数理解析研究所講究録
1053巻 1998年 30-40

三次元球面 S^3, レンズ空間 $L(2,1), L(3,1)$ の Turaev-Viro-Ocneanu 不変量

東大数理 鈴木 幸太郎 (Koutarou SUZUKI) *

この記事では、E_6 $6j$-symbol を用いていくつかの多様体について Turaev-Viro-Ocneanu 不変量の値を計算します。まず三次元球面 S^3 について計算し、つぎにレンズ空間 $L(2,1), L(3,1)$ について計算します。詳しい不変量の定義については、和久井氏の記事 [W] を参照してください。

なお、以下では $\mu(\rho) = d = 1+\sqrt{3}, \mu(\alpha) = \mu(id) = 1, \omega = \mu^2(id) + \mu^2(\alpha) + \mu^2(\rho) = 6+2\sqrt{3}$ とします。

1 $6j$-symbol の表

計算を始める前に、(正規化していない)E_6 $6j$-symbol の表を載せておきます。なお、E_6 $6j$-symbol の値は、泉氏の論文 [I] によっています。

(正規化していない)E_6 $6j$-symbol で 0 でないものは、以下のようになります。

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{d}} e^{-\frac{5\pi}{6}\sqrt{-1}}, \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{7\pi}{12}\sqrt{-1}}, \quad c_3 = -\frac{1}{d}, \quad c_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}$$

$$\begin{array}{c} \rho\rho\rho S_l\ \rho\rho \\ S_i \boxed{} S_j \\ \rho\rho S_m\ \rho \end{array} =$$

(i,l,j,m)	
(3,3,3,3)	c_3
(3,3,4,4)	c_4
(3,4,3,3)	$\sqrt{-1}c_4$
(3,4,4,4)	$\sqrt{-1}c_3$
(4,3,3,4)	c_4
(4,3,4,3)	c_3
(4,4,3,4)	$-\sqrt{-1}c_3$
(4,4,4,3)	$-\sqrt{-1}c_4$
otherwise	0

*The author was partially supported by Research Fellowships of the Japan Society for the Promotion of Science for Young Scientists.
e-mail : koutarou@ms.u-tokyo.ac.jp

$$\begin{array}{c}\rho\rho\rho\,\underline{S_i}\,\rho\rho\\ S_j|\square|S_2\\ \rho\rho\,\overline{S_2}\,\alpha\end{array} = \begin{array}{c|cc} & j=3 & j=4\\ \hline i=3 & c_2 & -c_2\\ i=4 & \sqrt{-1}c_2 & \sqrt{-1}c_2\end{array} \qquad \begin{array}{c}\rho\rho\rho\,\underline{S_i}\,\rho\rho\\ S_j|\square|S_1\\ \rho\rho\,\overline{S_1}\,id\end{array} = \begin{array}{c|cc} & j=3 & j=4\\ \hline i=3 & c_2 & c_2\\ i=4 & \sqrt{-1}c_2 & -\sqrt{-1}c_2\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\rho\rho\rho\,\underline{S_2}\,\rho\alpha\\ S_i|\square|U\\ \rho\rho\,\overline{S_j}\,\rho\end{array} = \begin{array}{c|cc} & j=3 & j=4\\ \hline i=3 & 0 & \frac{1}{\sqrt{d}}e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}\\ i=4 & \frac{1}{\sqrt{d}}e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}} & 0\end{array} \qquad \begin{array}{c}\rho\rho\rho\,\underline{S_1}\,\rho id\\ S_i|\square|1\\ \rho\rho\,\overline{S_j}\,\rho\end{array} = \begin{array}{c|cc} & j=3 & j=4\\ \hline i=3 & \frac{1}{\sqrt{d}}e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}} & 0\\ i=4 & 0 & \frac{1}{\sqrt{d}}e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\rho\rho\rho\,\underline{S_i}\,\rho\rho\\ S_2|\square|S_j\\ \alpha\rho\,\overline{1}\,\rho\end{array} = \begin{array}{c|cc} & j=3 & j=4\\ \hline i=3 & \frac{c_1}{\sqrt{2}} & -\frac{c_1}{\sqrt{2}}\\ i=4 & \frac{c_1}{\sqrt{2}} & \frac{c_1}{\sqrt{2}}\end{array} \qquad \begin{array}{c}\rho\rho\rho\,\underline{S_i}\,\rho\rho\\ S_1|\square|S_j\\ id\rho\,\overline{1}\,\rho\end{array} = \begin{array}{c|cc} & j=3 & j=4\\ \hline i=3 & \frac{c_1}{\sqrt{2}} & \frac{c_1}{\sqrt{2}}\\ i=4 & \frac{c_1}{\sqrt{2}} & -\frac{c_1}{\sqrt{2}}\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\rho\rho\rho\,\underline{S_2}\,\rho\alpha\\ S_2|\square|U\\ \alpha\rho\,\overline{1}\,\rho\end{array} = -\frac{1}{d} \qquad \begin{array}{c}\rho\rho\rho\,\underline{S_2}\,\rho\alpha\\ S_1|\square|U\\ id\rho\,\overline{1}\,\rho\end{array} = \frac{1}{d} \qquad \begin{array}{c}\rho\rho\rho\,\underline{S_1}\,\rho id\\ S_2|\square|1\\ \alpha\rho\,\overline{1}\,\rho\end{array} = \frac{1}{d} \qquad \begin{array}{c}\rho\rho\rho\,\underline{S_1}\,\rho id\\ S_1|\square|1\\ id\rho\,\overline{1}\,\rho\end{array} = \frac{1}{d}$$

$$\begin{array}{c}\rho\rho\alpha\,\underline{U}\,\rho\rho\\ S_i|\square|S_j\\ \rho\alpha\,\overline{U}\,\rho\end{array} = \begin{array}{c|cc} & j=3 & j=4\\ \hline i=3 & 0 & \sqrt{-1}\\ i=4 & -\sqrt{-1} & 0\end{array} \qquad \begin{array}{c}\rho\rho\alpha\,\underline{U}\,\rho\rho\\ S_1|\square|S_2\\ id\alpha\,\overline{1}\,\alpha\end{array} = 1 \qquad \begin{array}{c}\rho\rho\alpha\,\underline{U}\,\rho\rho\\ S_2|\square|S_1\\ \alpha\alpha\,\overline{1}\,id\end{array} = 1$$

$$\begin{array}{c}\rho\alpha\rho\,\underline{1}\,\rho\rho\\ U|\square|S_j\\ \rho\rho\,\overline{S_i}\,\rho\end{array} = \begin{array}{c|cc} & j=3 & j=4\\ \hline i=3 & 0 & 1\\ i=4 & 1 & 0\end{array} \qquad \begin{array}{c}\rho\alpha\rho\,\underline{1}\,\rho\rho\\ U|\square|S_2\\ \rho\rho\,\overline{S_2}\,\alpha\end{array} = -1 \qquad \begin{array}{c}\rho\alpha\rho\,\underline{1}\,\rho\rho\\ U|\square|S_1\\ \rho\rho\,\overline{S_1}\,id\end{array} = 1$$

$$\begin{array}{c}\rho\rho id\,\underline{1}\,\rho\rho\\ S_i|\square|S_j\\ \rho id\,\overline{1}\,\rho\end{array} = \begin{array}{c|cc} & j=3 & j=4\\ \hline i=3 & 1 & 0\\ i=4 & 0 & 1\end{array} \qquad \begin{array}{c}\rho\rho id\,\underline{1}\,\rho\rho\\ S_2|\square|S_2\\ \alpha id\,\overline{1}\,\alpha\end{array} = 1 \qquad \begin{array}{c}\rho\rho id\,\underline{1}\,\rho\rho\\ S_1|\square|S_1\\ idid\,\overline{1}\,id\end{array} = 1$$

$$\begin{array}{c}\rho id\rho\,\underline{1}\,\rho\rho\\ 1|\square|S_i\\ \rho\rho\,\overline{S_j}\,\rho\end{array} = \begin{array}{c|cc} & j=3 & j=4\\ \hline i=3 & 1 & 0\\ i=4 & 0 & 1\end{array} \qquad \begin{array}{c}\rho id\rho\,\underline{1}\,\rho\rho\\ 1|\square|S_2\\ \rho\rho\,\overline{S_2}\,\alpha\end{array} = 1 \qquad \begin{array}{c}\rho id\rho\,\underline{1}\,\rho\rho\\ 1|\square|S_1\\ \rho\rho\,\overline{S_1}\,id\end{array} = 1$$

$$\begin{array}{c}\rho\alpha\alpha\,\underline{1}\,\rho id\\ U|\square|1\\ \rho\alpha\,\overline{U}\,\rho\end{array} = 1 \qquad \begin{array}{c}\rho\alpha id\,\underline{1}\,\rho\alpha\\ U|\square|U\\ \rho id\,\overline{1}\,\rho\end{array} = 1 \qquad \begin{array}{c}\rho id\alpha\,\underline{1}\,\rho\alpha\\ 1|\square|U\\ \rho\alpha\,\overline{U}\,\rho\end{array} = 1 \qquad \begin{array}{c}\rho idid\,\underline{1}\,\rho id\\ 1|\square|1\\ \rho id\,\overline{1}\,\rho\end{array} = 1$$

$$\begin{matrix} \alpha\rho\rho\,\overline{S_i}\,\alpha\rho \\ 1|\square|1 \\ \rho\rho\,\overline{S_j}\,\rho \end{matrix} = \begin{array}{c|cc} & j=3 & j=4 \\ \hline i=3 & 1 & 0 \\ i=4 & 0 & -1 \end{array} \quad \begin{matrix} \alpha\rho\rho\,\overline{S_2}\,\alpha\alpha \\ 1|\square|1 \\ \rho\rho\,\overline{S_1}\,id \end{matrix} =1 \quad \begin{matrix} \alpha\rho\rho\,\overline{S_1}\,\alpha id \\ 1|\square|1 \\ \rho\rho\,\overline{S_2}\,\alpha \end{matrix} =1$$

$$\begin{matrix} \alpha\rho\alpha\,\overline{U}\,\alpha\rho \\ 1|\square|1 \\ \rho\alpha\,\overline{U}\,\rho \end{matrix} =-1 \quad \begin{matrix} \alpha\alpha\rho\,\overline{1}\,\alpha\rho \\ 1|\square|1 \\ id\rho\,\overline{1}\,\rho \end{matrix} =1 \quad \begin{matrix} \alpha\alpha\alpha\,\overline{1}\,\alpha id \\ 1|\square|1 \\ id\alpha\,\overline{1}\,\alpha \end{matrix} =1$$

$$\begin{matrix} \alpha\rho id\,\overline{1}\,\alpha\rho \\ 1|\square|1 \\ \rho id\,\overline{1}\,\rho \end{matrix} =1 \quad \begin{matrix} \alpha\alpha id\,\overline{1}\,\alpha\alpha \\ 1|\square|1 \\ idid\,\overline{1}\,id \end{matrix} =1 \quad \begin{matrix} \alpha idid\,\overline{1}\,\alpha id \\ 1|\square|1 \\ \alpha id\,\overline{1}\,\alpha \end{matrix} =1 \quad \begin{matrix} \alpha id\rho\,\overline{1}\,\alpha\rho \\ 1|\square|1 \\ \alpha\rho\,\overline{1}\,\rho \end{matrix} =1 \quad \begin{matrix} \alpha id\alpha\,\overline{1}\,\alpha\alpha \\ 1|\square|1 \\ \alpha\alpha\,\overline{1}\,id \end{matrix} =1$$

$$\begin{matrix} id\rho\rho\,\overline{S_i}\,id\rho \\ 1|\square|1 \\ \rho\rho\,\overline{S_j}\,\rho \end{matrix} = \begin{array}{c|cc} & j=3 & j=4 \\ \hline i=3 & 1 & 0 \\ i=4 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{matrix} id\rho\rho\,\overline{S_2}\,id\alpha \\ 1|\square|1 \\ \rho\rho\,\overline{S_2}\,\alpha \end{matrix} =1 \quad \begin{matrix} id\rho\rho\,\overline{S_1}\,idid \\ 1|\square|1 \\ \rho\rho\,\overline{S_1}\,id \end{matrix} =1$$

$$\begin{matrix} id\rho\alpha\,\overline{U}\,id\rho \\ 1|\square|1 \\ \rho\alpha\,\overline{U}\,\rho \end{matrix} =1 \quad \begin{matrix} id\alpha\rho\,\overline{1}\,id\rho \\ 1|\square|1 \\ \alpha\rho\,\overline{1}\,\rho \end{matrix} =1 \quad \begin{matrix} id\alpha\alpha\,\overline{1}\,idid \\ 1|\square|1 \\ \alpha\alpha\,\overline{1}\,id \end{matrix} =1$$

$$\begin{matrix} id\rho id\,\overline{1}\,id\rho \\ 1|\square|1 \\ \rho id\,\overline{1}\,\rho \end{matrix} =1 \quad \begin{matrix} id\alpha id\,\overline{1}\,id\alpha \\ 1|\square|1 \\ \alpha id\,\overline{1}\,\alpha \end{matrix} =1 \quad \begin{matrix} ididid\,\overline{1}\,idid \\ 1|\square|1 \\ idid\,\overline{1}\,id \end{matrix} =1 \quad \begin{matrix} idid\rho\,\overline{1}\,id\rho \\ 1|\square|1 \\ id\rho\,\overline{1}\,\rho \end{matrix} =1 \quad \begin{matrix} idid\alpha\,\overline{1}\,id\alpha \\ 1|\square|1 \\ id\alpha\,\overline{1}\,\alpha \end{matrix} =1$$

2　三次元球面 S^3の不変量の値

まず、三次元球面S^3について計算します。

三次元球面S^3の色付き単体分割として、一つの色付き単体とその鏡像とを対応する面および辺どうしはり合わせたものを取ることができます。鏡像の $6j$-symbol の値はもとの色付き単体の $6j$-symbol の値の複素共役になることを用い、正規化因子と辺の色付けの因子とが

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\mu(e)}\sqrt{\mu(d)}}\right)^2 \times \mu(a)\mu(b)\mu(c)\mu(d)\mu(e)\mu(f) = \mu(a)\mu(b)\mu(c)\mu(f)$$

となること、およびの三次元球面S^3中で単体分割の頂点が 4 個であることに注意すると、三次元球面S^3の不変量の値はつぎのように書けます。

$$< S^3 >= \omega^{-4} \sum_{coloring} \mu(a)\mu(b)\mu(c)\mu(f) \times \left| \begin{matrix} abc\,\overline{C}\,ad \\ A|\square|B \\ ec\,\overline{D}\,f \end{matrix} \right|^2$$

ここで、和は先に示した色付けすべてについて和を取ります。

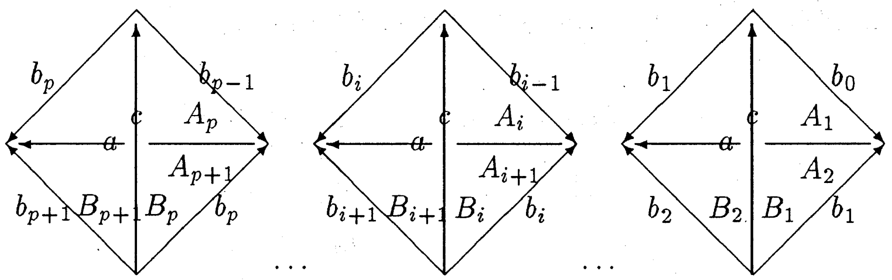
先に示した色付けの表を見ながら計算すると、三次元球面 S^3 の不変量の値は次のようになります。

$$< S^3 >= \omega^{-4}(8 + 32d^2 + 24d^3 + 2d^4) = \omega^{-1}$$

3　レンズ空間 $L(p,1)$ の単体分割と不変量の計算

つぎに、レンズ空間 $L(p,1)$ について考えます。

レンズ空間 $L(p,1)$ の単体分割として、つぎのような色付き単体分割を取ることができます。



where $b_0 = b_p, b_1 = b_{p+1}, A_1 = A_{p+1}, B_1 = B_{p+1}$

この色付き単体分割に対応する $6j$-symbol は、つぎのようになります。

$$\begin{array}{ccc} ab_0c & B_1 & ab_1 \\ A_1 & \boxed{} & A_2 \\ b_1c & B_2 & b_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} ab_1c & B_2 & ab_2 \\ A_2 & \boxed{} & A_3 \\ b_2c & B_3 & b_3 \end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{ccc} ab_{i-1}c & B_i & ab_i \\ A_i & \boxed{} & A_{i+1} \\ b_ic & B_{i+1} & b_{i+1} \end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{ccc} ab_{p-1}c & B_p & ab_p \\ A_p & \boxed{} & A_{p+1} \\ b_pc & B_{p+1} & b_{p+1} \end{array}$$

where $b_0 = b_p, b_1 = b_{p+1}, A_1 = A_{p+1}, B_1 = B_{p+1}$

よって、正規化因子と辺の色付けの因子とが

$$\prod_{i=1}^{p} \left(\frac{1}{\sqrt{\mu(b_i)}} \right)^2 \times \mu(a)\mu(c) \prod_{i=1}^{p} \mu(b_i) = \mu(a)\mu(c)$$

となること、およびのレンズ空間 $L(p,1)$ 中で単体分割の頂点が 2 個であることに注意すると、レンズ空間 $L(p,1)$ の不変量の値はつぎのように書けます。

$$< L(p,1) >= \omega^{-2} \sum_{coloring} \mu(a)\mu(c) \times \prod_{i=1}^{p} \begin{array}{ccc} ab_{i-1}c & B_i & ab_i \\ A_i & \boxed{} & A_{i+1} \\ b_ic & B_{i+1} & b_{i+1} \end{array}$$

ここで、和は次の式を満たす色付けすべてについて和を取ります。

$$ab_{i-1} = b_i, b_{i-1}c = b_i \quad (i = 1, \cdots, p)$$

この和は、$a = id$ の場合および $a = \alpha$の場合については、レンズ空間 $L(p,1)$ に対してつぎのように計算することができます。

残りの $a = \rho$の場合については、レンズ空間 $L(2,1), L(3,1)$ に対して、あとの章で計算することにします。

3.1 $a = id$ の場合

$a = id$ の場合には、先の条件を満たす色付けとその値は次のようになります。

1. $a = id, b_1 = \cdots = b_p = id, c = id$ のとき。このとき、

$$\begin{array}{ccc} ididid & 1 & idid \\ 1 & \square & 1 \\ idid & 1 & id \end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{ccc} ididid & 1 & idid \\ 1 & \square & 1 \\ idid & 1 & id \end{array}$$

となり、値は$\omega^{-2} \times 1 \times 1^p = \omega^{-2}$となります。

2. $a = id, b_1 = \cdots = b_p = \alpha, c = id$ のとき。このとき、

$$\begin{array}{ccc} id\alpha id & 1 & id\alpha \\ 1 & \square & 1 \\ \alpha id & 1 & \alpha \end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{ccc} id\alpha id & 1 & id\alpha \\ 1 & \square & 1 \\ \alpha id & 1 & \alpha \end{array}$$

となり、値は$\omega^{-2} \times 1 \times 1^p = \omega^{-2}$となります。

3. $a = id, b_1 = \cdots = b_p = \rho, c = id$ のとき。このとき、

$$\begin{array}{ccc} id\rho id & 1 & id\rho \\ 1 & \square & 1 \\ \rho id & 1 & \rho \end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{ccc} id\rho id & 1 & id\rho \\ 1 & \square & 1 \\ \rho id & 1 & \rho \end{array}$$

となり、値は$\omega^{-2} \times 1 \times 1^p = \omega^{-2}$となります。

4. $a = id, b_1 = \cdots = b_p = \rho, c = \alpha$のとき。このとき、

$$\begin{array}{ccc} id\rho\alpha & U & id\rho \\ 1 & \square & 1 \\ \rho\alpha & U & \rho \end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{ccc} id\rho\alpha & U & id\rho \\ 1 & \square & 1 \\ \rho\alpha & U & \rho \end{array}$$

となり、値は$\omega^{-2} \times 1 \times 1^p = \omega^{-2}$となります。

5. $a = id, b_1 = \cdots = b_p = \rho, c = \rho$のとき。このとき、

$$\begin{array}{ccc} id\rho\rho & S_{i_1} & id\rho \\ 1 & \square & 1 \\ \rho\rho & S_{i_2} & \rho \end{array} \quad \begin{array}{ccc} id\rho\rho & S_{i_2} & id\rho \\ 1 & \square & 1 \\ \rho\rho & S_{i_3} & \rho \end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{ccc} id\rho\rho & S_{i_p} & id\rho \\ 1 & \square & 1 \\ \rho\rho & S_{i_1} & \rho \end{array}$$

となり、値は$\omega^{-2} \times d \times trA^p = \omega^{-2} \times 2d$ となります。

ただし、Aは$(i-2, j-2)$成分が $\begin{array}{ccc} id\rho\rho & S_i & id\rho \\ 1 & \square & 1 \\ \rho\rho & S_j & \rho \end{array}$ である行列$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ です。

以上を合わせると、この場合の値は$\omega^{-2}(1+1+1+1+2d) = \omega^{-1}$ となります。

3.2 $a = \alpha$の場合

$a = \alpha$の場合には、先の条件を満たす色付けとその値は次のようになります。

1. $a = \alpha, b_1 = \cdots = b_p = \rho, c = id$ のとき。このとき、

$$\begin{array}{ccc} \alpha\rho id & 1 & \alpha\rho \\ 1 & \square & 1 \\ \rho id & 1 & \rho \end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{ccc} \alpha\rho id & 1 & \alpha\rho \\ 1 & \square & 1 \\ \rho id & 1 & \rho \end{array}$$

となり、値は$\omega^{-2} \times 1 \times 1^p = \omega^{-2}$となります。

2. $a = \alpha, b_1 = \cdots = b_p = \rho, c = \alpha$のとき。このとき、

$$
\begin{array}{ccc}
\alpha\rho\alpha & U & \alpha\rho \\
1 & \boxed{} & 1 \\
\rho\alpha & U & \rho
\end{array}
\quad \cdots \quad
\begin{array}{ccc}
\alpha\rho\alpha & U & \alpha\rho \\
1 & \boxed{} & 1 \\
\rho\alpha & U & \rho
\end{array}
$$

となり、値は$\omega^{-2} \times 1 \times (-1)^p = \omega^{-2} \times (-1)^p$ となります。

3. $a = \alpha, b_1 = \cdots = b_p = \rho, c = \rho$のとき。このとき、

$$
\begin{array}{ccc}
\alpha\rho\rho & S_{i_1} & \alpha\rho \\
1 & \boxed{} & 1 \\
\rho\rho & S_{i_2} & \rho
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
\alpha\rho\rho & S_{i_2} & \alpha\rho \\
1 & \boxed{} & 1 \\
\rho\rho & S_{i_3} & \rho
\end{array}
\quad \cdots \quad
\begin{array}{ccc}
\alpha\rho\rho & S_{i_p} & \alpha\rho \\
1 & \boxed{} & 1 \\
\rho\rho & S_{i_1} & \rho
\end{array}
$$

となり、値は$\omega^{-2} \times d \times trB^p = \omega^{-2} \times (1 + (-1)^p)d$ となります。

ただし、Bは$(i-2, j-2)$成分が $\begin{array}{ccc} \alpha\rho\rho & S_i & \alpha\rho \\ 1 & \boxed{} & 1 \\ \rho\rho & S_j & \rho \end{array}$ である行列$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ です。

pが偶数のときには、さらに次のような場合があります。

1. $a = id, b_1 = id, b_2 = \alpha, \cdots b_{p-1} = id, b_p = \alpha, c = \alpha$のとき。このとき、

$$
\begin{array}{ccc}
\alpha id\alpha & 1 & \alpha\alpha \\
1 & \boxed{} & 1 \\
\alpha\alpha & 1 & id
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
\alpha\alpha\alpha & 1 & \alpha id \\
1 & \boxed{} & 1 \\
id\alpha & 1 & \alpha
\end{array}
\quad \cdots \quad
\begin{array}{ccc}
\alpha id\alpha & 1 & \alpha\alpha \\
1 & \boxed{} & 1 \\
\alpha\alpha & 1 & id
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
\alpha\alpha\alpha & 1 & \alpha id \\
1 & \boxed{} & 1 \\
id\alpha & 1 & \alpha
\end{array}
$$

となり、b_iの偶数番目と奇数番目を入れ換えた色付けもあることを考慮して、値は$2 \times \omega^{-2} \times 1 \times 1^p = 2 \times \omega^{-2}$ となります。

以上を合わせると、この場合の値は、pが偶数のとき$\omega^{-2}(1+1+2d+2) = \omega^{-1}$、$p$が奇数のとき$\omega^{-2}(1 + (-1) + 0) = 0$ となります。

4 レンズ空間 $L(2,1)$ の不変量の値

レンズ空間 $L(2,1)$ に対して、残りの $a=\rho$の場合について考えると、先の条件を満たす色付けとその値は次のようになります。

1. $a=\rho, b_1=\rho, b_2=id, c=\rho$のとき。このとき、

$$\begin{array}{ccc} \rho id\rho & 1 & \rho\rho \\ 1 & \square & S_1 \\ \rho\rho & S_1 & id \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \rho\rho\rho & S_1 & \rho id \\ S_1 & \square & 1 \\ id\rho & 1 & \rho \end{array}$$

となり、b_1と b_2を入れ換えた色付けもあることを考慮して、値は $2\times\omega^{-2}\times d^2\times d^{-1}=2\times\omega^{-2}\times d$ となります。

2. $a=\rho, b_1=\rho, b_2=\alpha, c=\rho$のとき。このとき、

$$\begin{array}{ccc} \rho\alpha\rho & 1 & \rho\rho \\ U & \square & S_2 \\ \rho\rho & S_2 & \alpha \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \rho\rho\rho & S_2 & \rho\alpha \\ S_2 & \square & U \\ \alpha\rho & 1 & \rho \end{array}$$

となり、b_1と b_2を入れ換えた色付けもあることを考慮して、値は $2\times\omega^{-2}\times d^2\times d^{-1}=2\times\omega^{-2}\times d$ となります。

3. $a=\rho, b_1=\rho, b_2=\rho, c=id$ のとき。このとき、

$$\begin{array}{ccc} \rho\rho id & 1 & \rho\rho \\ S_i & \square & S_j \\ \rho id & 1 & \rho \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \rho\rho id & 1 & \rho\rho \\ S_j & \square & S_i \\ \rho id & 1 & \rho \end{array}$$

となり、値は$\omega^{-2}\times d\times trC^2=\omega^{-2}\times 2d$ となります。

ただし、Cは$(i-2, j-2)$成分が $\begin{array}{ccc} \rho\rho id & 1 & \rho\rho \\ S_i & \square & S_j \\ \rho id & 1 & \rho \end{array}$ である行列 $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ です。

4. $a=\rho, b_1=\rho, b_2=\rho, c=\alpha$のとき。このとき、

$$\begin{array}{ccc} \rho\rho\alpha & U & \rho\rho \\ S_i & \boxed{} & S_j \\ \rho\alpha & U & \rho \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \rho\rho\alpha & U & \rho\rho \\ S_j & \boxed{} & S_i \\ \rho\alpha & U & \rho \end{array}$$

となり、値は$\omega^{-2} \times d \times trD^2 = \omega^{-2} \times 2d$ となります。

ただし、Dは$(i-2, j-2)$成分が $\begin{array}{ccc} \rho\rho\alpha & U & \rho\rho \\ S_i & \boxed{} & S_j \\ \rho\alpha & U & \rho \end{array}$ である行列$D = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$ です。

5. $a = \rho, b_1 = \rho, b_2 = \rho, c = \rho$のとき。このとき、

$$\begin{array}{ccc} \rho\rho\rho & S_l & \rho\rho \\ S_i & \boxed{} & S_j \\ \rho\rho & S_m & \rho \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \rho\rho\rho & S_m & \rho\rho \\ S_j & \boxed{} & S_i \\ \rho\rho & S_l & \rho \end{array}$$

となり、値は$\omega^{-2} \times d^2 \times trE^2 = \omega^{-2} \times d^2 \times 4d^{-2} = \omega^{-2} \times 4$ となります。

ただし、Eは$(2(i-3)+(l-2), 2(j-3)+(m-2))$成分が $\begin{array}{ccc} \rho\rho\rho & S_l & \rho\rho \\ S_i & \boxed{} & S_j \\ \rho\rho & S_m & \rho \end{array}$ である行列

$$E = \begin{pmatrix} c_3 & 0 & 0 & c_4 \\ \sqrt{-1}c_4 & 0 & 0 & \sqrt{-1}c_3 \\ 0 & c_4 & c_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}c_3 & -\sqrt{-1}c_4 & 0 \end{pmatrix}$$

です。

以上を合わせると、この場合の値は$\omega^{-2}(2d+2d+2d+2d+4) = \omega^{-1}(1+\sqrt{3})$となります。よって前の結果とあわせて、レンズ空間$L(2,1)$の不変量の値は次のようになります。

$$< L(2,1) >= \omega^{-1} + \omega^{-1} + \omega^{-1}(1+\sqrt{3}) = \frac{1}{2}$$

5 レンズ空間 $L(3,1)$ の不変量の値

レンズ空間 $L(3,1)$ に対して、残りの $a=\rho$の場合について考えると、先の条件を満たす色付けとその値は次のようになります。

1. $a=\rho, b_1=\rho, b_2=\rho, b_3=id, c=\rho$のとき。このとき、

$$\begin{array}{ccc} \rho id\rho & 1 & \rho\rho \\ 1 & \square & S_i \\ \rho\rho & S_m & \rho \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \rho\rho\rho & S_m & \rho\rho \\ S_i & \square & S_1 \\ \rho\rho & S_1 & id \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \rho\rho\rho & S_1 & \rho id \\ S_1 & \square & 1 \\ id\rho & 1 & \rho \end{array}$$

となり、b_1, b_2, b_3を巡回的に入れ換えた色付けもあることを考慮して、値は $3\times\omega^{-2}\times d^2\times c_2(1-\sqrt{-1})d^{-1}=3\times\omega^{-2}\times c_2(1-\sqrt{-1})d$ となります。

2. $a=\rho, b_1=\rho, b_2=\rho, b_3=\alpha, c=\rho$のとき。このとき、

$$\begin{array}{ccc} \rho\alpha\rho & 1 & \rho\rho \\ U & \square & S_i \\ \rho\rho & S_m & \rho \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \rho\rho\rho & S_m & \rho\rho \\ S_i & \square & S_2 \\ \rho\rho & S_2 & \alpha \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \rho\rho\rho & S_2 & \rho\alpha \\ S_2 & \square & U \\ \alpha\rho & 1 & \rho \end{array}$$

となり、b_1, b_2, b_3を巡回的に入れ換えた色付けもあることを考慮して、値は $3\times\omega^{-2}\times d^2\times c_2(1-\sqrt{-1})d^{-1}=3\times\omega^{-2}\times c_2(1-\sqrt{-1})d$ となります。

3. $a=\rho, b_1=\rho, b_2=\rho, b_3=\rho, c=id$ のとき。このとき、

$$\begin{array}{ccc} \rho\rho id & 1 & \rho\rho \\ S_i & \square & S_j \\ \rho id & 1 & \rho \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \rho\rho id & 1 & \rho\rho \\ S_j & \square & S_k \\ \rho id & 1 & \rho \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \rho\rho id & 1 & \rho\rho \\ S_k & \square & S_i \\ \rho id & 1 & \rho \end{array}$$

となり、値は$\omega^{-2}\times d\times trC^3=\omega^{-2}\times 2d$ となります。(Cは先に出て来たもの。)

4. $a=\rho, b_1=\rho, b_2=\rho, b_3=\rho, c=\alpha$のとき。このとき、

$$\begin{array}{ccc} \rho\rho\alpha & U & \rho\rho \\ S_i & \square & S_j \\ \rho\alpha & U & \rho \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \rho\rho\alpha & U & \rho\rho \\ S_j & \square & S_k \\ \rho\alpha & U & \rho \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \rho\rho\alpha & U & \rho\rho \\ S_k & \square & S_i \\ \rho\alpha & U & \rho \end{array}$$

となり、値は$\omega^{-2}\times d\times trD^3=0$ となります。(Dは先に出て来たもの。)

5. $a=\rho, b_1=\rho, b_2=\rho, b_3=\rho, c=\rho$のとき。このとき、

$$\begin{array}{ccc} \rho\rho\rho & S_l & \rho\rho \\ S_i & \boxed{} & S_j \\ \rho\rho & S_m & \rho \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \rho\rho\rho & S_m & \rho\rho \\ S_j & \boxed{} & S_k \\ \rho\rho & S_n & \rho \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \rho\rho\rho & S_n & \rho\rho \\ S_k & \boxed{} & S_i \\ \rho\rho & S_l & \rho \end{array}$$

となり、値は$\omega^{-2}\times d^2\times trE^3=\omega^{-2}\times d^2\times(-\frac{2}{d^3}+\frac{3}{d}\sqrt{-1})=\omega^{-2}\times(\sqrt{3}-2+3\sqrt{-1})d$ となります。(Eは先に出て来たもの。)

以上を合わせると、この場合の値は

$$\omega^{-2}(3c_2(1-\sqrt{-1})d+3c_2(1-\sqrt{-1})d+2d+0+(\sqrt{3}-2+3\sqrt{-1})d)$$

$$=\omega^{-1}\frac{1}{2}\{(1+\sqrt{3})+(3+\sqrt{3})\sqrt{-1}\}$$

となります。よって前の結果とあわせて、レンズ空間 $L(3,1)$ の不変量の値は次のようになります。

$$<L(3,1)>=\omega^{-1}+\omega^{-1}\frac{1}{2}\{(1+\sqrt{3})+(3+\sqrt{3})\sqrt{-1}\}=\frac{1+\sqrt{-1}}{4}$$

6 謝辞

このセミナーに参加していろいろと教えて下さった、浅枝氏、岡本氏、小須田氏、佐藤氏、中坊氏、葉広氏、和久井氏に感謝いたします。特に和久井氏には、不変量の計算についていろいろと教えていただきました。感謝いたします。また、泉氏、河東氏には、セクターについていろいろ教えていただきました。感謝いたします。最後になりましたが、このセミナーを企画し、講究録に記事を書く機会を与えて下さいました村上斉氏に感謝いたします。

References

[W] 和久井 道久, コクセターグラフ E_6 の量子 $6j$ 記号から作られる3次元多様体の Turaev-Viro-Ocneanu 不変量について, 本 京大数理解析研究所講究録.

[I] Masaki Izumi, Subalgebras of Infinite C^*-Algebras with Finite Watatani Indices I. Cuntz Algebras, Commun.Math.Phys.155(1993),157-182.