数理解析研究所講究録
1049 巻 1998 年 56-63

Separation by bounded analytic functions on subsets of Riemann Surfaces

大同工業大学 成田淳一郎 (Junichiro Narita)

1 定義と主定理

R をリーマン面, A を R 上の正則関数の環で, 定数関数を含むものとする。R 上の 2 点 p, q に対し, ある $f \in A$ が $f(p) \neq f(q)$ をみたすとき, A は p, q を分離すると言う。また R の部分集合 E に対し, A が E 上の任意の異なる 2 点を分離するとき, A は E (の点) を分離すると言う。A の関数 f, g $(g \not\equiv 0)$ に対し, f/g は R 上の有理型関数であるから, R の任意の点 p における値 $(f/g)(p)$ を考えることが出来る。Royden [5] に従い, R 上の 2 点 p, q に対し, ある $f \in A, g \in A$ $(g \not\equiv 0)$ が $(f/g)(p) \neq (f/g)(q)$ をみたすとき, A は p, q を弱分離すると言う。また R の部分集合 E に対し, A が E 上の任意の異なる 2 点を弱分離するとき, A は E (の点) を弱分離すると言う。$g \equiv 1$ の場合を考えれば, 分離すれば弱分離することは明らかである。

特に A が R 上の有界正則関数全体のなす環 $H^\infty(R)$ のとき, その極大イデアル空間を $\mathcal{M}(R)$ とすると, $H^\infty(R)$ により分離されない 2 点は, point evaluation による R から $\mathcal{M}(R)$ への自然な写像による像が一致することになる。例えば Myrberg [3] の例のように, R が平面領域 D の 2 葉の被覆面で, 被覆写像 $\pi : R \to D$ による 1 点の逆像 $\pi^{-1}(z)$ の 2 点が全て $H^\infty(R)$ により分離されないときには, $\mathcal{M}(R)$ の中での R の像は D と同一視される。実際このときには R の点で $H^\infty(R)$ により分離されない点を同一視することにより D が得られ, $H^\infty(R)$ 自体が $H^\infty(D)$ と自然な対応により同型である。

それでは一般にリーマン面 R において $H^\infty(R)$ により分離されない点を全て同一視することによりリーマン面 R' が得られ, $H^\infty(R)$ が $H^\infty(R')$ と自然に同型になるかという問題を考えたとき, 弱分離の概念が必要となる。$H^\infty(R)$ により弱分離されるが分離されない 2 点が存在すればこのような "リーマン面" R' は得られないことになる。(定理 [3])

このように弱分離と分離の関係はリーマン面上で $H^\infty(R)$ を考えるときの土台となる重要な問題であると思われるが, あまり多くのことは分かっていない。ここでは R 全体の弱分離と R のどの程度の部分集合の分離が同値になるかを問題とする。興味の中心は A が $H^\infty(R)$ の場合であるが, 以下 A は一般に定数関数を含む正則関数の環として成り立つ。Gamelin-Hayashi [2] によれば

定理 1. リーマン面 R 上の正則関数の環 A に対し, 次の *2* つの条件は同値である。

(a) A は R の点を弱分離する.

(b) R のある離散部分集合 Λ に対して, A は $R\backslash\Lambda$ の点を分離する.

今回は弱分離であるための十分条件としての観点から R の出来るだけ小さな部分集合上での分離から弱分離を示すことを考えたい。

R の部分集合 U, E に対し, A が U の任意の点と $U \cup E$ の任意の他の点を分離するとき, A は E に関して U の点を分離すると言う。

定理 2. リーマン面 R 上の正則関数の環 A に対し, 次の *3* つの条件は同値である。

(a) A は R の点を弱分離する.

(c) R 内のコンパクト集合列 $\{K_n\}$ で次の条件をみたすものが存在する。
(i) $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots$,
(ii) $R = \bigcup K_n$,
(iii) A は K_n に関して ∂K_n のある近傍の点を分離する。

(d) R 内の相対コンパクト開集合列 $\{D_n\}$ で次の条件をみたすものが存在する。
(i) ∂D_n は連結,
(ii) $\overline{D}_1 \subset \overline{D}_2 \subset \overline{D}_3 \subset \cdots$,
(iii) $R = \bigcup \overline{D}_n$,
(iv) A は ∂D_n のある近傍の点を分離する。

本稿では, 定理 1 の証明も含め, 出来るだけ予備知識を前提とせず上記 (a),(b),(c),(d) の同値性を証明する。

2 Royden's resolution

定理の証明のために R の A による Royden's resolution $\tilde{R}$ を用いる。これは Royden [5] において A の代数的構造により定義されたものであるが, ここでは簡単のため, R に適当な同値関係を入れることにより構成する。

R の 2 点 p, q に対し, p, q それぞれのある近傍から複素平面への非定数正則関数 ρ, σ が存在し,

(i) $\rho(p) = 0, \sigma(q) = 0$

(ii) 任意の $f \in A$ が ρ, σ による任意の 1 点の逆像 $\rho^{-1}(z) \cup \sigma^{-1}(z)$ で同じ値を取る

をみたすとき $p \sim q$ と定義する。$\sim$ が同値関係であることは容易に分かる。またこの定義における1点の逆像 $\rho^{-1}(z) \cup \sigma^{-1}(z)$ に属する点はすべて $\sim$ により同値となることから, ρ, σ は同値類 $R/\sim$ 上の写像ともみなせ, これらが局所座標となるような等角構造により $R/\sim$ をリーマン面に出来る。このとき射影写像 $\varphi : R \to R/\sim$ が解析写像になることも分かる。

このリーマン面 $R/\sim$ を $\tilde{R}$ と表し, 以下本稿では R の A による Royden's resolution と呼ぶ。。これは Royden [5] における本来の Royden's resolution の部分リーマン面になっている。また上の構成における射影写像 $\varphi : R \to \tilde{R}$ を R からその Royden's resolution への 射影写像と呼ぶ。

補題 1. R の 2 点 p, q が A により弱分離されるとき, p の近傍 U と q の近傍 V が存在して, A は $U \times V$ の (p,q) を除く任意の 2 点の組 (p', q') を分離する。

Proof. $f, g \in A, g \not\equiv 0, (f/g)(p) \neq (f/g)(q)$ とする。$f(p) \neq f(q)$ または $g(p) \neq g(q)$ であれば, 結論は容易に従うので, 以下 $f(p) = f(q), g(p) = g(q)$ のときを考える。このとき $g(p) = g(q) \neq 0$ であれば $(f/g)(p) = (f/g)(q)$ となり仮定に反するので, $g(p) = g(q) = 0$ である。よって $f(p) = f(q) \neq 0$ であれば $(f/g)(p) = (f/g)(q) = \infty$ となって仮定に反するので, $f(p) = f(q) = g(p) = g(q) = 0$ である。$g \not\equiv 0$ であるから p の近傍 U, q の近傍 V で, $(U \setminus \{p\}) \cup (V \setminus \{q\})$ で $g \neq 0$ かつ, $(f/g)(U) \cap (f/g)(V) = \emptyset$ をみたすものがとれる。$(p', q') \in U \times V$, $(p', q') \neq (p, q)$ に対し, $p' = p$ または $q' = q$ のときは g が 2 点 p', q' を分離し, $p' \neq p$ かつ $q' \neq q$ のときは $g(p') \neq 0$, $g(q') \neq 0$, $(f/g)(p') \neq (f/g)(q')$ であるから f または g が 2 点 p', q' を分離する。 □

R 上の点 p に対し, $M(p) = \{f/g : f, g \in A, g \not\equiv 0, (f/g)(p) = 0\}$ とおき, $\nu(p)$ を $M(p)$ に属する有理型関数の点 p における位数の最小値とする。

補題 2. R の点 p に対し, $M(p)$ の元で p で位数 $\nu(p)$ をとる関数 h をとると, p のある近傍 U で A の任意の関数 f は $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n h^n$ と表せる。

Proof. $z(p) = 0$ をみたすある局所座標 (U, z) により, h は $h = z^{\nu(p)}$ と表せる。点 p のある近傍で $f = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ としたとき, $a_m \neq 0$ であるような m がすべて $\nu(p)$ の倍数であることを言えばよい。

もしそうでないとすると, そのような最小の m を s とおくと, $t\nu(p) < s < (t+1)\nu(p)$ をみたす整数 t が存在し, $\left(f - \sum_{k=0}^{t} a_{k\nu(p)} h^k\right)/h^t = \left(f - \sum_{k=0}^{t} a_{k\nu(p)} z^{k\nu(p)}\right)/z^{t\nu(p)} = a_s z^{s - t\nu(p)} + \cdots$ は $M(p)$ の元で, その位数 $s - t\nu(p)$ は $\nu(p)$ より小さいので, $\nu(p)$ の定義に反する。 □

補題 3. A が R の点を弱分離しているとき, R の任意の点 p に対し $\nu(p) = 1$ であり, p のある近傍 U が存在して A は U の点を分離する。

Proof. 点 p 中心の座標円板 (U,z) と関数 h を補題2の証明のようにとる。もし $\nu(p)>1$ であると U 内で $h=z^{\nu(p)}$ により分離されない2点 p,q が存在し, p のある近傍 V_p から q のある近傍 V_q への $\phi(p)=q$ をみたすある等角写像 ϕ により V_p 上 $h\circ\phi\equiv h$ となるので, 補題2の主張により, 任意の $f,g\in A$ $(g\not\equiv 0)$ に対し V_p 上 $(f/g)\circ\phi\equiv f/g$, よって $(f/g)(p)=(f/g)(q)$ となり, A が R の点を弱分離すると言う仮定に反する。従って $\nu(p)=1$ であり, $h=z$ は U の点を分離する。$h=f/g$, $(f,g\in A)$ とする。必要なら U をより小さな p の近傍で置き換えることにより, $U\backslash\{p\}$ 上 $f\neq 0, g\neq 0$ であるとすると, U 内の任意の2点は A の関数 f または g により分離される。 □

定理 3. *R からその A による Royden's resolution $\tilde{R}$ への射影写像を φ とする。R の 2点 p, q に対し, $\varphi(p)=\varphi(q)$ となるための必要十分条件は p, q が A により弱分離されないことである。特に φ が単射であるための必要十分条件は A が R の点を弱分離することである。*

Proof. Royden's resolution の構成から, まず一般に $\varphi(p')=\varphi(q')$ のとき, p', q' が A により分離されないことは明らかである。$\varphi(p)=\varphi(q)$ とすると, 解析写像 φ は開写像であるから, p の任意の近傍 U, q の任意の近傍 V の中に $p'\in U$, $q'\in V$, $\varphi(p')=\varphi(q')$ をみたす点 p', q' が存在する。よって補題1により p, q は A により弱分離されない。

逆を言うために, p, q が A により弱分離されないとする。$h_p\in M(p)$, $h_q\in M(q)$ をそれぞれ補題2の主張をみたすようにとる。

p, q が弱分離されないことから $h_q(p)=h_p(p)=0$, $h_p(q)=h_q(q)=0$ であり, よって $h_q\in M(p)$, $h_p\in M(q)$ である。h_p, h_q のそれぞれ点 p, q における位数の最小性から $(h_p/h_q)(p)\neq 0$, $(h_p/h_q)(q)\neq\infty$ である。さらに p, q が弱分離されないことから $(h_p/h_q)(p)=(h_p/h_q)(q)$ も言えるので, これらの値は 0 でも ∞ でもなく, h_p, h_q は p, q で同じ位数を持つことになる。従って最初から $h_p=h_q$ ととってもよいので, 以下これを h と表す。

補題2より p の近傍 U, q の近傍 V をとって, 任意の $f\in A$ に対し, U で $f=\sum_{n=0}^{\infty}a_nh^n$, V で $f=\sum_{n=0}^{\infty}b_nh^n$ と表せる。$a_n=b_n$ $(n=0,1,\cdots,k-1)$ とすると, 関数 $\left(f-\sum_{n=0}^{k-1}a_nh^n\right)/h^k$ は A の商体の元で, 点 p で値 a_k, 点 q で値 b_k をとるので, $a_k=b_k$ である。よって数学的帰納法によりすべての n に対し $a_n=b_n$ となる。

Royden's resolution の構成において $\rho=\sigma=h$ ととると, 任意の複素数 $z\in h(U\cup V)$ に対し f は $\rho^{-1}(z)\cup\sigma^{-1}(z)=h^{-1}(z)$ で同じ値を取るので, $p\sim q$ の条件をみたす。よって $\varphi(p)=\varphi(q)$ である。 □

3 定理1, 2の証明

Proof. (a) $\Rightarrow$ (b): $\Gamma=\{(p,q)\in R\times R: p\neq q, p, q$ は A により分離されない$\}$ とおくと, 補題1, 補題3により Γ は $R\times R$ の離散部分集合である。$\{R_n\}$ を相対コンパクト

な開集合による R の exhaustion とする。$p \in R$ に対し $\chi(p) = \min\{n : p \in R_n\}$ とし, $\Lambda = \{p \in R :$ ある $q \in R$ に対し $(p,q) \in \Gamma$ かつ $\chi(q) \leq \chi(p)\}$ とおく。

まず A が $R \backslash \Lambda$ の点を分離することを言う。もし2点 $p, q \in R \backslash \Lambda$ が分離されないとすると $(p,q) \in \Gamma$ であるから $\chi(q) \leq \chi(p)$ なら $p \in \Lambda$, $\chi(p) \leq \chi(q)$ なら $q \in \Lambda$ となり, どちらにしても矛盾である。

次に Λ が R の離散部分集合であることを言う。もしそうでないとすると, Λ の異なる点からなる点列 $\{p_m\}$ で R の1点 p に収束するものが存在する。このときすべての $\{p_m\}$ の点はある R_n に含まれる。Λ の定義により各点 p_m に対し点 $q_m \in R_n$ が存在し, $(p_m, q_m) \in \Gamma$ をみたす。$R_n \times R_n$ は相対コンパクトであるから, $\{(p_m, q_m)\}$ のある部分列が $R \times R$ の1点に収束するが, これは, Γ が $R \times R$ の離散部分集合であることに矛盾する。

(b) $\Rightarrow$ (d): R の相対コンパクトな開集合からなる exhaustion $\{R_n\}$ で, 境界 ∂R_n が有限個の滑らかな Jordan 閉曲線からなり, $\partial R_n \cap \Lambda = \emptyset$ $(n = 1, 2, \cdots)$ をみたすものをとる。さらに各 n に対し, ∂R_n のすべての成分を, R_n に含まれ Λ と交わらず, 互いに素な有限個の滑らかな Jordan 弧で結ぶことが出来る。これらの Jordan 弧の和集合を L_n とおき, $D_n = R_n \backslash L_n$ とおくと, $\partial D_n = \partial R_n \cup L_n$ であり, (d) の条件をみたす。

(c) $\Rightarrow$ (a): R の A による Royden's resolution を $\tilde{R}$, 射影写像を $\varphi : R \to \tilde{R}$ とする。φ が各 K_n 上単射であることを言えば, φ は R 全体で単射となるので, 定理3より A が R の点を弱分離することが従う。

まず, $\varphi(\partial K_n)$ の近傍 V で, 任意の $w \in V$ に対し $\varphi^{-1}(w) \cap K_n$ が高々1点となるものが存在することを言う。∂K_n の近傍 U を, A が K_n に関して U の点を分離するようにとる。φ は開写像なので, $\varphi(U)$ は $\varphi(\partial K_n)$ の近傍になる。任意の $w \in \varphi(U)$ に対し $p \in U$ を $\varphi(p) = w$ ととる。もし K_n の p 以外の点 q が $\varphi(q) = w$ をみたせば p と q は A により分離されないことになり, 仮定に反する。よって $V = \varphi(U)$ とおくと上の性質をみたす。

次に φ が $\mathrm{int}K_n$ 上単射であることを背理法により示す。そのため異なる2点 $a, b \in \mathrm{int}K_n$ で $\varphi(a) = \varphi(b)$ となるものが存在すると仮定する。φ の singular points を $S = \{p \in K_n : \frac{d\varphi}{d\zeta}(p) = 0\}$ とおく。$\varphi(a) \in \varphi(S)$ のときには $c \notin \varphi(S)$ を φ の近くに取り, $\tilde{a} \in \varphi^{-1}(c) \cap \mathrm{int}K_n$ を a の近くに, $\tilde{b} \in \varphi^{-1}(c) \cap \mathrm{int}K_n$ を b の近くに取ることにより, $\tilde{a} \neq \tilde{b}$ と出来るので, 最初から $\varphi(a) \notin \varphi(S)$ としてよい。

$\varphi(a)$ と V のある1点 x を $\tilde{R} \backslash (\varphi(S) \cup \varphi(\partial K_n))$ に含まれる Jordan 弧 γ で結ぶことが出来る。実際, まず $\varphi(a)$ と $V \backslash \varphi(S)$ の任意の1点 y を $\tilde{R} \backslash \varphi(S)$ 内の Jordan 弧 $\tilde{\gamma} = u([0,1])$, $u : [0,1] \to \tilde{R}$, $u(0) = \varphi(a)$, $u(1) = y$ で結ぶ。$\tilde{\gamma} \cap \varphi(\partial K_n) = \emptyset$ のときは $x = y$, $\gamma = \tilde{\gamma}$ としてよい。$\tilde{\gamma} \cap \varphi(\partial K_n) \neq \emptyset$ のときには $t_0 = \min\{t : u(t) \in \varphi(\partial K_n)\}$ とし t_1 を $u(t_1) \in V$ かつ $t_1 < t_0$ をみたすようにとり, $x = u(t_1)$ および $\tilde{\gamma}$ の部分弧 $\gamma = u([0, t_1])$ とすればよい。

a, b を始点とする γ の lift をそれぞれ γ_a, γ_b とする。γ が $\varphi(S)$ を通らないことから γ_a, γ_b は一意的に定まり, $\gamma_a \cap \gamma_b = \emptyset$ である。また γ_a, γ_b は ∂K_n と交わらないので,

$\mathrm{int}K_n$ に含まれ, よって $\varphi^{-1}(x)\cap K_n$ は少なくとも 2 点 $\varphi^{-1}(x)\cap\gamma_a$ と $\varphi^{-1}(x)\cap\gamma_b$ を含む。これは V の取り方に矛盾し, 従って φ が $\mathrm{int}K_n$ で単射であることが示された。このことと (c) の仮定により, φ は K_n で単射である。

(d) $\Rightarrow$ (c): ここでも R の A による Royden's resolution $\tilde{R}$ と射影写像 $\varphi: R\to\tilde{R}$ を用いる。∂D_n の近傍 U で A が U の点を分離するものをとる。弧状連結なコンパクト集合 B を $\partial D_n\subset\mathrm{int}B\subset B\subset U$ をみたすようにとれる。例えば, ∂D_n を有限個の座標円板 V_m で $\overline{V}_m\subset U$ かつ $V_m\cap\partial D_n\neq\emptyset$ をみたすように覆うと, $\bigcup V_m$ は連結開集合で $B=\overline{\bigcup V_m}$ は弧状連結なコンパクト集合である。

A が D_n に関して B の点を分離することを背理法により示す。もしそうでないとすると, $D_n\backslash B$ の点 p で $\varphi(p)\in\varphi(B)$ をみたすものが存在する。E を p を含む $\varphi^{-1}(\varphi(B))\cap(D_n\cup B)$ の成分とする。φ は U 上単射であるから, $\varphi(U\backslash B)$ は $\varphi(B)$ と交わらない。よって $\varphi^{-1}(\varphi(B))\cap(D_n\cup B)$ は互いに交わらない 2 つのコンパクト集合 $D_n\backslash U$ と B の和集合に含まれ, 従って $E\subset D_n\backslash U\subset D_n\backslash B$ となる。

さらに $\varphi(E)=\varphi(B)$ となることを示す。$\varphi(B)$ は弧状連結であるから任意の $w\in\varphi(B)$ に対し, $\varphi(p)$ と w を $\varphi(B)$ 内の弧 γ で結べる。p を始点とする γ の lift を考えると, 一意的ではないが, γ 全体の lift が存在する。なぜならば, γ を区間 $[0,1]$ からの連続写像として $\gamma=u([0,1])$, $u(0)=\varphi(p)$, $u(1)=w$ と表し, 区間 $[0,t)$ $(0<t\leq 1)$ から R への連続写像 v で $\varphi(v(\tau))=u(\tau)$ $(0\leq\tau<t)$ をみたすものの全体に写像の拡張としての自然な順序を入れて Zorn の補題を用いることにより, 極大元 $v_0:[0,t_0)\to R$ の存在が分かるが, 連結性から $v_0([0,t_0))\subset E\subset D_n\backslash U$ であるから $\lim_{\tau\to t_0}v_0(\tau)$ は $\varphi^{-1}(u(t_0))\cap(D_n\backslash U)$ の有限個の点のどれかに収束し, v_0 は $[0,t_0]$ からの連続写像に拡張でき, またもし $t_0<1$ であればさらに続けて lift することが出来るので, v_0 が極大元であることから $t_0=1$ が言える。よって $w=\varphi(v_0(1))\subset\varphi(E)$ となり $\varphi(E)=\varphi(B)$ が従う。

$E\subset D_n$ かつ $\partial D_n\subset B$ より $\varphi(\partial D_n)\subset\varphi(B)=\varphi(E)\subset\varphi(D_n)$ となる。任意の $f\in A$ に対し, 定理 3 より $\tilde{R}$ 上の正則関数 $\tilde{f}$ で $f=\tilde{f}\circ\varphi$ をみたすものが存在する。$f(\partial D_n)=\tilde{f}(\varphi(\partial D_n))\subset\tilde{f}(\varphi(D_n))=f(D_n)$ であるから最大値の原理より f は定数関数となる。よって A が定数関数のみの環となるので, (d) の仮定 (iv) に反する。従って, 背理法により A が D_n に関して B の点を分離することが分かった。

$K_n=\overline{D}_n$ とおく。$\partial K_n\subset\partial D_n\subset\mathrm{int}B\subset B$ かつ $K_n\cup\mathrm{int}B\subset D_n\cup B$ であるから, $\mathrm{int}B$ を ∂K_n の近傍とすることにより (c) の仮定が成り立つ。 □

4 例

例 1. 定理 *2* の *(d)* において, 条件 *(i)* “∂D_n は連結” を外すことは出来ない。すなわち, *(d)* の *(i)* 以外の条件は成り立つが, A が R の点を弱分離しない例が存在する。

Proof. Myrberg の例 ([3]) として知られているリーマン面 R を用い, $A=H^\infty(R)$ とし

て例を構成する。a_n, b_n を $0 < a_{n+1} < b_{n+1} < a_n < b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ および $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ をみたす実数列とし，R を穴あき円板 $\Delta_0 = \{0 < |z| < 1\}$ の 2 葉の被覆面で $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ の点の上で分岐点を持つリーマン面とする。$\pi : R \to \Delta_0$ を射影写像，$C_r = \{|z| = r\}$ とし，さらに $a_n \le r \le b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ のとき $\pi^{-1}(C_r)$ が連結になり，$b_{n+1} < r < a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ および $b_1 < r < 1$ では $\pi^{-1}(C_r)$ が 2 つの成分を持つように R を構成する。このとき R 上のすべての有界正則関数は任意の $z \in \Delta_0$ の逆像 $\pi^{-1}(z)$ で同じ値を取り，従って $H^\infty(R)$ は R の点を弱分離しない。

c_n, d_n, s_n, t_n を $b_{n+1} < c_n < d_n < a_n$, $b_1 < s_n < t_n < s_{n+1} < t_{n+1} < 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ かつ $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n = 1$ をみたすようにとる。R の連結開集合列 $\{D_n\}$ を ∂D_n が 4 つの成分を持ち，そのそれぞれが，$r = c_n, d_n, s_n, t_n$ に対する $\pi^{-1}(C_r)$ の 1 つの成分になるように取ることが出来る。なおこのとき $r = c_n$ と $r = d_n$ に対する $\pi^{-1}(C_r)$ の成分は R の異なる sheet 上にとる必要がある。$r = s_n$ と $r = t_n$ に対しても同様である。この R と $\{D_n\}$ に対して，作り方から定理 2 (d) の条件 (ii),(iii) はみたす。また Δ_0 における座標関数を z としたとき，$H^\infty(R)$ が $z \circ \pi$ を含むことから，条件 (iv) をみたすこともわかる。 □

例 2. *定理 2 の (d) において，条件 (iv) の "ある近傍の" を取って (iv) "A は ∂D_n の点を分離する" におきかえることは出来ない。すなわち，このようにおきかえて (d) の条件は成り立つが，A が R の点を弱分離しない例が存在する。*

Proof. 例 1 のリーマン面を，$\{s_n\}$ および $\{t_n\}$ の点の上にも分岐点を持つように修正し，あらためてそれを R で表す。やはり R 上のすべての有界正則関数は任意の $z \in \Delta_0$ に対し $\pi^{-1}(z)$ で同じ値を取るので，$H^\infty(R)$ は R の点を分離しない。

$\Gamma_{n,1}$ を R 上の Jordan 閉曲線で，$\pi(\Gamma_{n,1})$ が円 C_{a_n} になるするものとする。また $\Gamma_{n,2}$ を R 上の Jordan 閉曲線で，$\pi(\Gamma_{n,2})$ が実軸上の線分 $[-b_n, a_n]$ を直径とする円になるものとする。さらに $\Gamma_{n,1}$, $\Gamma_{n,2}$ は $R \setminus (\Gamma_{n,1} \cup \Gamma_{n,2})$ が相対コンパクトな成分を持たないようにとる。同様に $\Gamma_{n,3}$, $\Gamma_{n,4}$ をその π による像がそれぞれ円 C_{s_n} および $[-t_n, s_n]$ を直径とする円で $R \setminus (\Gamma_{n,3} \cup \Gamma_{n,4})$ が相対コンパクトな成分を持たないようにとる。R の連結開集合 $\{\tilde{D}_n\}$ を $\partial \tilde{D}_n$ が 2 つの成分 $\Gamma_{n,1} \cup \Gamma_{n,2}$ および $\Gamma_{n,3} \cup \Gamma_{n,4}$ を持つようにとれる。これら 2 つの成分を，端点を除き $\tilde{D}_n$ に含まれる Jordan 弧 L_n で結ぶ。ただし L_n は $\pi(L_n)$ が線分 $[a_n, s_n]$ に一致するようにとる。$D_n = \tilde{D}_n \setminus L_n$ とおくと，$\partial D_n = \Gamma_{n,1} \cup \Gamma_{n,2} \cup L_n \cup \Gamma_{n,3} \cup \Gamma_{n,4}$ であり，定理 2 (d) の条件 (i),(ii),(iii) および条件 "$A\,(= H^\infty(R))$ は ∂D_n の点を分離する" をみたす。 □

参考文献

[1] E. Bishop: *Analyticity in certain Banach algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **102** (1962), 507-544.

[2] T. W. Gamelin and M. Hayashi: *The algebra of bounded analytic functions on a Riemann surface*, J. Reine Angew. Math. **382** (1987), 49–73.

[3] P. J. Myrberg: *Über die analytische Fortsetzung von beschränkten Funktionen*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser A.I. No. **58** (1949), 7 pp.

[4] J. Narita: *Separation and Weak Separation on Riemann Surfaces*, to appear

[5] H. L. Royden: *Algebras of bounded analytic functions on Riemann surfaces*, Acta Math. **114** (1965), 113–142.

Department of Mathematics
Daido Institute of Technology
Takiharu, Minami, Nagoya 457-8530, Japan