数理解析研究所講究録
1050巻 1998年 29-40

代数曲面の dihedral covering の存在に関する条件について

高知大. 理　徳永浩雄 (Hiroo TOKUNAGA)

イントロダクション

この稿を通し、基礎体はすべて複素数体 C とする. また、単に曲面といえば、非特異代数曲面を表わすものとする.

Σ は代数曲面, S は正規曲面で $\pi : S \to \Sigma$ は finite morphism とする. まず、定義から始めよう.

定義 0.1. $\pi : S \to \Sigma$ が dihedral covering ($\mathcal{D}_{2n}$ covering) とは,
(i) π は Galois covering,
(ii) Galois 群 $Gal(S/\Sigma)$ は $\mathcal{D}_{2n} = \langle \sigma, \tau | \sigma^2 = \tau^n = (\sigma\tau)^2 = 1 \rangle$ に同型.

dihedral covering に限らず、分岐被覆に関する basic quetsion を述べるため branch locus の概念を導入する.

定義 0.2. Y は非特異射影多様体、X は正規射影多様体で、$\pi : X \to Y$ は finite morphism とする. π の branch locus、$\Delta(X/Y)$、とは以下のようにして定義される Y の部分集合のことである.

$$\Delta(X/Y) := \{y \in Y | \sharp \left(\pi^{-1}(y)\right) < \deg \pi\}$$

上記の定義の仮定のもとでは $\Delta(X/Y)$ は余次元 1 の代数的部分集合になることが知られている.

さて、dihedral covering に関する基本的な問題は以下のように定式化される.

問題 1 B 上の被約因子. B に沿って分岐する dihedral covering が存在するための条件を与えよ.

上記の問題は漠然としすぎているので問題をもう少し specific にしたものを考える.

問題 2 問題 1 の仮定の下でさらに B は高々 simple singularity しか持たず、B の非特異な部分にそった分岐指数が 2 であるものにが存在するための条件を与えよ.

以下この報告ではもっぱら問題 2 のみを取り扱う. この問題は Galois 群がもっとも簡単な場合である 3 次対称群 $\mathcal{S}_3$ のときですら結構微妙である. 以下の例はその微妙さを表わしている.

例 **0.3** B_1, B_2 はともに既約な平面 6 次曲線で共に 3 つの e_6 型特異点 ((3, 4) カスプ) を持ちつぎの条件を満たす:

(i) B_1 と各特異点で 4 重に交わる 2 次曲線 C が存在する．

(ii) B_2 に関しては上記の様な 2 次曲線は存在しない．

このとき、B_1 に沿って分岐する $\mathcal{S}_3$ covering は存在するが、B_2 に沿って分岐する $\mathcal{S}_3$ covering は存在しない．

([T2] 参照)

例 0.3 の曲線のペア (B_1, B_2) に関しては$\pi_1(\mathbf{P}^2 \setminus B_1) \not\cong \pi_1(\mathbf{P}^2 \setminus B_2)$ が成立していることに注意されたい．このようなペアは Zariski pair と呼ばれている．

dihedral covering の存在条件を考える副産物として上記のような Zariski pair の例がいろいろと見つかっている（[T4], [T5] 参照）

さてこの報告の中心となる主張は例 0.3 のような微妙なものがある一方で，特異点のタイプに関するデータさえ与えられれば dihedral covering の存在がわかるような場合もあるというものである．その結果を性格に述べるため少し準備が必要である．

代数曲面 S に対しその Néron-Severi 群を $NS(S)$ で表わす．$NS(S)$ は S 上の曲線が生成する自由群を代数的同値という関係で割って得られる剰余群である．この群はまたつぎの様にして得られる群に等しいこともわかっている：

exponential sequence

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S^* \to 0$$

から得られるコホモロジー完全系列において

$$NS(S) = Im\left(H^1(S, \mathcal{O}_S^* \to H^2(S, \mathbf{Z})\right)$$

と置いたもの．

さて，問題 2 を考える際には次の条件を仮定してよいことがわかっている（[T1] 参照）．

B に沿って分岐する double covering $f' : Z' \to \Sigma$ が存在する．

$g : Z \to Z'$ は Z' の特異点解消、$f : Z \to \Sigma$ は合成写像 $f' \circ g$ とする．以下ではつねに次を仮定する．

$(*)$ $NS(Z)$ は torsion-free.

仮定 $(*)$ は例えば $\Sigma = \mathbf{P}^2$ などのときは満たされている（このことは最後の節で解説する）．$(*)$ の仮定のもとで $NS(Z)$ は格子の構造をもつ．また、格子 L に対し、その交点行列の行列式を $discL$ で表す．

つぎに $NS(Z)$ の部分群 T を以下のように定義する．

$$T = \ f^*NS(\Sigma) \text{ 及び、} g \text{ の例外因子で生成される部分群}$$

とおく．以上の準備の下、我々の主結果は以下の通り：

定理 0.4. n は奇数．Σ、B、Z は上の通りとする．
(i) $NS(Z)/T$ が n-torsion をもち、
(ii) $gcd(n, disc(f^*NS(\Sigma)) = 1$ ならば
B に沿って分岐指数 2 で分岐する $\mathcal{D}_{2n}$ covering が存在する．

上記の定理の条件はチェックしずらいところがあるのでもう少し使いやすい形の主張を以下で述べるがそのための記号の準備をしておく．

$x \in \mathrm{Sing}(B)$ に対し、$\mu_x = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{x, y\}/(f_x, f_y)$ とおき、

$$\mu(B) = \sum_{x \in \mathrm{Sing}(B)} \mu_x$$

定理 0.5. p は奇素数とする．自然数 l を以下のように定義する．
$p = 3$ のとき、l は a_{3k-1} 型及び e_6 型の特異点の数．
$p \geq 5$ のとき、l は a_{pk-1} 型特異点の数．
もし、$p \not| \mathrm{disc}(\Sigma)$、かつ

$$l > b_2(Z) - \mathrm{rank} NS(\Sigma) - \mu(B)$$

(ただし、$b_2(Z)$ は Z の第 2 Betti 数) ならば、B に沿って分岐指数 2 で分岐する $\mathcal{D}_{2p}$ covering が存在する．

定理 4.2 で分かるように例 0.3 から定理 0.5 の条件はある意味で best possible であることを示している．この報告の構成は以下の通りである．

まず、$\mathcal{D}_{2n}$ covering の構成法に関する簡単な要約を述べ、その後、定理 0.4、0.5 の証明のを述べる．そして最後の節で、$\mathbf{P}^2$ の $\mathcal{D}_{2p}$ covering について考察する．

§1 準備

この節は 3 つの部分からなっている．どれもみなあとで必要になる事実に関する要約である．

1. D_{2n} (n: odd) coverings

この稿を通して、$\mathcal{D}_{2n}$ は 2 面体群 (n は奇数)、すなわち 2 つの元 σ、τ で生成され関係式 $\sigma^2 = \tau^n = (\sigma\tau)^2 = 1$ を持つ群を表わすものとする．

$\pi : X \to Y$ は $\mathcal{D}_{2n}$ covering とする．$\mathbf{C}(X)^\tau$ で τ による不変体を表わす．$\mathbf{C}(X)^\tau$ は $\mathbf{C}(Y)$ の 2 次拡大であり、$D(X/Y)$ で Y の $\mathbf{C}(X)^\tau$-normalization を表わすものとすれば $D(X/Y)$ は Y の double covering で次の可換図式を満たす：

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ & \searrow \beta_2 & \\ \downarrow \pi & & D(X/Y) \\ & \swarrow \beta_1 & \\ Y & & \end{array}$$

ここで、$\beta_1 : D(X/Y) \to Y$ は double covering の写像であり、$\beta_2 : X \to D(X/Y)$ は $D(X/Y)$ の n-fold cyclic covering 写像である．これらの記号は以下固定して用いるものとする．次の命題は $\mathcal{D}_{2n}$ covering の存在を証明するうえで基本的である．

Proposition 1.1. n は 3 以上の奇数とする．$f : Z \to Y$ は Y の非特異 finite double covering とする．この double covering の被覆変換を σ で表わす．D は Z 上の effective divisor で以下の条件を満たすものとする．

(i) D と $\sigma^* D$ は共通成分を持たない、

(ii) D の既約分解を $D = \sum_i a_i D_i$ $a_i > 0$ と表わすと $n \not| a_i$ かつ a_i すべてと n の最大公約数は 1、

(iii) Z 上の直線束 L で $D - \sigma^* D \approx nL$ を満たすものが存在する．

このとき、Y の $\mathcal{D}_{2n}$ covering、X、で次の条件を満たすものが存在する：

(a) $D(X/Y) = Z$、(b) β_2 の branch locus、$\Delta(X/Z)$、は $Supp(D + \sigma^* D)$ に等しいすなわち、$\Delta(X/Y) = \Delta(Z/Y) \cup f(Supp(D))$.

この命題は [T1] Proposition 0.4 の簡単な modification である．詳しい証明は [T6] に譲ってここではステイトメントを述べるだけにとどめる．

2. Lattice theory からの準備

ここでは lattice の理論から後で必要な結果や記号などを準備する．

L は lattice、すなわち、

(i) L は有限生成の自由 $\mathbf{Z}$ 加群で、

(ii) L 上で非退化な pairing $\langle \, , \, \rangle$ が定義されているものとする．

与えられた lattice L に対して、$discL$ は交点行列の行列式を表すものとする．$discL$ は基底の取り方に依らないことに注意する．$discL = \pm 1$ を満たすとき、L は unimodular であると呼ばれる．

J は L の sublattice とする． J の pairing $\langle \, , \, \rangle$ に関する直交補空間を $J^{\perp}$ で表す．

lattice L に対してその dual lattice を $L^\vee$ で表す． pairing を用いて L は $L^\vee$ に階数が等しい sublattice として埋め込めることに注意する．従って quotient group $L^\vee/L$ は有限アーベル群となる．これを G_L で表す．

以下の補題は L が *even* unimodular という条件のもとでよく用いられるが、主張そのものは任意の unimodular lattice に対して成り立つ（[E] 参照）．

補題 1.2. L は unimodular lattice とする． J_1 及び J_2 は L の sublattice で $J_1^\perp = J_2$ and $J_2^\perp = J_1$ を満たすものとする． このとき、

$$G_{J_1} \cong G_{J_2}.$$

L の sublattice M of L は L/M が torsion-free となるとき、primitive と呼ばれる．

例 **1.3.** S は代数曲面とする． $H^2(S,\mathbf{Z})/NS(S)$ は torsion free なので、$NS(S)$ が torsion-free ならば $H^2(S,\mathbf{Z})$ は torsion-free であり、また、その逆も正しい．従って、定理 0.4、0.5 の代数曲面 Z に対して、$H^2(Z,\mathbf{Z})$ は torsion-free である．実際、$H^2(Z,\mathbf{Z})$ は 交点形式に関して unimodular lattice であり、$NS(S)$ はその primitive な sublattice である．

3. $NS(Z)/T$ の torsion part

この部分ではイントロダクションと同じ記号を用いる．$NS(Z)$ は常に torsion free とする．まず、つぎの補題から始めよう．

補題 1.4. $(NS(Z)/T)_{tor} = T^{\perp\perp}/T$.

Proof. 定義から $(NS(Z)/T)_{tor} \subset T^{\perp\perp}/T$、であり、例 1.3 から $T^{\perp\perp} \subset NS(Z)$ である．これから補題が従う．

intersection pairing を用いれば $T^{\perp\perp}$ は $T^\vee$ の sublattice とみなせる．補題 1.4 から $NS(Z)/T$ は G_T の部分群となる．したがって、torsion subgroup を詳しく知るためには G_T をまず詳しく知ることが重要である．

x は B の特異点とする．

$R_x = f^{-1}(x)$ の exceptional divisor の既約成分で生成された T の部分群

とおくと T は以下のような分解を持つことが分かる：

$$T \cong \tilde{f}^* NS(\Sigma) \oplus \oplus_{x\in Sing(B)} R_x.$$

この分解を用いれば同型 $T^\vee/T \cong G_{\bar{f}^*NS(\Sigma)} \oplus \oplus_{x\in Sing(B)} G_{R_x}$ を得る．ここで各直和因子 G_{R_x} については良く知られているようにつぎの事実が成立する．

Fact 1.5.

The type of x	the type of $f'^{-1}(x)$	G_{R_x}
a_n	A_n	$\mathbf{Z}/(n+1)\mathbf{Z}$
d_n, n: odd	D_n	$\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$
d_n, n: even	D_n	$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\oplus 2}$
e_6	E_6	$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$
e_7	E_7	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
e_8	E_8	$\{0\}$

この報告では n が奇数の場合のみを扱うので必要となる特異点のタイプは a_n と e_6 のみである．見通しよく考えるため、R_x、$R_x^\vee$ ともに $R_x \otimes \mathbf{Q}$ の部分群と考え、G_{R_x} の生成元を与える $\mathbf{Q}$-因子がどのようなものかを考える．そのため、A_n 型及び E_6 型特異点の例外因子の既約成分を Figure 1 のようにラベリングする．

(Figure 1)

補題 1.6. G_{R_x} は以下の $x = a_b$ (resp. $x = e_6$) に対しては $\mathbf{Q}$-divisor $\frac{D_x}{b+1}$ (resp. $\frac{D_x}{3}$) で生成される：

$$D_x = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\frac{b}{2}}(b+1-k)(\Theta_k - \Theta_{b-k}) & x = a_b \ b\text{: even} \\ \sum_{k=1}^{\frac{b-1}{2}}(n+1-k)(\Theta_k - \Theta_{b-k}) + \frac{b+1}{2}\Theta_{\frac{b+1}{2}} & x = a_b \ b\text{: odd,} \end{cases}$$

$$D_x = (\Theta_1 - \Theta_5) + 2(\Theta_2 - \Theta_6) \quad x = e_6.$$

証明．R_x の交点行列の逆行列を用いれば上記事実はしたがう．

注意 1.7. σ は double covering $f : Z \to \hat{\Sigma}$ の covering transformation. このとき、A_n 型特異点の例外因子については $\sigma^*\Theta_k = \Theta_{n-k}$ $(1 \le k \le [\frac{n}{2}])$、$E_6$ 型特異点の例外因子については$\sigma^*\Theta_1 = \Theta_5$ and $\sigma^*\Theta_2 = \Theta_6$ が成立する．

§2 定理 0.4 の証明

まず $\hat{\Sigma}$ 上の diherdral covering の問題に置き換えることからはじめる．$\hat{\Sigma}$ の $\mathcal{D}_{2n}$ covering、$\hat{S}$、で以下の条件を満たすものがあったと仮定する．

(i) $D(\hat{S}/\hat{\Sigma}) = Z$、

(ii) $\Delta(\hat{S}/Z) \subset$ *the support of the exceptional divisors of* $g: Z \to Z'$.

すると $q \circ \hat{\pi} : \hat{S} \to \Sigma$ の Stein factorization S がもとめるべき $\mathcal{D}_{2n}$ covering となる．従って 命題 1.1 から以下のことを証明すればよい：

命題 2.1. Z 上の因子 D と line bundle L で以下の条件をみたすものが存在する．

(i) $Supp(D + \sigma^* D) \subset Supp(\textit{the exceptional divisor of } g)$

(ii) (D, L) 命題 1.1 の条件を満たす．

いくつかのステップに分けて命題 1.1 を証明する．

ν は準同型 $T^{\perp\perp} \to T^{\vee} \to G_T$ を表すものとする． L_1 は $T^{\perp\perp}$ の元で $T^{\perp\perp}/T$ で n-torsion を与えるものとする．$G_T \cong G_{\bar{f}^* NS(\Sigma)} \oplus \oplus_{x \in Sing(B)} G_{R_x}$ であるから、

$$\nu(L) = \Big(\alpha, (\beta_x)_{x \in Sing(B)}\Big) \in G_{\bar{f}^* NS(\Sigma)} \oplus \oplus_{x \in Sing(B)} G_{R_x}.$$

とおく．

補題 2.2. $\alpha = 0$.

証明．$\sharp G_{\bar{f}^* NS(\Sigma)} = discf^* NS(\Sigma)$ と仮定から $\alpha = 0$.

補題 2.3. x が a_n 型、 e_6 型いずれとも異なれば $\beta_x = 0$.

証明．事実 1.5 より直ちに従う．

簡単のため、$r_x = \sharp(G_{R_x})$ とおく． ここで、$x = a_b$ のとき、 $r_x = b+1$、$x = e_6$ のとき $r_x = 3$ であることに注意する．

補題 2.4. $\beta_x \neq 0$ とし、 s_x はその位数とする．s_x は r_x、n_x の約数であるから $r_x = s_x t_x$、$n = s_x u_x$ とおく． このとき、整数 k_x、ただし、$0 < k_x < s_x$, $(k_x, s_x) = 1$ で以下の性質を満たすものがある：

$$\beta_x = \text{ the class of } \tfrac{k_x}{s_x} D_x,$$

ただし、 D_x は補題 1.6 の因子である．

証明． $\beta_x \neq 0$ であるから、 x は a_n 型または、 e_6 型である．この場合、 G_{R_x} は補題 1.6 にあるような生成元により生成される巡回群であり、これから、我々の補題が従う．

補題 2.4 から

$$L_1 \approx_{\mathbf{Q}} \sum_{x \in Sing(B)} \frac{k_x}{s_x} D_x \bmod T.$$

であり、これは T の元 L_2 で

$$L_1+L_2 \approx_{\mathbf{Q}} \sum_{x\in Sing(B)} \frac{k_x}{s_x} D_x.$$

を満たすものが存在することを意味する．

補題 2.5. $\frac{nk_x}{s_x}$ $(x \in Sing(B))$ の最大公約数は 1 である．

証明. $d = gcd\left((\frac{nk_x}{s_x})_{x\in SingB}\right)$ とおく．すると $NS(Z)$ は torsion-free であるから、$\frac{n}{d}(L_1+L_2) \in T$ である．これは$\nu(L_1+L_2)=\nu(L_1)$ の位数が $\frac{n}{d}$ の約数であることを意味しているが、仮定から$\nu(L_1)$ の位数は n であるから $d=1$ となる．

以上の準備のもと、Z 上の因子 D を以下のように定める：

$\beta_x \neq 0$、$x=a_b$、b: 偶数のとき、

$$D_x^+ = \frac{nk_x}{s_x}\sum_{k=1}^{\frac{b}{2}}(b+1-k)\Theta_k.$$

$\beta_x \neq 0$、$x=a_b$、b: 奇数のとき、

$$D_x^+ = \frac{nk_x}{s_x}\sum_{k=1}^{\frac{b-1}{2}}(b+1-k)\Theta_k.$$

$\beta_x \neq 0$、$x=e_6$ のとき、

$$D_x^+ = \frac{nk_x}{3}\Theta_1 + \frac{2nk_x}{3}\Theta_2.$$

上の様に各 D_x を定めて、$D=\sum_{x\in Sing(B)} D_x^+$ とおくと、

$$D-\sigma^*D \approx n(L_1+L_2-\sum_{x=a_b,b:odd,\beta_x\neq 0}\frac{k_xr_x}{2s_x}\Theta_{\frac{r_x}{2}}).$$

となる．ここで、$L=L_1+L_2-\sum_{x=a_b,b:odd,\beta_x\neq 0}\frac{k_xr_x}{2s_x}\Theta_{\frac{r_x}{2}}$ とおく．すると、pair (D,L) は命題 2.1 の条件をみたす．

§3 定理 0.5 の証明

定理 0.4 より $NS(Z)/T$ に p-torsion が存在することを示せば十分である．用いる道具は Nikulin theory ([N]) である．この論法は Miranda-Persson [MP] §4 にあるものを少しかえたものである．同様の論法は [X] にも見られる．

p-torsion in $T^{\perp\perp}/T$ に p-torsion がないと仮定すると、

$$S_p(G_T) \cong S_p(G_{T^{\perp\perp}}),$$

ただし、 $S_p(G)$ G の p-Sylow 群である．補題 1.6 と 例 1.7 より、

$$G_{T^\perp} \cong G_{T^{\perp\perp}}.$$

であるから $S_p(G_{T^{\perp\perp}})$ の生成元の数 $\leq rankT^\perp = b_2(Z) - rankT$．一方、仮定から $S_p(G_{T^{\perp\perp}})$ の生成元の数 $> l > b_2(Z) - rankT$．これは矛盾である．

§4 応用：$\mathbf{P}^2$ の $\mathcal{D}_{2n}$ coverings.

記号は今までのものを用いる．

補題 4.1. (i) Σ が単連結、かつ
(ii) linear system $|B|$ は base point かつ fixed component free とする．
このとき、 $\pi_1(Z) = 0$． 特に $NS(Z)$ は torsion free.

証明．B_1 は $|B|$ の非特異な元とする．このとき、Σ の smooth double covering Z_1 で B_1 に沿って分岐するものが存在する．Brieskorn's results の 有理 2 重点の simultaneous resolution に関する結果 ([B1], [B2]) から、Z は Z_1 の変形であるから、Z は Z_1 に同相である．[C] の命題 1.8 より Z_1 は単連結であるから Z は単連結である．

$\Sigma = \mathbf{P}^2$ のとき、補題 4.1 は常に成立する．これから、[T3] の定理 0.6 の一般化が得られる：

定理 4.2. p は与えられた素数．B 次数 $2m$ の平面曲線で simple singularities しか持たないものとする． l は定理 0.5 で与えたものとする．$l > 4m^2 - 6m + 3 - \mu$ ならば、$\mathbf{P}^2$ の $\mathcal{D}_{2p}$ covering で B に沿って分岐指数 2 で分岐するものが存在する．

証明． 堀川の double covering の canonical resolution に関する結果 ([H]) より、$b_2(Z) = 4m^2 - 6m + 3$．$|disc\tilde{f}^*NS(\mathbf{P}^2)| = 2$ ゆえ、定理 0.5 から 定理 4.2 が従う．

例 4.3. (i) $p = 3$ で $m = 2$ のとき．B は平面 4 次曲線で特異点 $3a_2$ を持つものとする．すると、$\mathcal{D}_6$ covering で B に沿って分岐指数 2 で分岐するものが存在する．これは、 Zariski の結果：$\pi_1(\mathbf{P}^2 \setminus B)$ が非可換 ([Z]) の別証を与えている．

(ii) $p = 3$ で $m = 2$ のとき． B は [T3]、§6 の表にある 6 次曲線とする．すると、$\mathcal{D}_6$ covering で B に沿って分岐指数 2 で分岐するものが存在する． [T3] では、最初の 7 つしか存在が証明されてないことに注意.

References:

[A] E. Artal Bartolo: Sur les couples de Zariski, J. Alg. Geom., **3** (1994), 223-247.

[B1] E. Brieskorn: Über die Auflösung gewisser Singularitäten von holomorpher Abbildungen, Math. Ann **166**, 76-102 (1966).

[B2] E. Brieskorn: Die Auflösung der rationalen Singuraritäten holomorpher Abbildungen, Math. Ann. **178**, 255-270 (1968).

[C] F. Catanese: On the moduli spaces of surfaces of general type, J. Diff. Geom. **19**, 483-515 (1984).

[E] W. Ebeling: Lattices and Codes, Vieweg, 1994.

[H] E. Horikawa: On deformation of quintic surfaces, Invent. Math. **31**, 43 - 85 (1975).

[L] A. Libgober: Alexander polynomial of plane algebraic curves and cyclic multiple planes, Duke Math. J. **49** 833-851 (1982).

[MP] R. Miranda and U. Persson: Configurations of I_n fibers on elliptic K3 surfaces Math. Z. **201,** 339 - 361(1989).

[Na] M. Namba: Branched coverings and algebraic functions, Pitman Research Note in Math., **161** (1987).

[Ni] V.V. Nikulin: Integral symmetric bilinear forms and some of their applications, Math. USSR Izv. **14** 103-167 (1980)

[Pa] R. Pardini: Abelian covers of algebraic varieties, J. reine angew. Math. **417** 191-213 (1991)

[Pe] U. Persson: Chern Invariants of Surfaces of General Type, Comp. Math. **43**, 3-58 (1981).

[PT] R. Pardini and F. Tovena: On the fundamental group of an abelian cover, Int. J. of Math. **6** 767-789 (1995).

[S] T. Shioda: On the Mordell-Weil lattices, Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli **39**, 211 - 240 (1990).

[T1] H. Tokunaga: On dihedral Galois coverings, Canadian J. of Math., **46**, 1299 - 1317 (1994).

[T2] H. Tokunaga: A remark on Artal's paper, Kodai Math. J., **19**, 207-217 (1996).

[T3] H. Tokunaga: Dihedral coverings branched along maximizing sextics, Math. Ann. **308**, 633-648 (1997).

[T4] H. Tokunaga: Some examples of Zariski pairs arising from certain elliptic K3 surfaces, Math. Z., to appear.

[T5] H. Tokunaga: Some examples of Zariski pairs arising from certain elliptic K3 surfaces II: Degtyarev's conjecture, preprint.

[T6] H. Toknaga: Dihedral coverings of algebraic surfaces, preprint.

[X] G. Xiao: Galois covers between K3 surfaces, Ann. Inst. Fourier **46**, 73-88 (1996).

[Z] O. Zariski: On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curves, Amer. J. Math. **51**, 305-328 (1929).

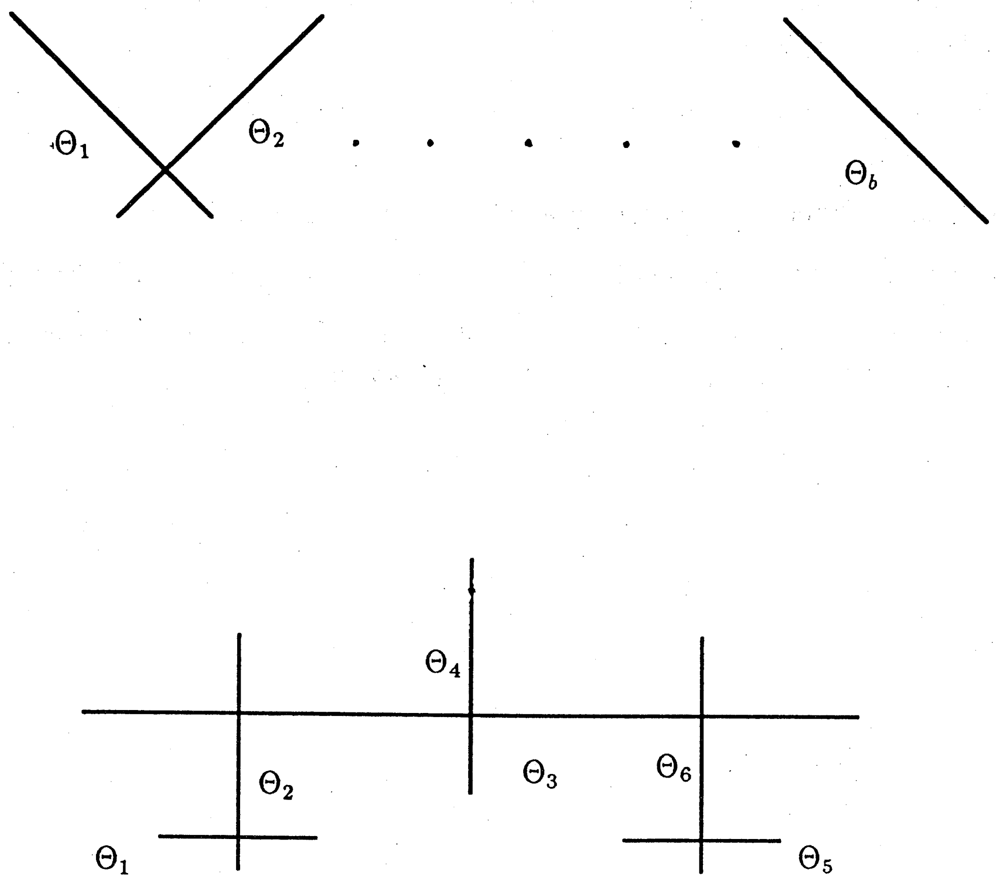
Θ_1
Θ_2
Θ_b
Θ_4
Θ_2
Θ_3
Θ_6
Θ_1
Θ_5

Figure 1