

## On Weak Hironaka Theorem—Part 2

都立大理 ト部東介 (Tohsuke Urabe)

最近

F. A. Bogomolov and T. G. Pantev

D. Abramovich and A. J. de Jong

が独立に「標数 0 の射影代数多様体の非特異モデルの存在」に対して新しい観点からの証明を与えた。

Bogomolov and Pantev, *Mathematical Research Letters* 3, 299-308 (1996)

Abramovich and de Jong, *J. Alg. Geom.* vol.6, 789-801 (1997)

$Y$  を射影代数多様体とする。広中によれば次の条件を満たす写像  $\varphi: Y' \rightarrow Y$  が存在する。以下  $\text{Sing } Y$  により  $Y$  の特異点集合を表す。

- (i)  $Y'$  は非特異代数多様体。  $\varphi$  は双有理写像。
- (ii)  $\varphi^{-1}(\text{Sing } Y)$  は  $Y'$  内の正規交差因子。その因子の各既約成分は非特異。
- (iii)  $\varphi$  は非特異既約部分多様体を中心とするブローアップの有限個の合成写像。
- (iv)  $\varphi$  の制限写像  $Y' - \varphi^{-1}(\text{Sing } Y) \rightarrow Y - \text{Sing } Y$  は同型写像。

新しい証明は (iii) と (iv) を主張しない。そこで「Weak Hironaka Theorem」と呼ばれる。一方、広中理論にも欠点はある。具体的な特異点に対して  $\varphi$  をどのように構成するのかの手順が極めて判りにくい点である。

なおこの講演の Part 1 は去る 10 月 15 日 (水) 13:00 - 14:20 に鹿児島大学におけるワークショップにおいて講演した。

大ざっぱな基本アイデアとして Bogomolov と Pantev は有限写像  $f: Y \rightarrow X$  ( $Y$  は特異点を持つ。  $X$  は非特異。) で性質の良いものを構成する。Abramovich と de Jong

は有限写像  $\psi: Z \rightarrow Y$  ( $Z$  は構造が簡単な特異点のみを持つ。  $Y$  は一般の特異点を持つ。) で性質の良いものを構成する。非特異空間あるいは構造が簡単な特異点のみを持つ空間を置く場所が下と上のちょうど逆である。Bogomolov と Pantev のものは広中以前の Jung, Zariski, Abhyankar らの 2 次元特異点解消理論の高次元版と考えられる。基本的考え方は以下の通り。まず特異点を持つ空間  $Y$  を高次元射影空間内に埋め込む。そして  $Y$  から同じ次元の射影空間  $X = \mathbb{P}^n$  への射影を考える。一般的な射影を取れば射影  $Y \rightarrow X$  は有限写像となる。次に  $Y \rightarrow X$  の分岐点集合  $B$  を見る。  $B$  は  $X$  の部分集合であり  $\dim B < \dim Y$ 。次元についての帰納法を適用し非特異空間からの双有理写像  $X' \rightarrow X$  でそれによる  $B$  の逆像が正規交差因子となるものを構成する。  $\dim Y = \dim X = 2$  のときにはこの構成が可能であることは良く知られている。高次元の場合には巧妙なトリックを用いる。  $Y \rightarrow X$  と  $X' \rightarrow X$  のファイバー積  $Y' \rightarrow X'$  を  $Y \rightarrow X$  と置き換えて考えれば、はじめから  $B$  は非特異空間  $X$  上の正規交差因子であると仮定できる。このとき  $Y$  の特異点は必ず  $B \subset X$  の逆像に属し、構造の比較的簡単な特異点になる。このようにしておいて  $Y$  の特異点を解消する。この考え方は次元についての帰納法を適用する仕組みが明解であり、上述の  $\phi$  を構成する方針が明解である。その点で広中理論に劣る点ばかりではないと言える。もともとどちらのグループの論文でも広中論文と比べれば論文の長さにおいて圧倒的な簡潔さであり、その点で優れているのは事実であろう。

Bogomolov と Pantev は最終段階で次の対象物に到達する。

$f: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  : 複素解析空間の芽の間の有限写像。  $D : X$  上の  $x_0$  を通る因子。

- (i)  $X$  は非特異。
- (ii)  $Y$  は正規。
- (iii)  $D$  は  $x_0$  で正規交差。
- (iv)  $f$  の制限  $Y - f^{-1}(D) \rightarrow X - D$  は非分岐。

$n = \dim X = \dim Y$ 、  $D_1, D_2, \dots, D_m$  を  $D$  の既約成分、  $x_1, x_2, \dots, x_n$  を  $X$  の  $x_0$  の近傍の局所座標系で  $1 \leq i \leq m$  について  $D_i$  は  $x_i = 0$  で定義されるようなものとする。

基本群  $\pi_1(X - D, *) \cong \mathbb{Z}^m$  を考え、ハルトグスの拡張定理を使えば次が判る。

- (1)  $Y - f^{-1}(D) \rightarrow X - D$  は必ずガロア被覆である。
- (2)  $f: Y \rightarrow X$  の  $D_i$  に沿った分岐指数  $e_i$  が定義できる。
- (3)  $(Z, z_0) = (\mathbb{C}^n, 0)$ 、  $u_1, u_2, \dots, u_n$  を  $Z$  上の  $z_0$  での局所座標、  $g: (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$  を

$g(u_1, u_2, \dots, u_n) = (u_1^{e_1}, u_2^{e_2}, \dots, u_m^{e_m}, u_{m+1}, \dots, u_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  で定義される写像とする。すると  $fh = g$  を満たす写像  $h: (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$  が存在する。

$$\begin{array}{ccc} (Z, z_0) & \xrightarrow{h} & (Y, y_0) \\ \varepsilon \downarrow & & \downarrow f \\ (X, x_0) & \equiv & (X, x_0) \end{array}$$

(4) 言うまでもなく  $g$  の被覆変換群は

$$G = \pi_1(X - D) / g_* (\pi_1(Z - g^{-1}(D))) \cong (\mathbb{Z} / e_1 \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} / e_2 \mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{Z} / e_m \mathbb{Z})$$

であるが、ある部分群  $\Gamma_0 \subset G$  について  $Y \cong Z / \Gamma_0$  (商多様体)。また、

$$\Gamma_0 \cap \{0\} \times \dots \times \{0\} \times (\mathbb{Z} / e_i \mathbb{Z}) \times \{0\} \times \dots \times \{0\} = \{0\} \quad (1 \leq i \leq m)$$

(i - th component)

(5)  $f: Y \rightarrow X$  の被覆変換群  $G / \Gamma_0$  は  $m$  個の有限巡回群の直積に同型である。特にそれはアーベル群である。

(6)  $m = 1$  ならば  $\Gamma_0 = \{0\}$ 、そこで  $Y$  は非特異。

(7)  $1 \leq i \leq m$  について  $f^{-1}(D_i) \subset Y$  は既約かつ正規である。とくに  $n = 2$  のときは  $f^{-1}(D_i)$  は非特異である。

(8)  $Y$  が非特異ならば  $f^{-1}(D)$  は正規交差因子である。

(9)  $Y$  の特異点解消をトーリック理論を用いれば構成できる。

上の (1)、(5)、(6)、(7)、(8) を覚えていて欲しい。

一般標数で上と同様の対象物を考えることは重要である。なぜなら、正標数での類似の設定  $f: Y \rightarrow X$  で  $Y$  の特異点解消の存在を示すことができれば、Bogomolov と Pantev の理論により次元についての帰納法が回転し、「正標数の射影代数多様体の非特異モデルの存在」を示すことができるからである。

以下次の記号を使う。

$k$ : 代数閉体

$$p = \begin{cases} \text{char } k & (\text{if char } k > 0) \\ 1 & (\text{if char } k = 0) \end{cases}$$

$n \geq 2, 1 \leq m \leq n$

$A = k[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$  (形式べき級数環)

$$D = \text{Spec}(A / x_1 x_2 \cdots x_m A)$$

$$D_i = \text{Spec}(A / x_i A) \quad (1 \leq i \leq m)$$

$K$ :  $A$  の商体。

**知られた事実 1.**  $L$  を  $K$  を含む体、 $B$  を  $L$  の元で  $A$  上整であるもの全体の集合 ( $A$  の  $L$  における整閉包) とする。  $[L:K] < \infty$  かつ  $L$  は  $K$  上分離的と仮定する。このとき

- (i)  $B$  は  $A$ -加群として有限生成。特に  $B$  はネーター環。
- (ii)  $B$  は完備かつ正規な局所環。

**知られた事実 2.** さらに写像  $f: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  は  $D$  の外で非分岐、すなわちその制限写像  $\text{Spec } B - f^{-1}(D) \rightarrow \text{Spec } A - D$  は非分岐な写像である、と仮定する。  $M$  を  $L$  の  $K$  上のガロア閉包、つまり、 $L$  を含む体で  $K$  上ガロア的である最小のもの、とする。そして  $C$  を  $A$  の  $M$  における整閉包とする。このとき  $\text{Spec } C \rightarrow \text{Spec } A$  は  $D$  の外で非分岐である。

ここでは Abhyankar による例をいくつか紹介する。 Shreeram Abhyankar, On the ramification of algebraic functions, Amer. J. Math. 77, 575-592 (1955). 上記の記号を使う。写像  $f: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  は  $D$  の外で非分岐であると仮定する。標数正での困難が標数 0 の場合と比べて非常に大きいことが判る。いずれの場合も  $n=2$ 。

**例 1.**  $m=2$ ,  $p=2$ ,  $x_1=X$ ,  $x_2=Y+X^6$ ,  $F=Z^5+XZ^2+YZ+X^4 \in A[Z]$ 。

$B=A[Z]/FA[Z]$ 。  $B$  が正規であることは  $F=\frac{\partial F}{\partial Z}=\frac{\partial F}{\partial X}=\frac{\partial F}{\partial Y}=0$  の共通解が

$X=Y=Z=0$  しかないことより判る。

$B$  の商体  $L$  は  $A$  の商体  $K$  上ガロア的でない。 ((1) 非成立!)

$G=\text{Gal}(M/K) \cong S_5$  (5次対称群) (非可解群!, (5) 非成立!)

$f^{-1}(D_1)$ ,  $f^{-1}(D_2)$  はともに2つの既約成分を持つ。 ((7) 非成立!)

$f^{-1}(D_2)$  の2つの成分のうち片方は特異点を持つ。 (さらに強く (7) 非成立!)

例 2.  $m=2, p=5, x_1=X, x_2=Y, F=Z^5+YZ^3+YZ^2+X \in A[Z]$ .

$$B = A[Z]/FA[Z].$$

$F$  に 1 次の項  $X$  があるから  $\text{Spec} B$  は非特異である。

$B$  の商体  $L$  は  $A$  の商体  $K$  上ガロア的でない。 ((1) 非成立!)

$G = \text{Gal}(M/K) \cong S_5$  (5次対称群) (非可解群!, (5) 非成立!)

$f^{-1}(D_1)$  は 2 つの既約成分を持つ。 ((7) 非成立!)

例 3.  $m=1, p:2$  以上の素数,  $x_1=X, x_2=Y, F=Z^p-X^{p-1}Z-Y^{p-1}$ .

$$B = A[Z]/FA[Z]. \quad F = \frac{\partial F}{\partial Z} = \frac{\partial F}{\partial X} = \frac{\partial F}{\partial Y} = 0 \Leftrightarrow X=Y=Z=0.$$

$m=1$  にもかかわらず  $X=Y=Z=0$  は  $\text{Spec} B$  の特異点である。 ((6) 非成立!)

この場合には  $B$  の商体  $L$  は  $A$  の商体  $K$  上ガロア的であり,  $\text{Gal}(L/K) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

$m=2$  と見なすと  $f^{-1}(\{Y=0\})$  は  $p$  個の既約成分  $Y=Z=0, Y=Z-X=0, Y=Z-\zeta X=0, Y=Z-\zeta^2 X=0, \dots, Y=Z-\zeta^{p-2} X=0$  ( $\zeta$  は 1 の原始  $(p-1)$  乗根。) を持つ。 ((7) 非成立!)

例 4.  $m=1, p:2$  以上の素数,  $x_1=X, x_2=Y, F=Z^p-X^{p-1}Z-Y$ .

$$B = A[Z]/FA[Z].$$

$F$  に 1 次の項  $-Y$  があるから  $\text{Spec} B$  は非特異である。

$f: \text{Spec} B \rightarrow \text{Spec} A$  の分岐点集合は  $X=0$  であるから  $m=1$  なのであるが, これは正規交差因子  $XY=0$  に含まれるので  $m=2$  と見なす。

$f^{-1}(\{X=0\})$  は集合  $X=Z^p-Y=0$  と一致する。これは既約で非特異である。

$f^{-1}(\{Y=0\})$  は  $p$  個の既約成分  $Y=Z=0, Y=Z-X=0, Y=Z-\zeta X=0, Y=Z-\zeta^2 X=0, \dots, Y=Z-\zeta^{p-2} X=0$  ( $\zeta$  は 1 の原始  $(p-1)$  乗根。) を持つ。従って  $f^{-1}(\{XY=0\})$  は正規交差因子でありえない。 ((8) 非成立!)

以上の例を見る限り標数正では状況はほとんど絶望的のように思えてくる。また,  $G = \text{Gal}(M/K)$  として,  $p$ -Sylow 部分群たちが  $G$  を生成するという性質を持つ非可換群は必ず実現できるという Abhyankar 予想が 1 次元の場合には既に証明されている。

M. Raynaud, Revêtements de la droite affine en caractéristique  $p > 0$  et conjecture d'Abhyankar, Invent. math. 116, 425-462 (1994)

David Harbater, Abhyankar's conjecture on Galois groups over curves, Invent. math 117, 1-25 (1994)

従って、我々の設定で、任意の単純群をガロア群  $G$  として実現できる。とんでもない単純群がガロア群になった場合、簡約の手段が無いようにも思える。

それにもかかわらず Abhyankar は正標数で 2 次元、3 次元の場合に射影代数多様体の非特異モデルの存在の証明に成功していることは注目に値する。