数理解析研究所講究録
1051 巻 1998 年 137-145

パッシブスカラーの相似変数とジョイントマルチフラクタル

電通大　生出伸一 (Shin-ichi Oide)
細川　巖 (Iwao Hosokawa)
航技研　山本稀義 (Kiyoshi Yamamoto)

1. はじめに

乱流は 3 次元的な非定常の流れである。従って、乱流を厳密に調べるには3次元的な流れ場の測定が必要になる。しかし、実際にはそのような測定は難しいため、一般的には一つの方向についてある量を測定し、1 次元サロゲートと呼ばれる手法を用いることで近似的な結果を得るということが行われている。この 1 次元サロゲートによって得られたエネルギー散逸率をコルモゴロフの相似変数に適用した場合と真のエネルギー散逸率を適用した場合の違いについて細川らが調べ、1 次元サロゲートにおける問題点を示している [1]。本研究では、航技研のNWTを用いて行なった空間格子点数 512^3 での等方性乱流の DNS により達成されたテイラーマイクロスケール・レイノルズ数 $R_\lambda \sim 160$, プラントル数 $\mathrm{Pr}=1.0$ の乱流場を基に、スカラー散逸における 1 次元サロゲートに関する検討をスカラーの相似変数について行った結果を示す。また、コルモゴロフの相似変数およびスカラーの相似変数の確率変数としての性質が分った場合にエネルギー散逸およびスカラー散逸の間欠的構造が定量的に分かっているとコルモゴロフの修正相似仮説やその拡張された関係を利用して速度構造関数や温度構造関数を知ることができる。そこで、エネルギー散逸とスカラー散逸のジョイントマルチフラクタル解析を行なった。

2. コルモゴロフの修正相似仮説と、そのスカラー場への拡張

Kolmogorov の修正相似仮説(RSH)[2]によると、スケール r だけ離れた 2 点間での速度差 $\Delta u(r)=u(x+r)-u(x)$ とそのスケール r の領域における局所平均エネルギー散逸率 ε_r との間には、

$$\Delta u(r) \equiv v\left(r\varepsilon_r\right)^{1/3} \qquad (1)$$

のような関係がある。この v をコルモゴロフの相似変数と呼ぶ。v は $r \ll L$ (L は積分長)でスケール r が慣性小領域にある時は、普遍的な確率変数であるとさ

れている。

v を計算するには本来、真のエネルギー散逸率：

$$\varepsilon = 2\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2}$$

を用いなければならないが、すでに述べたように一般的には次のような 1 次元サロゲート ε' が用いられている。

$$\varepsilon' = 15\nu\left(\partial u/\partial x\right)^2 \tag{3}$$

なお、式(2)ではアインシュタイン和を用いており、ν は動粘性係数を示す。

実験に基づいた RSH の検証を Stolovitsky らが行っており[3]、それによると v の確率密度分布(PDF)はスケール r や $(r\varepsilon_r)^{1/3}$ に対する大きな依存性があり、小さな r では v の PDF にバイモーダリティが存在することが示された。これに対し Stolovitsky らの研究では 1 次元サロゲート ε' が用いられているために乱流の 3 次元性を捉え切れているか疑問であるという観点から、細川らが DNS の結果を基に 1 次元サロゲートを用いずに真のエネルギー散逸率を用いて同様の検証を行ったところ、v の PDF は r には依存するものの $(r\varepsilon_r)^{1/3}$ にはほとんど依存しない、ほぼガウス分布に近いものであるという結果が出た[1]。この結果は 1 次元サロゲートによる解析で乱流の 3 次元性を捉えようとする際の限界を示すものである。

上記の研究をはじめ、RSH の検証がこれまで数多く行われてきたが、この RSH をスカラー場 θ へと拡張しようとする試みが Zhu らによって行われている[4]。その論文では Oboukhov と Corrsin の次元解析に基づき、スケール r だけ離れた 2 点間でのスカラー差 $\Delta\theta(r)=\theta(x+r)-\theta(x)$ とそのスケール r の領域における局所平均エネルギー散逸率 ε_r および局所平均スカラー散逸率 χ_r との間に、

$$\Delta\theta(r) \equiv v_\theta\left(r^{1/3}\varepsilon_r^{-1/6}\chi_r^{1/2}\right) \tag{4}$$

のような関係を導いている。ここで v_θ はパッシブスカラーの相似変数と呼ぶ。以降、便宜上 $x_\theta = \left(r^{1/3}\varepsilon_r^{-1/6}\chi_r^{1/2}\right)$ と記述する。

3. スカラーの相似変数における 1 次元サロゲートの影響

v_θ を計算する際には v の計算と同様、本来ならば真のエネルギー散逸率 ε と真のスカラー散逸率：

$$\chi = \frac{\nu}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\right) \tag{5}$$

を用いなければならないのだが、やはり実験では一般的に両者の 1 次元サロゲ

ートε', χ'を用いることになる。ここで、

$$\chi' = \frac{3\nu}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 \tag{6}$$

であり、Prはプラントル数を示す。

Zhuらは実験に基づいてv_θを1次元サロゲートを用いて計算しており、その結果得られたPDFはvのPDFと同様にrに依存性があり、小さなrではバイモーダリティが存在している。これと同様の解析をDNSに基づいて1次元サロゲートを用いた場合と用いなかった場合について行った。なお、1次元サロゲートを用いて計算した変数にはダッシュを付けて区別する。図1(a)は1次元サロゲートを用いなかった場合のv_θのPDF、(b)は用いた場合のv'_θのPDFを示す。これらを見ると、1次元サロゲートを用いた場合はZhuの実験に基づく解析と同様にrに大きな依存性があり、小さなrではバイモーダリティが存在している。それに対し、1次元サロゲートを用いなかった場合はrへの依存性はあるものの、バイモーダリティが見られず、ほぼガウス分布に近いものとなっている。参考として図2に1次元サロゲートを用いた場合と用いなかった場合のv_θ, v'_θのPDFの歪度Skおよび尖度Kuとスケールrの関係を示す。なお、図2においてスケールrはマクロスケールl($l = 15^{-3/4} R_\lambda^{3/2}\eta$, ηはコルモゴロフ・スケールを示す。)[5]で正規化している。

さらに、図3にrを固定してx_θ, x'_θの値で場合分けしたPDFを示す。図3(a), (b), (c)は真のエネルギー散逸率およびスカラー散逸率を用いた場合、(d), (e), (f)は1次元サロゲートを用いた場合である。この図を見ると、vのPDFと同様に1次元サロゲートを用いた場合x'_θに大きく依存している。ただ、rが慣性小領域に入るくらいまで大きくなるとバイモーダリティはほとんど消え、x'_θに対する依存も小さくなっている。それに対し1次元サロゲートを用いなかった場合ではrが小さい領域でもほとんどx_θに対して依存せずに、ほぼガウス分布を保っていることが分る。

これらの結果は、1次元サロゲートを用いることは乱流中のスカラーの変動を捉える時その3次元性を掴みきれないおそれがあることを示している。

3. エネルギー散逸とスカラー散逸のジョイントマルチフラクタル

乱流散逸場が持つ自己相似的な間欠的構造の定量的表現として、これまでエネルギー散逸率のマルチフラクタルについての実験およびDNSに基づいた研究が幾つか行われている[6,7]が、同様なマルチフラクタル構造がスカラー散逸にも存在する事が考えられる。ここではエネルギー散逸εとスカラー散逸χのジョイント・マルチフラクタルについてDNSの結果を基に解析した結果を示す。これまでにもジョイント・マルチフラクタルについての実験や理論に基づく論文が

いくつか発表されている[8,9]が、ここでは細川のフォーミュレーションを基に解析を行なう。

まず、スケールLの全計算領域をスケールrのサブボックスで分割し、i番目のサブボックスの中の局所平均エネルギー散逸率を$\varepsilon_r^{(i)}$、局所平均スカラー散逸率を$\chi_r^{(i)}$とすると、結合一般化次元$D(q,p)$が次のように定義される。

$$\left(\frac{r}{L}\right)^{d(q+p)}\sum_i\left(\frac{\varepsilon_r^{(i)}}{\varepsilon_L}\right)^q\left(\frac{\chi_r^{(i)}}{\chi_L}\right)^p=\left(\frac{r}{L}\right)^{-(q-1)(p-1)D(q,p)},r\to 0 \quad (7)$$

ここで、ε_L,χ_Lはそれぞれエネルギー散逸率、スカラー散逸率の全空間平均であり、dは空間の次元である。また、ここでは$\tau(q,p)=-(q-1)(p-1)D(q,p)$を結合モーメント指数と呼び、以降その表記を用いる。両対数グラフの縦軸に$\left(\frac{r}{L}\right)^{d(q+p)}\sum_i\left(\frac{\varepsilon_r^{(i)}}{\varepsilon_L}\right)^q\left(\frac{\chi_r^{(i)}}{\chi_L}\right)^p$、横軸に$r/L$をとってプロットする事でスケーリングの存在を判断し、スケーリングがあれば、最小二乗法を用いてグラフの傾きを計算する事で$\tau(q,p)$が分かる。DNSから得られた乱流におけるスケーリングの一例と、それらから計算した$\tau(q,p)$の等高線を図4,5に示す。

次に、散逸は局所的には$\varepsilon_r^{(i)}\sim r^{\alpha-1},\chi_r^{(i)}\sim r^{\beta-1}$のようなスケール依存性を持つと考えて、等$\alpha,\beta$集合のフラクタル次元を$f(\alpha,\beta)$とすると、

$$\alpha(q,p)=\frac{\partial}{\partial q}\tau(q,p)+1-d \quad (8)$$

$$\beta(q,p)=\frac{\partial}{\partial p}\tau(q,p)+1-d \quad (9)$$

$$f(\alpha,\beta)=-\tau(q,p)+(\alpha-1+d)q+(\beta-1+d)p \quad (10)$$

となる。図6(a)はこの計算により図5の等高線から得られた$f(\alpha,\beta)$の等高線である。図6(b)はMeneveauらの実験に基づくジョイント・マルチフラクタル解析により得られた$f(\alpha,\beta)$の等高線であり、こちらは1次元解析であるため図中の数値に2を加えることで3次元解析の結果である図6(a)と比較できる。この両者を比べると、$f(\alpha,\beta)$の頂点付近($f>2$)の領域ではかなり似たものになっていることが分る。しかし、図6(a)の方では$f<2$の領域まで広がっており、(b)よりも

を捉える際に限界がある事が考えられる。

なお、このようなジョイント・マルチフラクタル解析を基にエネルギー散逸およびスカラー散逸の確率分布を決定することができ、さらにコルモゴロフ相似変数およびスカラー相似変数のガウス分布におけるrへの依存性が定式化できれば、式(1),(4)の関係を基にして速度および温度の構造関数を知る手がかりとなることが期待できる。

5. おわりに

今回の研究により、以下の事が分った

(1) V_θのPDFでは小さなrにおけるバイモーダリティが見られない。

(2) V_θのPDFはガウス分布に近いものになる。

(3) V_θのPDFはスケールrには依存するが、x_θに関してはほぼ依存性が無い。

(4) DNSに基づき３次元解析によって得られた$f(\alpha,\beta)$は平均的な領域では実験結果に基づく１次元解析によるものと似ているが、より強い間欠性を示す。

参考文献

1) I.Hosokawa, S.Oide and K.Yamamoto : Phys. Rev. Lett. 77 (1996) 4548.
2) A.N.Kolmogorov : J.Fluid Mech. 13 (1962) 82.
3) G.Stolovitzky, P.Kailasnath and K.R.Sreenivasan : Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 1178.
4) Y.Zhu, R.A.Antonia and I.Hosokawa : Phys. Fluids 7 (1995) 1637.
5) C.Meneveau and K.R.Sreenivasan : Phys. Rev. Lett. 59 (1987) 1424.
6) H.Tennekes and J.L.Lumley : *A First Course in Turbulence*, (MIT Press, Cambridge, 1980) p.68.
7) I.Hosokawa and K.Yamamoto : Phys. Fluids A 6 (1990) 889.
8) C.Meneveau, K.R.Sreenivasan, P.Kailasnath and S.Fan : Phys. Rev. A 41 (1990) 894.
9) I.Hosokawa : Phys. Rev. A 43 (1991) 6735.

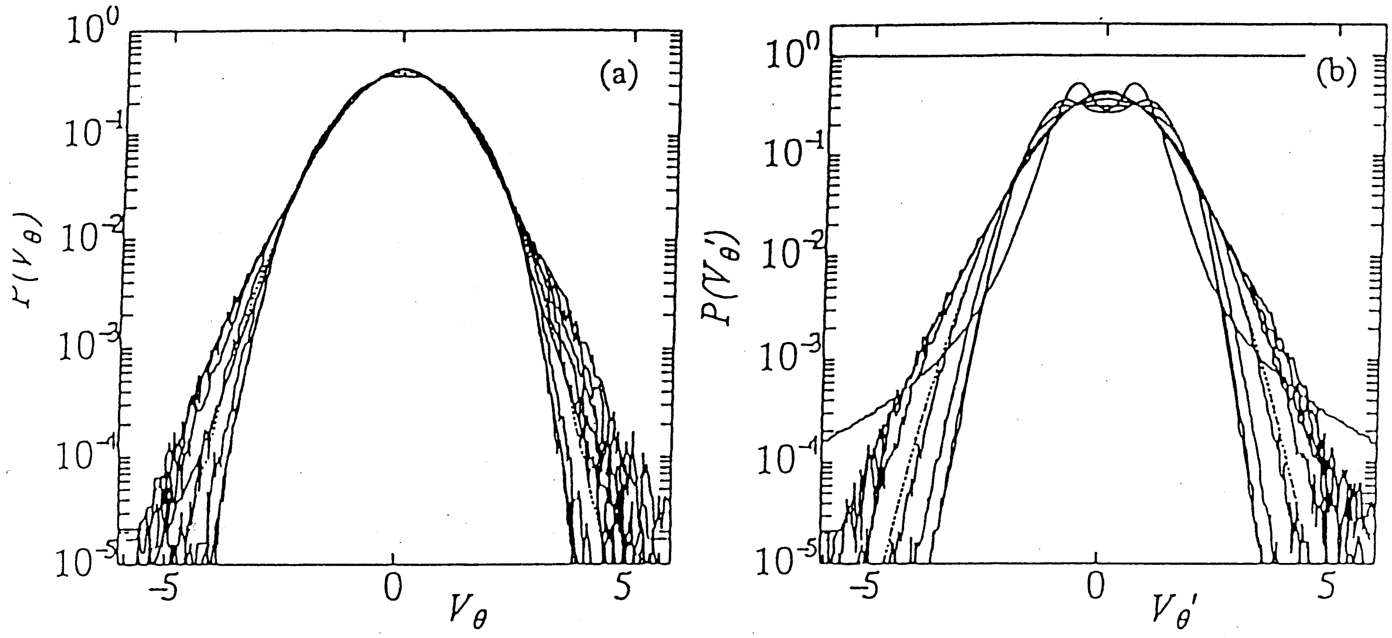


図1. スカラー相似変数のPDF。(a) 1次元サロゲートを用いなかった場合、(b) 1次元サロゲートを用いた場合。それぞれ、各実線が内側から $r/\eta = 1.16, 2.32, 4.64, 9.38, \ldots, 298$ のようにスケールを大きくした時のPDFを示す。

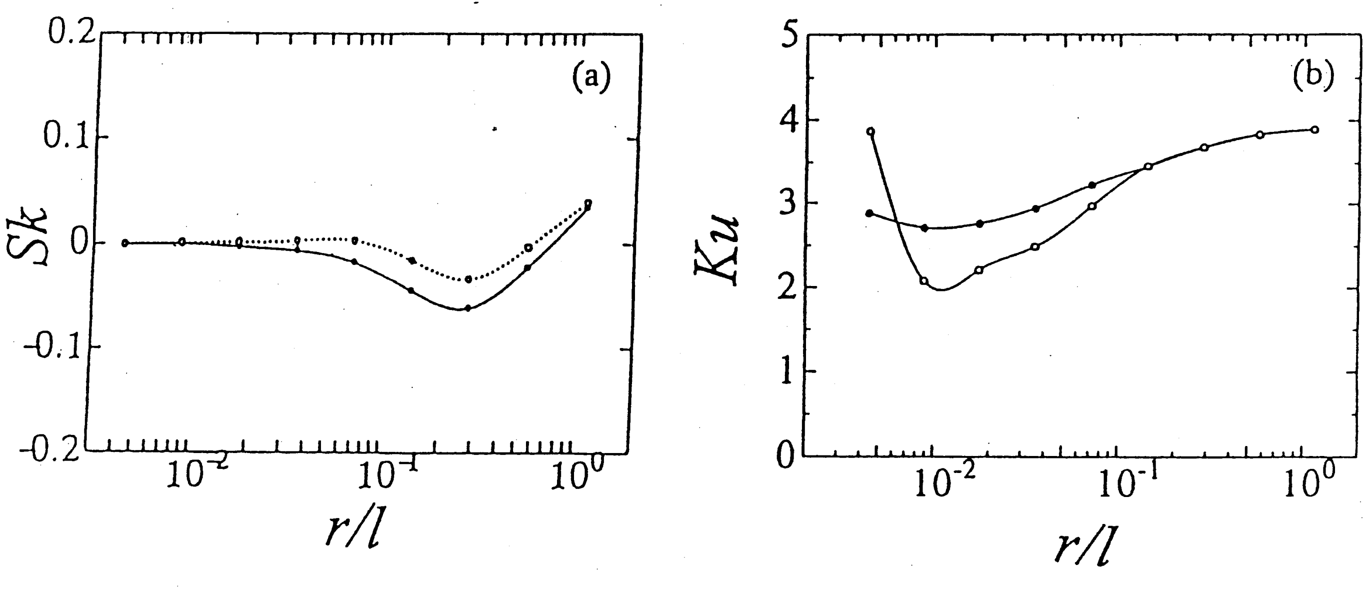


図2. スカラー相似変数のPDFの (a) 歪度 および、(b) 尖度 とスケール r の関係。白丸は1次元サロゲートを用いた場合を、黒丸は1次元サロゲートを用いなかった場合を示す。

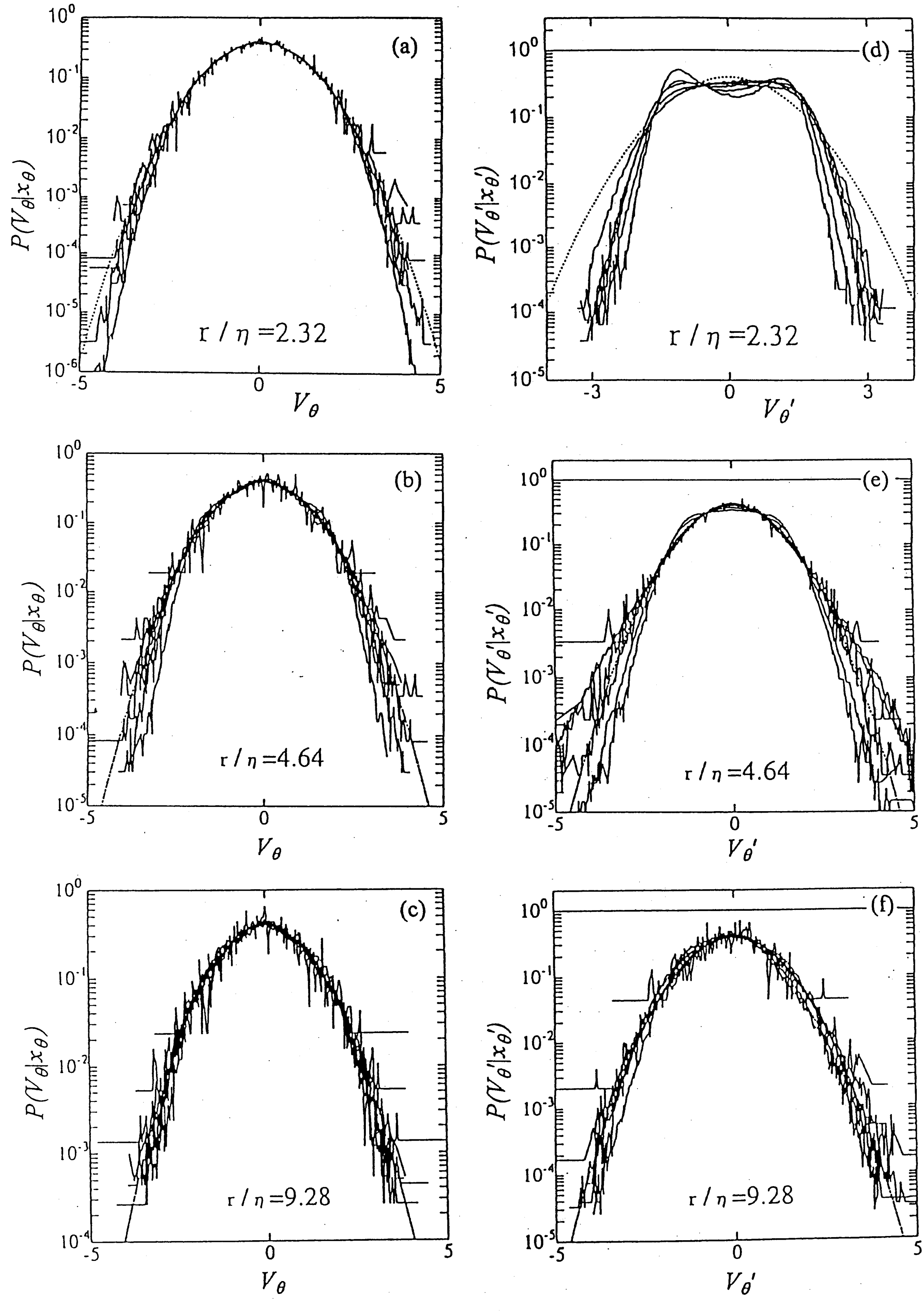


図3. スケール r を固定した場合のスカラー相似変数の x_θ に関する条件付きPDF。(a),(b),(c) は1次元サロゲートを用いなかった場合、(d),(e),(f) は1次元サロゲートを用いた場合。

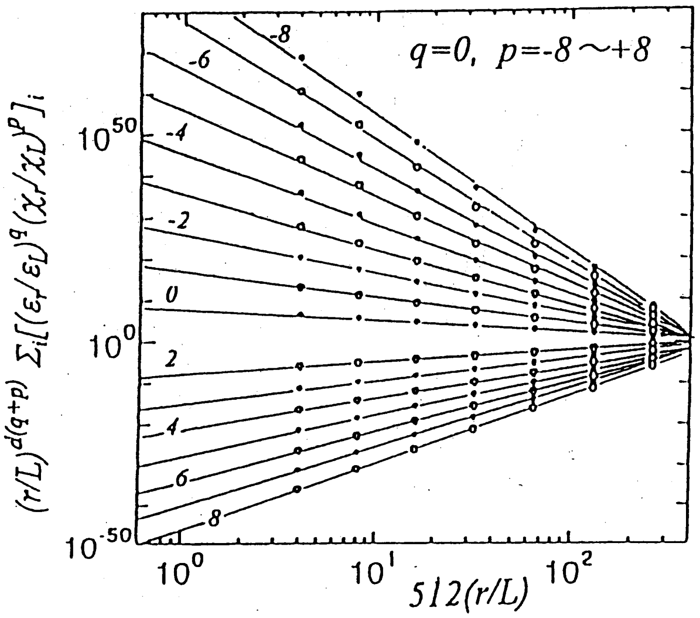


図4. DNSにおけるエネルギー散逸率とスカラー散逸率のジョイント・マルチフラクタルのスケーリングの例。$q=0$，$p=-8\sim+8$での計算結果。

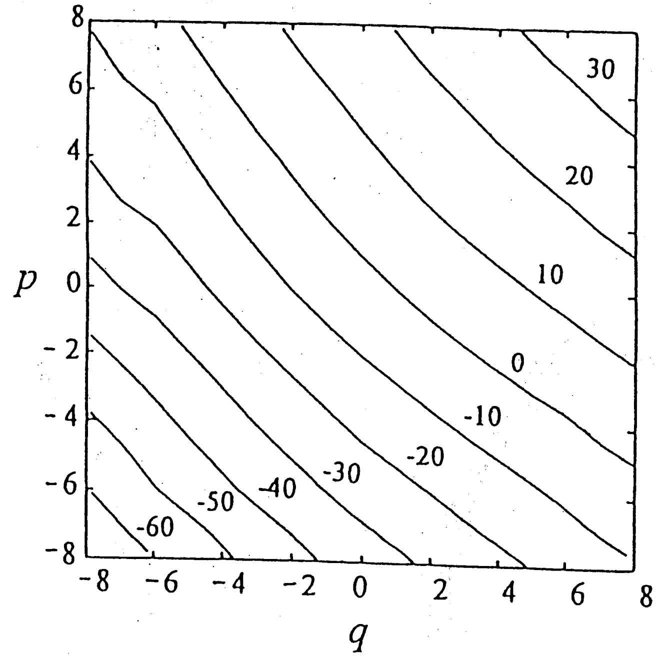
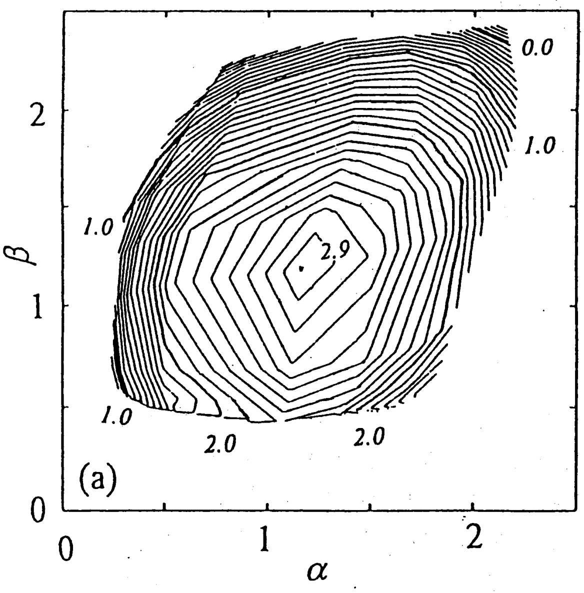


図5. DNSの結果から得られた$\tau(q,p)$の等高線。



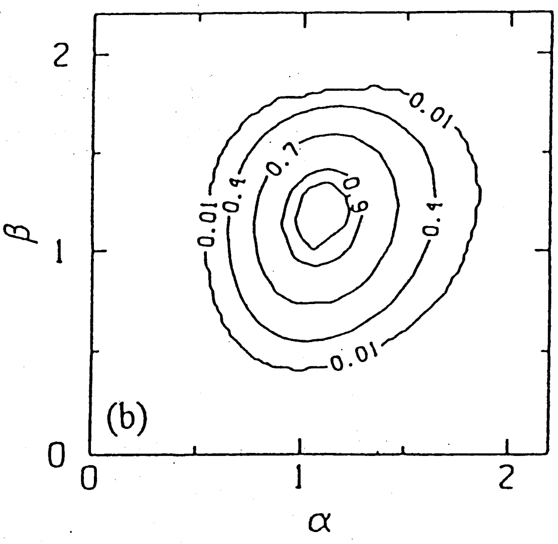


図6. $f(\alpha,\beta)$の等高線。それぞれ(a) DNSの解析結果、(b) Menevauらの実験結果を示す。