n; a)^{1/p}\} : f \in H^p(R)\} = \ell^p.$$

(2') $1 \leq p < \infty$ なる**ある** p に対して

$$\ell^1 \subset \{\{f(z_n) g_R(z_n; a)^{1/p}\} : f \in H^p(R)\}.$$

(3) $1 \leq p < \infty$ なる**任意の** p に対して

$$\{\{f(z_n) g_R(z_n; a)^{1/p}\} : f \in H^p(R)\} = \ell^p.$$

(3') $1 \leq p < \infty$ なる**任意の** p に対して

$$\ell^1 \subset \{\{f(z_n) g_R(z_n; a)^{1/p}\} : f \in H^p(R)\}.$$

この定理を証明するのに次の補題を用いる.

補題 2 $1 \leq q \leq \infty$ とする. $\{z_n\}$ を Rの点列とする. $\{c_n\}$ を 0 でない複素数の点列とする. $\{f_n\}$ は $H^q(R)$ の関数列とする. $\sum |a_n c_n| < \infty$ なる任意の複素数列 $\{a_n\}$ に対して

$f \in H^q(R)$ が存在して$\sum a_n f_n$が $\{z_n\}$ 上 fに各点収束したとする．このとき正数 Mと $H^q(R)$ の関数列 $\{\tilde{f}_n\}$ で各 k, n について

$$f_n(z_k) = \tilde{f}_n(z_k)$$

$$\|\tilde{f}_k\|_q \leq M|c_k|$$

をみたすものが存在する．

証明. $S = \{z_n\}$ とおくと $H^q(R)|S$は商ノルムに関して Banach 空間である．

まず、$c_n = 1$ の場合を考える．各 $\{a_n\} \in \ell^1$に対して$\sum a_n f_n$が S上各点収束する $f \in H^q(R)$ の Sへの制限を対応させる写像を

$$T : \ell^1 \to H^q(R)|S$$

とすると、閉グラフ定理により Tは有界線形作用素であることが分かる．よって各 kに対して

$$\|T(\{\delta_{nk}\}_{n=1}^{\infty})\|_{H^p(R)|S} \leq \|T\|$$

となるが、$T(\{\delta_{nk}\}) = f_k|S$なので商ノルムの定義より

$$\|\tilde{f}_k\|_q \leq 2\|T\|$$

$$\tilde{f}_k = f \quad \text{on} \quad S$$

となる$\tilde{f}_k \in H^q(R)$ が存在する．そこで $M = 2\|T\|$ とおけばよい．

次に、一般の c_nに対する証明を与える．$g_n = f_n/c_n$とおく．任意の $\{a_n\} \in \ell^1$に対して条件より $f \in H^q(R)$ が存在して$\sum a_n g_n$は $\{z_n\}$ 上 fに各点収束する．よって前半の結果よ

り正数 M と $\tilde{g}_n \in H^q(R)$ が存在して

$$\|\tilde{g}_n\|_q \leq M$$

$$\tilde{g}_n = g_n \quad \text{on} \quad S$$

が成立する．$\tilde{f}_n = c_n \tilde{g}_n$ が求める関数である．

定理１の証明. (1') または (2')⇒(1) について．Stout の定理 [4, Theorem 5.6] と Narita の定理 [2, Theorem 1] により $\{z_n\}$ が局所的に補間列（$\tilde{R}$ を $R \cup \partial R$ を含む Riemann surface としたとき、任意の $z \in \partial R$ に対して $\tilde{R}$ における近傍 U が存在し、$U \cap \{z_n\}$ が $H^\infty(R \cap U)$ に関する補間列である）であることを示せば十分である．さらに、$U \cap R$ は D と等角同値で $\{z_n\} \subset U$ で $\{z_n\}$ の集積点が $U \cap \partial R$ にのみあると仮定して一般性を失わないのでそうする．$a' \in U \cap R \setminus \{z_n\}$ をひとつとり固定すると

$$g_{U \cap R}(z_n; a') \sim g_R(z_n; a)$$

である．つまり、正数 M が存在して

$$1/M < g_{U \cap R}(z_n; a')/g_R(z_n; a) < M$$

が成立する．また、$H^p(R)|U \cap R \subset H^p(U \cap R)$ なので (2') より

$$\ell^1 \subset \{\{f(z_n) g_{U \cap R}(z_n; a')^{1/p}\} : f \in H^p(U \cap R)\}$$

である．$U \cap R$ は D と等角同値なので (2') ⇒ (1) は $R = D$ の場合に示せばよいことになる．(1') ⇒ (1) についても同様である．よって以下では $R = D$ とする．また、$p = \infty$ のとき

$g_R(z_n;a)^{1/p}$は 1 を表わすことにする．各自然数 kに対して $\{g_D(z_n;a)^{1/p}\delta_{kn}\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$なので条件より $f_k(z_n) = \delta_{kn}$をみたす $f_k \in H^p(D)$ が存在する．

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| g_D(z_n;a)^{1/p} < \infty$$

なる任意の複素数列 $\{a_n\}$ に対して $f(z_n) = a_n$なる $f \in H^p(D)$ が存在する．$\sum a_n f_n$は $\{z_k\}$ 上 fに各点収束するので補題 2 より正数 Mと $H^p(D)$ の関数列 $\{\tilde{f}_n\}$ で

$$f_n(z_k) = \tilde{f}_n(z_k),\ \ \|\tilde{f}_n\|_p \leq M g_R(z_n;a)^{1/p}$$

なるものが存在する．$p = \infty$ の場合このことは $\{z_n\}$ が uniformly separated であることを示しているので Carleson の補間列に関する定理 [1] より (1) がわかる．$p < \infty$ の場合は以下のようである．正数 Kが存在して不等式

$$|f(z) g_D(z;a)^{1/p}| \leq K \|f\|_p$$

が任意の $f \in H^p(D)$ と $z \in D \setminus \{a\}$ に対して成立するので$\tilde{f}_n$の Blaschke part を$\widetilde{B}_n$とすると

$$\left|\frac{g_D(z_n;a)^{1/p}}{\widetilde{B}_n(z_n).}\right| = \left|\frac{\tilde{f}_n(z_n)}{\widetilde{B}_n(z_n)} g_D(z_n;a)^{1/p}\right| \leq K \|\tilde{f}_n/\widetilde{B}_n\|_p = K\|\tilde{f}_n\|_p \leq KM g_D(z_n;a)^{1/p}$$

が、したがって

$$|\widetilde{B}_n(z_n)| \geq 1/(KM)$$

が各 n に対して成立する．$\|\widetilde{B}_n\|_\infty = 1$ なので $\{z_n\}$ は uniformly separated である事が分かり、(1) が成立する．

(1) ⇒ (3) について．前と同様 $U \cap R$ は D と等角同値、$\{z_n\} \subset U \cap R$、$\{z_n\}$ の集積点 $\subset U \cap \partial R$ としてよいのでそうする．すると Shapiro-Shields の定理より

$$\{\{f(z_n)g_{U\cap R}(z_n;a)^{1/p}\} : f \in H^p(U \cap R)\} = \ell^p$$

であり、$g_{U\cap R}(z_n;a) \sim g_R(z_n;a)$、$H^p(R)|U \cap R \subset H^p(U \cap R)$ なので

$$\{\{f(z_n)g_R(z_n;a)^{1/p}\} : f \in H^p(R)\} \subset \ell^p$$

である．h を R 上の Ahlfors 関数とする．U を小さくとることにより h は $U \cap R$ で単射であるとしてよいのでそうする．$\{z_n\}$ は $H^\infty(R)$ に対する補間列なので $H^\infty(U \cap R)$ に対するそれでもある．h は $R \cup \partial R$ で正則に拡張できるので以上より $\{h(z_n)\}$ は $H^\infty(D)$ に対する補間列となる．ふたたび Shapiro-Shields の定理より

$$\{\{f(h(z_n))g_D(h(z_n);h(a))^{1/p}\} : f \in H^p(D)\} = \ell^p$$

となり

$$g_D(h(z_n);h(a)) \sim g_{h(U\cap R)}(h(z_n);h(a)) = g_{U\cap R}(z_n;a) \sim g_R(z_n;a)$$

で

$$\{f \circ h : f \in H^p(D)\} \subset H^p(R)$$

だから

$$\ell^p \subset \{\{f(z_n)g_R(z_n;a)^{1/p}\} : f \in H^p(R)\}$$

となるので (3) がわかる．

(3) ⇒ (3') ⇒ (2')、(1) ⇒ (1')、(3) ⇒ (2) は自明なので以上で定理 1 の証明ができた．

weight $g_r(\cdot;a)^{1/p}$について. 以下では定理 1 などに現れる weight $g_r(\cdot;a)^{1/p}$についての結果を紹介する. 任意の $f \in H^p(R)$ に対して $\{f(z_n)g_R(z_n;a)^{1/p}\} \in \ell^\infty$であるがこの条件をみたし Shapiro-Shields 型定理の成立する weight の境界挙動は $g_R(\cdot;a)^{1/p}$と同値であることがわかった.

定理 3 $\{c_n\}$ を複素数列とする. このとき次が成立する.

(i) $\ell^1 \subset \{\{f(z_n)c_n\} : f \in H^\infty(R)\} \subset \ell^\infty$とすると $c_n \sim 1$ である. さらに $\{\{f(z_n)c_n\} : f \in H^\infty(R)\} = \ell^\infty$である.

(ii) $1 \leq p < \infty$ とする. $\ell^1 \subset \{\{f(z_n)c_n\} : f \in H^p(R)\} \subset \ell^\infty$ とすると任意の $a \in R\backslash\{z_n\}$ に対して $|c_n| \sim g_R(z_n;a)^{1/p}$である. さらに、$\{\{f(z_n)c_n\} : f \in H^p(R)\} = \ell^p$である.

証明. (ii) の証明を与える. (i) も同様に証明できることを注意しておく. $\ell^1 \subset \{\{f(z_n)c_n\} : f \in H^p(R)\}$ なので $c_n \neq 0$ である. つぎに正数 Kが存在して

$$|c_n| \leq K g_R(z_n;a)^{1/p}$$

がなりたつ. 実際もしそうでないと仮定すると、$\{z_n\}$ の部分列 $\{z_{n(m)}\}$ で

$$m^3 g_R(z_{n(m)};a)^{1/p} \leq |c_{n(m)}|$$

なるものが存在する. とくに $\{z_{n(m)}\}$ は H^∞に対する補間列であるとしてもよいのでそうする. すると定理 1 より

$$\{\{f(z_{n(m)}g_R(z_{n(m)};a)^{1/p}\} : f \in H^p(R)\} = \ell^p$$

となるが、$\{m^{-2/p}\} \in \ell^p$なので

$$f(z_{n(m)})g_R(z_{n(m)};a)^{1/p} = m^{-2/p}$$

なる $f \in H^p(R)$ が存在する．よって $m \to \infty$ のとき

$$|f(z_{n(m)})c_{n(m)}| \geq m^{3-2/p} \to \infty$$

となるが、これは $\{f(z_n)c_n\}$ の有界性に矛盾する．

また、正数 K'が存在して不等式

$$g_R(z_n; a)^{1/p} \leq K'|c_n|$$

が成立することを示す．もし成り立たないとすると $\{z_n\}$ の部分列 $\{z_{n(m)}\}$ で

$$m^3|c_{n(m)}| \leq g_R(z_{n(m)}; a)^{1/p}$$

をみたすものがとれる．

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \notin \{n(m)\}_{m=1}^{\infty}, \\ m^{-2}, & n = n(m). \end{cases}$$

とさだめると $\{a_n\} \in \ell^1$なので条件から $a_n = f(z_n)c_n$となる $f \in H^p(R)$ が存在する．とくに $m^{-2} = f(z_{n(m)})c_{n(m)}$であるから

$$m \leq |f(z_{n(m)}g_R(z_{n(m)}; a)^{1/p}|$$

となり $\{f(z_n)g_R(z_n; a)^{1/p}\}$ の有界性に矛盾する．以上より $|c_n| \sim g_R(z_n; a)^{1/p}$が分かった．したがって定理 1 より $\{\{f(z_n)c_n\} : f \in H^p(R)\} = \ell^p$が成立する．

参考文献

[1] L. Carleson, *An interpolation problem for bounded analytic functions*, Amer. J. Math. 80(1958), 921–930

[2] J. Narita, *Interpolating sequences on planer domains*, Kodai Math. J. 13(1990), 311–316

[3] H. S. Shapiro and A. L. Shields, *On some interpolation problems for analytic functions*, Amer. J. Math. 83(1961), 513–532

[4] E. L. Stout, *Bounded holomorphic functions on finite Riemann surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 120(1965), 255–285