

# $SU(2, 2)$ 上の Siegel 放物型部分群に関する 一般化 Whittaker 関数について

東京大学数理科学 権 寧魯 (Yasuro GON)

## 1 序

$G$  を符号  $(2+, 2-)$  の特殊ユニタリ群  $SU(2, 2)$ ,  $K$  を  $G$  の極大コンパクト部分群,  $\mathfrak{g}$  を  $G$  の Lie 環とする.  $G$  の極大放物型部分群であって可換なべき単根基  $N_S$  をもつものを Siegel 放物型部分群といい  $P_S$  で表す.  $N_S$  の非退化指標  $\xi$  (2 次のエルミート行列  $H$  でパラメトライズされ, 以下では同一視) をひとつ固定し,  $G$  上の  $C^\infty$ -関数  $F$  であって全ての  $g \in G$  及び  $n \in N_S$  に対して  $F/ng) = \xi(n)F(g)$  をみたすもの全体のなす空間を  $C_\xi^\infty(N_S \backslash G)$  とおく. このとき  $G$  の既約許容表現  $(\pi, H_\pi)$  から  $C_\xi^\infty(N_S \backslash G)$  への絡作用素の空間

$$\text{Hom}_{(\mathfrak{g}, K)}(H_\pi, C_\xi^\infty(N_S \backslash G))$$

とその像を調べることは対応する保型形式の (Siegel 放物型部分群に関する) Fourier 展開を研究する上で最も基本的かつ重要な問題である. しかしながら一般には上の絡作用素の空間は無有限次元になるので  $N_S$  を含む  $G$  のある閉部分群  $R$  と well-defined な  $R$ -加群  $\eta$  であって  $N_S$  への制限が  $\xi$  なるものを次節で導入する. そこで,  $G$  上の  $V_\chi$ -値  $C^\infty$ -関数  $F$  であって全ての  $g \in G$  及び  $r \in R$  に対して  $F(rg) = \eta(r)F(g)$  をみたすもの全体のなす空間を  $C_\eta^\infty(R \backslash G)$  とおく. そこで, 本稿では与えられた  $G$  の既約許容表現  $(\pi, H_\pi)$  にたいして次のような絡空間

$$GW(\pi; \chi, \xi) = GW(\pi; \eta) = \text{Hom}_{(\mathfrak{g}, K)}(H_\pi, C_\eta^\infty(R \backslash G))$$

を考え, この空間の各絡作用素を一般化 Whittaker 汎関数と呼ぶ. 0 でない  $GW(\pi; \eta)$  の元  $T$  の像で  $K$ -タイプを特定した関数  $\Phi_{\pi, \tau}(g)$  を表現  $\pi$  に対する  $K$ -タイプ  $\tau^*$  つきの一般化 Whittaker 関数と呼ぶ. 我々の関心は絡空間  $GW(\pi; \chi, \xi)$  の次元や  $\Phi_{\pi, \tau}(g)$  の明示公式である.

## 2 一般化 Whittaker 関数の定義

### 2.1 Siegel 放物型部分群

$G$  を特殊ユニタリ群  $SU(2, 2)$  とすると  $G$  には例えば次の 2 つの実現  $G_1, G_2$  がある.

$$G_1 = \left\{ g \in SL(4, \mathbb{C}) \mid {}^t \bar{g} \begin{pmatrix} 1_2 & \\ & -1_2 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1_2 & \\ & -1_2 \end{pmatrix} \right\}, \quad (1)$$

$$G_2 = \left\{ g \in SL(4, \mathbb{C}) \mid {}^t \bar{g} \begin{pmatrix} & 1_2 \\ -1_2 & \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} & 1_2 \\ -1_2 & \end{pmatrix} \right\}. \quad (2)$$

ここで  $1_2$  を行列サイズ 2 の単位行列とする. これ以降 同型写像  $\varphi_{12}: G_1 \ni g \mapsto CgC^{-1} \in G_2$  を固定する. ここで,

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} & 1_2 & & \\ & -\sqrt{-1} \cdot 1_2 & & \\ & & 1_2 & \\ & & \sqrt{-1} \cdot 1_2 & \end{pmatrix}$$

でまた  $\varphi_{21} = \varphi_{12}^{-1}$  とおく.

実現  $G_2$  を  $G = SU(2, 2)$  として使い Siegel 放物型部分群  $P_S$ , すなわち 可換なべき単根基をもつ極大放物型部分群をとる.

$$G_2 \supset P_S = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0_2 & * \end{pmatrix} \in G_2 \right\}.$$

$L_S \times N_S$  を  $P_S$  の Levi 分解とするとこれらの部分群はつぎのように実現される.

$$L_S = \left\{ l(g) = \begin{pmatrix} g & \\ & {}^t \bar{g}^{-1} \end{pmatrix} \mid g \in GL(2, \mathbb{C}), \det g \in \mathbb{R} \right\},$$

$$N_S = \left\{ n(B) = \begin{pmatrix} 1_2 & B \\ & 1_2 \end{pmatrix} \mid {}^t \bar{B} = B \in M_2(\mathbb{C}) \right\} \simeq \mathbb{R}^4.$$

### 2.2 $N_S$ の指標

$\xi$  を  $N_S$  のユニタリ指標でエルミート行列  $H_\xi = \begin{pmatrix} c_1 & \gamma \\ \bar{\gamma} & c_2 \end{pmatrix}$  に付随するものとする.

$n = n(B) \in N_S, B = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \bar{\beta} & d \end{pmatrix}$ , に対して

$$\begin{aligned} \xi(n(B)) &= \xi\left(\begin{pmatrix} 1_2 & B \\ & 1_2 \end{pmatrix}\right) = \exp 2\pi\sqrt{-1} \operatorname{tr} \left\{ \begin{pmatrix} c_1 & \gamma \\ \bar{\gamma} & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \beta \\ \bar{\beta} & d \end{pmatrix} \right\} \\ &= \exp 2\pi\sqrt{-1} (c_1 a + c_2 d + \gamma \bar{\beta} + \bar{\gamma} \beta) \in \mathbb{C}^{(1)}. \end{aligned}$$

これ以降  $\xi$  が非退化, すなわち  $\det H_\xi \neq 0$  を仮定する.  $L_S$  の  $N_S$  上の共役作用を考えてそれによって誘導される  $L_S$  の指標群  $\widehat{N}_S$  上への作用における  $\xi$  の安定部分群の単位元の連結成分を  $SU(\xi)$  と書く,

$$SU(\xi) = \text{Stab}_{L_S}(\xi)^\circ \subset L_S.$$

すると

$$SU(\xi) = \left\{ \left( \begin{array}{c} g \\ {}^t\bar{g}^{-1} \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} g \in GL(2, \mathbb{C}), \det g \in \mathbb{R} \\ {}^t\bar{g}H_\xi g = H_\xi \end{array} \right\}^\circ.$$

すなわち

$$SU(\xi) \simeq \begin{cases} SU(2) & H_\xi \text{が定符号のとき,} \\ SU(1,1) & H_\xi \text{が不定符号のとき.} \end{cases}$$

次に  $P_S$  の部分群  $R_\xi$  を,

$$R_\xi = SU(\xi) \ltimes N_S$$

で定義し  $SU(\xi)$  の既約ユニタリ表現  $\chi$  を取る.  $\xi \in \widehat{N}_S$  と  $\chi \in SU(\xi)^\wedge$  を上記のように取れば, well-defined な  $R_\xi$ -加群  $\eta = \chi \otimes \xi$  が定義できる.

### 2.3 一般化 Whittaker 模型と関数

**定義 2.1** 既約許容表現  $(\pi, H_\pi)$  に対し,  $GW(\pi; \eta)$  を次のような絡作用素の成す空間とする,

$$GW(\pi; \chi, \xi) = GW(\pi; \eta) = \text{Hom}_{(\mathfrak{g}, K)}(H_\pi, C_\eta^\infty(R_\xi \backslash G)).$$

ここで,

$$C_\eta^\infty(R_\xi \backslash G) = \{f: G \xrightarrow{C^\infty} V_\chi \mid f(rg) = \eta(r)f(g) \quad \forall (r, g) \in R \times G\}.$$

また  $C_\eta^\infty(R_\xi \backslash G)^{\text{mod}}$  を  $C_\eta^\infty(R_\xi \backslash G)$  の中で緩増大な関数たちのなす部分空間とする (Wallach [14, Sect. 8] を参照).

**定義 2.2**  $T (\neq 0) \in GW(\pi; \eta)$  と  $\pi$  の重複度 1 の  $K$ -type  $(\tau^*, W_{\tau^*})$  を取る. ここで,  $\tau^*$  は  $\tau$  の反傾表現である. 次に  $K$ -同変な単射  $\iota: W_{\tau^*} \rightarrow H_\pi$  をとり  $\iota(v^*)$ ,  $v^* \in W_{\tau^*}$ , の像を考える

$$T(\iota_{\tau^*}(v^*))(g) = \langle v^*, \Phi_{\pi, \tau}(g) \rangle.$$

ここで,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $W_\tau \times W_{\tau^*}$  上の標準的な内積である. これにより定数倍を除いて関数  $\Phi_{\pi, \tau}(g) \in C_{\eta, \tau}^\infty(R \backslash G/K)$  が決まる. ここで,

$$C_{\eta, \tau}^\infty(R \backslash G/K) = \{f: G \xrightarrow{C^\infty} V_\chi \otimes W_\tau \mid f(rgk) = \eta(r) \otimes \tau(k^{-1})f(g) \quad \forall (r, g, k) \in R \times G \times K\}.$$

我々は  $\Phi_{\pi, \tau}$  を表現  $\pi$  に対する  $K$ -type  $\tau^*$  付き 一般化 Whittaker 関数と呼ぶ.

### 3 $SU(2, 2)$ とその Lie 環の構造論

#### 3.1 Lie 群と Lie 環

$G$  を特殊ユニタリ群  $SU(2, 2)$  であって次のように実現したものとする.

$$G = \{g \in SL(4, \mathbb{C}) \mid {}^t \bar{g} I_{2,2} g = I_{2,2}\}$$

ここで  $I_{2,2} = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$  であり,  ${}^t g$  と  $\bar{g}$  でそれぞれ  $g$  の転置や複素共役を表すとする, すなわち実現  $G_1$  を使う.  $G$  の極大コンパクト部分群  $K$  を以下のように固定する:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 & \\ & u_2 \end{pmatrix} \mid u_1, u_2 \in U(2), \det(u_1) \det(u_2) = 1 \right\}.$$

$G$  の Lie 環  $\mathfrak{g}$  は以下のように実現される:

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & X_3 \\ {}^t \bar{X}_3 & X_2 \end{pmatrix} \mid {}^t \bar{X}_i = -X_i \ (i = 1, 2), \text{tr}(X_1 + X_2) = 0, X_3 \in M_2(\mathbb{C}) \right\}.$$

$K$  の Lie 環は:

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & \\ & X_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \right\}, \quad \mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} & X_3 \\ {}^t \bar{X}_3 & \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \right\}.$$

すると Cartan 分解:  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$  を得る. 次に  $\mathfrak{p}$  の極大な可換部分代数  $\mathfrak{a}$  を以下のように固定する:

$$\mathfrak{a} = \mathbb{R}H_1 + \mathbb{R}H_2 \quad \text{with } H_1 = \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & 0 \\ 1 & & \\ & 0 & \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} & 0 & \\ & & 1 \\ 0 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}.$$

Lie 群  $A = \exp(\mathfrak{a})$  は  $G$  の極大な  $\mathbb{R}$ -split トーラスの単位元の連結成分となる.

以下では,  $A$  を  $(\mathbb{R}_{>0})^2$  と次のようにして同一視する,

$$A \ni (a_1, a_2) = \exp(\log(a_1)H_1 + \log(a_2)H_2) \quad \text{with } (a_1, a_2) \in (0, \infty) \times (0, \infty).$$

$\Sigma$  を  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$  の制限ルート系とする.  $\Sigma$  は  $C_2$  型となり正ルート系  $\Sigma^+$  を次のように選ぶ

$$\Sigma^+ = \{2\alpha_1, 2\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2\} \quad \text{with } \alpha_i(H_j) = \delta_{i,j} \ (i, j = 1, 2).$$

ルートベクトルを次のように置く

$$E_1 = \sqrt{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \\ & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \sqrt{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \\ & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & 1 & -1 \\ -1 & & \\ & 1 & -1 \\ -1 & & 1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \frac{\sqrt{-1}}{2} \begin{pmatrix} & 1 & -1 \\ 1 & & -1 \\ & 1 & -1 \\ 1 & & -1 \end{pmatrix},$$

$$E_5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & 1 & & 1 \\ -1 & & 1 & \\ & 1 & & 1 \\ 1 & & -1 & \end{pmatrix}, \quad E_6 = \frac{\sqrt{-1}}{2} \begin{pmatrix} & 1 & & 1 \\ 1 & & -1 & \\ & 1 & & 1 \\ -1 & & 1 & \end{pmatrix}.$$

すると、各ルート空間  $\mathfrak{g}_\alpha$ ,  $\alpha \in \Sigma^+$  は以下のように与えられる:

$$\mathfrak{g}_{2\alpha_1} = \mathbb{R}E_1, \quad \mathfrak{g}_{2\alpha_2} = \mathbb{R}E_2, \quad \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2} = \mathbb{R}E_3 + \mathbb{R}E_4,$$

and

$$\mathfrak{g}_{\alpha_1-\alpha_2} = \mathbb{R}E_5 + \mathbb{R}E_6.$$

次のように置けば

$$\mathfrak{n}_S = \mathfrak{g}_{2\alpha_1} + \mathfrak{g}_{2\alpha_2} + \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}, \quad (3)$$

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_S + \mathfrak{g}_{\alpha_1-\alpha_2}, \quad (4)$$

岩澤分解  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} + \mathfrak{a} + \mathfrak{k}$  と  $\mathfrak{n}_S = \text{Lie}(N_S)$ , ( $N_S$  は Siegel 放物型部分群  $P_S$  で  $G_1$  で実現されたもの) を得る. 以下では実現  $G_1$  しか使わない.

$E_{-i} = \theta E_i = -{}^t \bar{E}_i$ , ( $i = 1, \dots, 6$ ) と置けば,  $\mathfrak{g}_{-2\alpha_1} = \mathbb{R}E_{-1}$  等を得る.

$\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$  の基底を次のように固定する

$$\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}h^1 + \mathbb{C}h^2 + \mathbb{C}e_+^1 + \mathbb{C}e_-^1 + \mathbb{C}e_+^2 + \mathbb{C}e_-^2 + \mathbb{C}I_{2,2}, \quad (5)$$

ここで,

$$h^1 = \begin{pmatrix} h & \\ & 0_2 \end{pmatrix}, \quad h^2 = \begin{pmatrix} 0_2 & \\ & h \end{pmatrix}, \quad e_{\pm}^1 = \begin{pmatrix} e_{\pm} & \\ & 0_2 \end{pmatrix}, \quad e_{\pm}^2 = \begin{pmatrix} 0_2 & \\ & e_{\pm} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

と

$$h = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad e_+ = \begin{pmatrix} & 1 \\ 0 & \end{pmatrix}, \quad e_- = \begin{pmatrix} & 0 \\ 1 & \end{pmatrix}. \quad (7)$$

組  $\{h, e_+, e_-\}$  を  $\mathfrak{sl}_2$ -三つ組と呼ぶ. コンパクトな Cartan 部分代数  $\mathfrak{t}$  を以下のように取る

$$\mathfrak{t} = \mathbb{R}\sqrt{-1}h^1 + \mathbb{R}\sqrt{-1}h^2 + \mathbb{R}\sqrt{-1}I_{2,2}. \quad (8)$$

$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$  のルート系  $\Delta$  は  $A_3$  型で,

$$\Delta = \{[\pm 2, 0; 0], [0, \pm 2; 0], [\pm 1, \pm 1; \pm 2]\}.$$

のように表され, ここで  $\beta = [r, s; u]$  は  $r = \beta(h^1)$ ,  $s = \beta(h^2)$  と  $u = \beta(I_{2,2})$  を意味するものと約束する. 4つのルート  $\pm[2, 0; 0]$ ,  $\pm[0, 2; 0]$  は  $\Delta$  のコンパクトな部分系  $\Delta_c$  を成す. コンパクトルート系の正ルートを以下で決める:

$$\Delta_c^+ = \{[2, 0; 0], [0, 2; 0]\} \subset \Delta_c. \quad (9)$$

## 4 $K$ と $SU(\xi)$ の表現

既約  $K$ -加群の parametrization を与えよう.  $\mu$  を  $\Delta_c^+$ -支配的で,  $\mathfrak{t}$  上の整な線型形式, すなわち,  $\mu = [\mu_1, \mu_2; \mu_3]$  であつて  $\mu_j$  たちは整数で  $\mu_1, \mu_2 \geq 0$  かつ  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \in 2\mathbb{Z}$  なるものとする. 極大コンパクト部分群  $K \simeq S(U(2) \times U(2))$  の有限次元既約表現の同値類の集合は次で与えられる.

$$\widehat{K} \simeq \{[r, s; u] \mid r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, u \in \mathbb{Z}, r + s + u \in 2\mathbb{Z}\}.$$

一般化関数 Whittaker を記述する為に次のような表現空間の“標準基底”を導入する.

**補題 4.1**  $\tau = [r, s; u] \in \widehat{K}$  とする.  $\tau$  の表現空間  $W_\tau$  にはつぎのような基底  $\{f_{kl}\}$  ( $0 \leq k \leq r$ ,  $0 \leq l \leq s$ ) が存在する. 特に, このとき  $\dim \tau = (r+1)(s+1)$  となる.

$$\begin{aligned} \tau(h^1)f_{kl} &= (2k - r)f_{kl}, & \tau(h^2)f_{kl} &= (2l - s)f_{kl}, \\ \tau(e_+^1)f_{kl} &= (r - k)f_{k+1,l}, & \tau(e_+^2)f_{kl} &= (s - l)f_{k,l+1}, \\ \tau(e_-^1)f_{kl} &= kf_{k-1,l}, & \tau(e_-^2)f_{kl} &= lf_{k,l-1}, \\ \tau(I_{2,2})f_{kl} &= uf_{kl}. \end{aligned}$$

$SU(\xi) \simeq SU(2)$ ,  $SU(1, 1)$  の既約ユニタリ表現  $\chi$  に対しても表現空間  $V_\chi$  の“標準基底”を  $\{v_j\}$  とおく.

## 5 $SU(2, 2)$ の離散系列表現

コンパクトな正ルート系  $\Delta_c^+$  を含む正ルート系としてつぎの6つがある.

$$\begin{aligned} \Delta_I^+ &= \{[2, 0; 0], [1, -1; 2], [1, 1; 2], [-1, -1; 2], [-1, 1; 2], [0, 2; 0]\}, \\ \Delta_{II}^+ &= \{[1, -1; 2], [2, 0; 0], [1, 1; 2], [1, 1; -2], [0, 2; 0], [-1, 1; 2]\}, \\ \Delta_{III}^+ &= \{[1, -1; 2], [1, 1; 2], [2, 0; 0], [0, 2; 0], [1, 1; -2], [1, -1; -2]\}, \\ \Delta_{IV}^+ &= \{[-1, 1; -2], [1, 1; -2], [0, 2; 0], [2, 0; 0], [1, 1; 2], [-1, 1; 2]\}, \\ \Delta_V^+ &= \{[-1, 1; -2], [0, 2; 0], [1, 1; -2], [1, 1; 2], [2, 0; 0], [1, -1; -2]\}, \\ \Delta_{VI}^+ &= \{[0, 2; 0], [-1, 1; -2], [1, 1; -2], [-1, -1; -2], [1, -1; -2], [2, 0; 0]\}. \end{aligned}$$

各  $J \in \{I, II, III, IV, V, VI\}$  に対して,  $\Delta_{J,n}^+ = \Delta_J^+ \setminus \Delta_c^+$  をノンコンパクトな正ルートの集合とし, 支配的なウエイトの部分集合を定義する.

$$\mathcal{E}_J = \{\Lambda = [\Lambda_1, \Lambda_2; \Lambda_3] \mid \Lambda \text{ は } \Delta_{J,n}^+ \text{-支配的}\}.$$

集合  $\coprod_{J=I}^{VI} \Xi_J$  は  $SU(2, 2)$  の離散系列表現の Harish-Chandra による parametrization を与える.

$\pi_\Lambda$  を Harish-Chandra parameter  $\Lambda \in \Xi_J$  なる  $G$  の離散系列表現としよう.  $\pi_\Lambda$  の Blattner parameter は  $\lambda = \Lambda - \rho_c + \rho_{J,n}$  で与えられる, ここで  $\rho_c$  はコンパクトな正ルートの和の半分,  $\rho_{J,n}$  は  $\Delta_{J,n}^+$  に属するノンコンパクトな正ルートの和の半分である. Blattner の公式より  $\pi_\Lambda$  は最高 ウェイトが  $\lambda$  なる極小  $K$ -タイプを重複度 1 で持つ.

各  $J$  にたいして,  $\lambda$  を計算すると,

$$\lambda = \begin{cases} \Lambda + [-1, -1; 4] & \text{for } \Lambda \in \Xi_I, \\ \Lambda + [0, 0; 2] & \text{for } \Lambda \in \Xi_{II}, \\ \Lambda + [1, -1; 0] & \text{for } \Lambda \in \Xi_{III}, \\ \Lambda + [-1, 1; 0] & \text{for } \Lambda \in \Xi_{IV}, \\ \Lambda + [0, 0; -2] & \text{for } \Lambda \in \Xi_V, \\ \Lambda + [-1, -1; -4] & \text{for } \Lambda \in \Xi_{VI}. \end{cases} \quad (10)$$

[17] において計算されたように,  $\pi_\Lambda$  の Gelfand-Kirillov 次元は次のようになる:

$$\text{GK-dim}(\pi_\Lambda) = \begin{cases} 4 & \text{for } \Lambda \in \Xi_I \cup \Xi_{VI}, \\ 6 & \text{for } \Lambda \in \Xi_{II} \cup \Xi_V, \\ 5 & \text{for } \Lambda \in \Xi_{III} \cup \Xi_{IV}. \end{cases} \quad (11)$$

それゆえ Harish-Chandra parameter  $\Lambda \in \Xi_{II} \cup \Xi_V$  なる表現は Vogan [13] の意味で“大きい”離散系列と呼ばれ, 通常の Whittaker 模型を持つ (Kostant [10] を参照). Harish-Chandra parameter  $\Lambda \in \Xi_I$  (resp.  $\Xi_{VI}$ ) なる表現は正則 (resp. 反正則) 離散系列と呼ばれている. さらに, ここでは Gelfand-Kirillov 次元が 5 になる表現を, “中間”の離散系列と呼ぶことにしよう.

## 5.1 一般化 Whittaker 関数の特徴付け

Schmid 作用素  $\nabla_{\eta, \tau_\lambda}$  とある射影子  $P_{\tau_\lambda}^{(J)}$  を定義する.

先ず  $(\tau, W_\tau)$  を  $K$  の有限次既約表現,  $\{X_j\}_{j=1}^8$  を  $\mathfrak{g}$  上の Killing 形式に関する  $\mathfrak{p}$  の正規直交基底とする.  $K$  の  $\mathfrak{p}_\mathbb{C}$  上の随伴表現を  $\text{Ad}$  と書く. この基底を使って Schmid 作用素  $\nabla$  は次で定義される.

$$\nabla : C_\tau^\infty(G/K) \ni F \mapsto \sum_{j=0}^8 X_j \cdot F(\cdot) \otimes X_j \in C_{\tau \otimes \text{Ad}}^\infty(G/K). \quad (12)$$

ここで, 関数  $F$  の  $X \in \mathfrak{g}$  による右微分は  $X \cdot F(g) = \frac{d}{dt} F(g \exp tX)|_{t=0}$  と書いた. この  $K$ -同変微分作用素  $\nabla$  は well-defined で基底の取り方に独立である.

次に,

$$P_{\tau_\lambda}^{(J)} : W_\lambda \otimes \mathfrak{p}_\mathbb{C} \rightarrow W_\lambda^- = \bigoplus_{\beta \in \Delta_{J,n}^+} W_{\lambda-\beta}. \quad (13)$$

で定義する.

**定理 1 (Yamashita [17])**  $\pi_\Lambda$  を *Harish-Chandra parameter*  $\Lambda \in \Xi_J$  なる  $G$  の離散系列表現とする.  $\pi_\Lambda$  の *Blattner parameter*  $\lambda$  が下記の条件 (FFW) を満たすと仮定する. しか  
らば,

$$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}, K)}(\pi_\Lambda^*, C_\eta^\infty(R \backslash G)) \simeq \ker(P_{\tau_\lambda}^{(J)} \circ \nabla_{\eta, \tau_\lambda}).$$

(FFW):  $\Delta_{J,n}^+$  の任意の部分集合  $Q$  にたいして  $\lambda - \sum_{\beta \in Q} \beta$  が  $\Delta_c^+$ -支配的である, すなわち,  $\lambda$  は“壁から遠い”.

*Remark.* 定理にある条件: (FFW) は“translation principle”によって除かれることが知られている.

上の定理を使い離散系列表現  $\pi_\Lambda$  で  $\Lambda \in \Xi_J$   $J = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$  なる表現たちに対する一般化 Whittaker 関数の満たす偏微分方程式系を具体的に書き下す. 次に得られた偏微分方程式系の解析的な解を調べることによって一般化 Whittaker 関数の明示公式と絡作用素の空間の次元が求まることになる. 3タイプの離散系列なかで特に (反) 正則離散系列にたいする一般化 Whittaker 関数は古典的に知られており, 対応する種数 2 の正則エルミートカスプ形式の Fourier 展開にあらわれる. また, その Fourier 係数は Andrianov-Gritsenko-菅野  $L$ -関数の構成に使われた. この場合, Fourier 係数は次数 2 のエルミート行列  $H$  で番号付けられる. Koecher 原理 ([9]) により  $H$  における Fourier 係数が消えないならば  $H$  が正の定符号であることが知られている.

## 6 主結果 (定符号), $J = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$

さて本論文の主要な結果を説明しよう. まず  $N_S$  の指標  $\xi$  が正の定符号という仮定の下で,  $\pi^* = \pi_\Lambda$  が  $G$  の大きい離散系列 ( $\Lambda \in \Xi_{\mathrm{II}}$ ) または中間の離散系列 ( $\Lambda \in \Xi_{\mathrm{III}}$ ) にたいする minimal  $K$ -type つき一般化 Whittaker 関数  $\Phi_{\pi, \tau}$  のみたす微分方程式を具体的に書き下しそれを解くことによって明示公式と絡空間  $GW(\pi; \chi, \xi)$  の次元を与えた.  $\Phi_{\pi, \tau}$  のみたす微分方程式は前節のように計算されて, 得られた微分方程式を詳しく調べるには, 岩澤分解に現れる  $A (\simeq \mathbb{R}_{>0}^2)$  に対して,  $G = RAK$  なる岩澤-Cartan 型分解をまず示す. 次に  $(\tau, W_\tau)$  を考えている非正則離散系列  $\pi_\Lambda$  の minimal  $K$ -type として  $C_{M_0}^\infty(A)$  を  $A$  上の  $V_\chi \otimes W_\tau$ -値  $C^\infty$ -関数であって  $M_0 = K \cap SU(\xi)$  に関する両立条件をみたすもの全体のなす空間とする. 先の分解  $G = RAK$  の帰結として,  $C_{\eta, \tau}^\infty(R \backslash G/K)$  から  $C_{M_0}^\infty(A)$  への制限写像が単射になることが示せるので, 一般化 Whittaker 関数の  $A$  への制限  $\Phi_{\pi, \tau}(a)$  ( $a = (a_1, a_2) \in A$ ) は  $C_{M_0}^\infty(a)$  の元とみることができる. これにより  $\Phi_{\pi, \tau}(a)$  の動径成分  $a_1, a_2$  に関する偏微分方程式を得る. 関数空間  $C_{M_0}^\infty(A)$  の元は  $V_\chi, W_\tau$  の標準基底  $\{v_j\}, \{f_{kl}\}$  を使って展開できるので,  $C^\infty$ -関数列  $\{c_{jkl}(a)\}$  を使って

$$\Phi_{\pi, \tau}(a) = \sum_{j, k, l} c_{jkl}(a)(v_j \otimes f_{kl})$$

とかける. 結果として係数関数  $c_{jkl}(a)$  に関する偏微分-差分方程式系が得られたことになる. こうして得られた微分方程式系を解くことにより以下の結果を得る.



**定理 2**  $\pi_\Lambda$  を  $\Lambda \in \Xi_I \cup \Xi_{II} \cup \Xi_{III}$  なる離散系列表現とする.  $N_S$  の指標  $\xi = \text{diag}(c_1, c_2)$  が正の定符号で,  $\dim \chi = d + 1$ ,  $\pi_\Lambda$  の極小  $K$ -タイプの最高ウェイトが  $[r, s; u]$  とすると次が成り立つ.

$$\dim_{\mathbb{C}} GW(\pi_\Lambda^*; \chi, \xi) = \begin{cases} 1 & \dots \Lambda \in \Xi_I \text{ かつ } d = r + s, \\ 2 & \dots \Lambda \in \Xi_{II} \text{ かつ } d \in r + s + 2\mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ 0 & \dots \Lambda \in \Xi_{III} \text{ または } \Lambda \in \Xi_I \cup \Xi_{II} \text{ で上記以外.} \end{cases}$$

保型形式の Fourier 展開には緩増大な一般化 Whittaker 関数があらわれるので (絡空間がゼロにならないときには,) 緩増大な関数に値をとる部分絡空間  $GW(\pi; \chi, \xi)^{\text{mod}}$  の次元が特に重要である.  $J = I$  のとき, すなわち正則離散系列のときは容易に重複度 1 定理と明示公式が得られるので, 以下では  $J = II$  である “大きい” 離散系列の場合について述べる.

**定理 3**  $\frac{d+r+s}{2} \in \mathbb{Z}$ ,  $d \geq r + s$  と  $\xi = \text{diag}(c_1, c_2) > 0$  を仮定する. このとき,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{(\mathfrak{g}, K)}(\pi_\Lambda^*, C_\eta^\infty(R \setminus G)^{\text{mod}}) = 1.$$

より正確には, “大きい” 離散系列表現  $\pi = \pi_\Lambda^*$ ,  $\Lambda = [r, s; u - 2] \in \Xi_{II}$  に対する一般化 Whittaker 関数で極小  $K$ -タイプ  $\tau^*$ ,  $\tau = [r, s; u]$  を持つ  $\Phi_{\pi, \tau}(a)$  は次のように記述される.  $\Phi_{\pi, \tau}(a) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq r \\ 0 \leq l \leq s}} c_{kl}(a) (v_{\frac{d+r+s}{2}-k-l} \otimes f_{kl}) \in C_{M_0}^\infty(A; V_\chi \otimes W_\tau)$  と書こう. もし  $\Phi_{\pi, \tau}(a)$  が各  $a_1, a_2$  に関して無限遠点で緩増大ならば,  $\Phi_{\pi, \tau}(a)$  は定数倍を除いて一意に決まりその係数関数は次のように与えられる

$$\begin{aligned} c_{kl}(a) &= \binom{r}{k} \binom{d-s}{\frac{d-r-s}{2}}^{-1} \binom{d}{s}^{-1} (\sqrt{c_1} a_1)^{b_0+r-k+l+2} (\sqrt{c_2} a_2)^{b_0+k+s-l+2} (c_1 a_1^2 - c_2 a_2^2)^{\frac{d-r-s}{2}} \\ &\quad \times e^{-2\pi(c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2)} \sum_{i=-l}^k (-1)^i a_i^{(k,l)} (c_1 a_1^2 c_2^{-1} a_2^{-2})^{k-l-i} \binom{d}{\frac{d-r-s}{2} + s + i} g_{-i,i}(a), \\ a_i^{(k,l)} &= \sum_{j=0}^l \binom{\frac{d-r-s}{2} + r - i}{j} \binom{r-i-j}{l-j} \binom{k}{i+j} \binom{\frac{d-r-s}{2} + s + i + j}{\frac{d-r-s}{2} + k + l}, \\ g_{-i,i}(a) &= \int_0^1 F(2\pi c_1 a_1^2 t + 2\pi c_2 a_2^2 (1-t)) t^{\frac{d-r-s}{2} + r - i} (1-t)^{\frac{d-r-s}{2} + s + i} dt. \end{aligned}$$

ここで,

$$F(x) = e^x x^{-\frac{d+b_0+2}{2}} W_{\frac{b_0-d-2}{2}, \frac{b_3-1}{2}}(2x).$$

また  $W_{\kappa, \mu}(z)$  は Whittaker の合流型超幾何関数 ([15] の 16 章を参照) であり,  $b_0, \dots, b_3$  は  $[r, s; u]$  から決まる整数である.  $2b_0 = r + s + u$ ,  $2b_3 = -r - s + u$  など.

直接計算により次の系を得る. 対応する Andrianov- $L$  関数のガンマ因子の計算に役立つと思われる.

**系 6.1** 上の定理において  $d = r + s$  のとき,  $c_{kl}(a)$  の明示公式で  $x = c_1 a_1^2 = c_2 a_2^2$  とせよ. このとき

$$c_{kl}(x) = (-1)^{k+l} \binom{r}{k} \binom{s}{l} x^{\frac{b_0+2}{2}} e^{-2\pi x} W_{\frac{b_3-2}{2}, \frac{b_3-1}{2}}(4\pi x), \quad (14)$$

が  $k$  と  $l$  に独立な定数を除いて成り立つ.

## 7 主定理 (不定符号), $J = \text{III}$

前節の結果において注目すべきは, 中間の離散系列  $\pi_\Lambda$  ( $\Lambda \in \Xi_{\text{III}}$ ) に関しては  $N_S$  の指標  $\xi$  が定符号である限り, モデルは存在しなくて, 対応する一般化 Whittaker 関数は 0 以外にない. これは  $\pi_\Lambda$  に対する非正則調和的保型形式の Fourier 展開には  $N_S$  の指標が不定符号に対応する項しかあらわれないことを意味する. これは, 正則カスプ形式の Koecher 原理の類似の現象であり, “逆 Koecher 原理” とも呼ぶべきものである.

中間の離散系列に対してはさらに  $N_S$  の指標が不定符号のときも定符号のときと同様な手順を踏むことにより以下の結果を得る.

**定理 4**  $\pi = \pi_\Lambda^*$  を離散系列表現で,  $\Lambda = [r-1, s+1, u] \in \Xi_{\text{III}}$ , ( $r-s-2 > |u|$ ) なるものとし,  $N_S$  の指標  $\xi = \text{diag}(c_1, c_2)$  を  $c_1 > 0$  かつ  $c_2 < 0$  なる不定符号とし,  $\chi$  を  $SU(\xi)$  ( $\simeq SU(1,1)$ ) の既約ユニタリ表現とする.  $\eta = \chi \otimes \xi$  とおく.

(a)  $\chi$  が ユニタリ主系列表現, 補系列表現 もしくは トリヴィアル表現ならば,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{(\mathfrak{g}, K)}(\pi_\Lambda^*, C_\eta^\infty(R \backslash G)) = 0. \quad (15)$$

(b-1)  $\chi$  が Blattner parameter が  $\pm p$  なる離散系列表現  $D_p^\pm$  であつて  $p < r-s$  または  $p > r+s$  なる条件を満たすとすれば,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{(\mathfrak{g}, K)}(\pi_\Lambda^*, C_\eta^\infty(R \backslash G)) = 0. \quad (16)$$

(b-2)  $\chi$  が Blattner parameter が  $p$  なる離散系列表現  $D_p^+$  であつて  $r-s \leq p \leq r+s$  かつ  $p \equiv r+s \pmod{2}$  なる条件を満たすとすれば,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{(\mathfrak{g}, K)}(\pi_\Lambda^*, C_\eta^\infty(R \backslash G)) = 1. \quad (17)$$

この場合さらに,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{(\mathfrak{g}, K)}(\pi_\Lambda^*, C_\eta^\infty(R \backslash G)^{\text{mod}}) = 0. \quad (18)$$

より正確には,  $0 \leq q \leq s$  なる整数を使い  $p = r-s+2q$  と書けば,  $\pi = \pi_\Lambda^*$  に対する極小  $K$ -タイプ  $\tau^*$ ,  $\tau = [r, s; u]$  につき一般化 Whittaker 関数  $\Phi_{\pi, \tau}(a)$  はつぎのように記述される.

$\Phi_{\pi, \tau}(a) = \sum_{j \in p+2\mathbb{Z}_{\geq 0}} \sum_{\substack{0 \leq k \leq r \\ 0 \leq l \leq s}} b_{jkl}(a)(u_j \otimes f_{kl}) \in C_{M_0}^\infty(A; V_p \otimes W_\tau)$  とかけば,  $\Phi_{\pi, \tau}(a)$  は以下のように定数倍を除いて一意に書かれ

$$\Phi_{\pi, \tau}(a) = \sum_{w=0}^{s-q} \sum_{h=0}^{s-q-w} b_{p+2h, s-q-w-h, w}(a)(u_{p+2h} \otimes f_{s-q-w-h, w}),$$

上に現れる係数関数は次で与えられる

$$\begin{aligned} & b_{p+2h, s-q-w-h, w}(a) \\ &= \binom{r-s+q+w+h}{h}^{-1} \binom{r-s+q+w}{w}^{-1} (w!)^{-1} \binom{s-q-w}{h} \binom{s-q}{w} \\ & \times \mathcal{R}_h^{(p, w)}(\sqrt{c_1}a_1, \sqrt{-c_2}a_2) \cdot \mathcal{F}_w^+(-4\pi c_1 a_1^2 + 4\pi c_2 a_2^2) \\ & \times (\sqrt{c_1}a_1)^{r+2-b_2-q} (\sqrt{-c_2}a_2)^{r+2+b_1-q} \\ & \times (c_1 a_1^2 - c_2 a_2^2)^{-(s-q+1)} e^{2\pi(c_1 a_1^2 - c_2 a_2^2)}. \end{aligned} \quad (19)$$

ゆえに, すべての  $b_{jkl}(a)$  は指数増大である.

(b-3)  $\chi$  が Blattner parameter が  $-p$  なる離散系列表現  $D_p^-$  であつて  $r-s \leq p \leq r+s$  かつ  $p \equiv r+s \pmod{2}$  なる条件を満たすとすれば,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{(\mathfrak{g}, K)}(\pi_{\Lambda}^*, C_{\eta}^{\infty}(R \setminus G)) = 1. \quad (20)$$

この場合さらに,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{(\mathfrak{g}, K)}(\pi_{\Lambda}^*, C_{\eta}^{\infty}(R \setminus G)^{\text{mod}}) = 1. \quad (21)$$

より正確には,  $0 \leq q \leq s$  なる整数を使い  $p = r - s + 2q$  と書けば,  $\pi = \pi_{\Lambda}^*$  に対する極小  $K$ -タイプ  $\tau^*$ ,  $\tau = [r, s; u]$  につき一般化 Whittaker 関数  $\Phi_{\pi, \tau}(a)$  はつぎのように記述される.

$\Phi_{\pi, \tau}(a) = \sum_{j \in -p+2\mathbb{Z}_{\leq 0}} \sum_{\substack{0 \leq k \leq r \\ 0 \leq l \leq s}} b_{jkl}(a)(u_j \otimes f_{kl}) \in C_{M_0}^{\infty}(A; \bar{V}_p \otimes W_{\tau})$  とかけば,  $\Phi_{\pi, \tau}(a)$  は以下のように定数倍を除いて一意に書かれ

$$\Phi_{\pi, \tau}(a) = \sum_{w=0}^{s-q} \sum_{h=0}^{s-q-w} b_{-p-2h, r-s+q+w+h, s-w}(a)(u_{-p-2h} \otimes f_{r-s+q+w+h, s-w}),$$

上に現れる係数関数は次で与えられる

$$\begin{aligned} & b_{-p-2h, r-s+q+w+h, s-w}(a) \\ &= \binom{r-s+q+w+h}{h}^{-1} \binom{r-s+q+w}{w}^{-1} (w!)^{-1} \binom{s-q-w}{h} \binom{s-q}{w} \\ & \times \mathcal{R}_h^{(p,u)}(\sqrt{-c_2 a_2}, \sqrt{c_1 a_1}) \cdot \mathcal{F}_w^+(4\pi c_1 a_1^2 - 4\pi c_2 a_2^2) \\ & \times (\sqrt{c_1 a_1})^{r+2+b_1-q} (\sqrt{-c_2 a_2})^{r+2-b_2-q} \\ & \times (c_1 a_1^2 - c_2 a_2^2)^{-(s-q+1)} e^{-2\pi(c_1 a_1^2 - c_2 a_2^2)}. \end{aligned} \quad (22)$$

実際, すべての  $b_{jkl}(a)$  は急減少である.

ここで明示公式に現れる多項式は

$$\mathcal{F}_w^+(x) = \sum_{i=0}^w \binom{w}{i} \frac{(s-w+i)!}{(s-w)!} x^{w-i},$$

であり, Laurent 多項式は

$$\mathcal{R}_h^{(p,u)}(x, y) = \sum_{i=0}^h (-1)^i \binom{\frac{p-u}{2} + h - i - 1}{h-i} \binom{\frac{p+u}{2} + i - 1}{i} x^{h-2i} y^{-h+2i}.$$

である.

*Remark.* (b-2) に出てくる係数関数  $b_{p+2h, s-q-w-h, w}(a)$  は変数を  $(\sqrt{c_1 a_1}, \sqrt{-c_2 a_2})$  から  $(\sqrt{-c_2 a_2}, \sqrt{c_1 a_1})$  へ取り替えれば (b-3) に出てくる  $b_{-p-2h, r-s+q+w+h, s-w}(a)$  と同じである.

離散系列表現以外に  $G$  の許容表現  $\pi$  が Jacobi 放物型部分群から誘導された主系列表現  $\pi_J$  の場合も扱った. 結果は大きい離散系列の場合と同様である.

## References

- [1] A. Debiard and B. Gaveau: Représentation intégrale de certaines séries de fonctions sphériques d'un système de racines  $BC$ . J. Funct. Anal. **96** (1991), 256-296.
- [2] A. Debiard and B. Gaveau: Integral formulas for the spherical polynomials of a root system of type  $BC_2$ . J. Funct. Anal. **119** (1994), 401-454.
- [3] Y. Gon: Generalized Whittaker functions on  $SU(2, 2)$  with respect to the Siegel parabolic subgroup. Thesis, University of Tokyo (1998), 1-100.
- [4] T. Hayata: Differential equations for principal series Whittaker functions on  $SU(2, 2)$ . Indag. Mathem., N.S., **8** (4), (1997), 493-528.
- [5] T. Hayata and T. Oda: An explicit integral representation of Whittaker functions for the representations of the discrete series —the case of  $SU(2, 2)$ —. J. Math. Kyoto Univ. **37-3** (1997), 519-530.
- [6] A. Hori: Andrianov's  $L$ -functions associated to Siegel wave forms of degree two. Math. Ann. **303** (1995), 195-226.
- [7] M. Iida: Spherical functions of the principal series representations of  $Sp(2, \mathbf{R})$  as hypergeometric functions of  $C_2$ -type. Publ. RIMS, Kyoto Univ. **32** (1996), 689-727.
- [8] A. W. Knap: Representation theory of semisimple groups, — an overview based on examples—, Princeton Mathematical Series **36** (1986), 1-773.
- [9] M. Koecher: Zur Theorie der Modulformen  $n$ -ten Grades. I. Math. Z. **59** (1959), 399-416.
- [10] B. Kostant: On Whittaker vectors and representation theory. Invent. Math. **48** (1978), 101-184.
- [11] T. Miyazaki: The generalized Whittaker functions for  $Sp(2, \mathbf{R})$  and gamma factor of the Andrianov  $L$ -function. preprint, RIMS-1053. (1995), 1-74.
- [12] S. Niwa: On generalized Whittaker functions on Siegel's upper half space of degree 2. Nagoya Math. J. **121** (1991), 171-184.
- [13] D. Vogan Jr.: Gelfand-Kirillov dimension for Harish-Chandra modules. Invent. Math. **49** (1978), 75-98.
- [14] N. Wallach: Asymptotic expansions of generalized matrix entries of representations of real reductive groups. Lie Group Representations I, Lecture Notes in Math. **1024**, Springer-Verlag (1984), 287-369.
- [15] E. T. Whittaker and G. N. Watson: A course of modern analysis. Cambridge Univ. Press, 4ed., (1965), 1-608.
- [16] H. Yamashita: Finite multiplicity theorems for induced representations of semisimple Lie groups I, II. J. Math. Kyoto Univ. **28** (1988), 173-211, 383-444.
- [17] H. Yamashita: Embeddings of discrete series into induced representations of semisimple Lie groups, I: General theory and the case of  $SU(2, 2)$ . Japan J. Math. (N.S.), **16** (1990), 31-95.