

TQFT の立場から見た Turaev-Viro-Ocneanu 不変量とその計算例

工学院大学 佐藤智史 (Chifumi Sato)
早稲田大学 岡本美雪 (Miyuki Okamoto)

この記事では、研究会「 $6j$ -symbol から導かれる位相的量子場の理論の研究」における葉広和夫氏の講演で紹介された TQFT の構成について概略を述べ、さらに E_6 から決まる $6j$ -symbol を用いた場合の不変量の値を、具体的にいくつか計算する。

1. TQFT の構成

Σ を closed oriented surface とする. Σ 上の “skein theory” とは、次のようなものである. $X(\Sigma)$ を Σ に埋め込まれた graph (i.e., 1-complex) のある集合とする. $X(\Sigma)$ の元は単なる graph ではなくて、各 edge に orientation がはいっていたり、color と呼ばれるある集合 S の元がつられたりする. また、各 vertex にはある体 k 上の vector space の元がつけられているかもしれない. (ここにでてくる vector space は、その vertex のまわりの edge の状態に依存するだろう.) $kX(\Sigma)$ を $X(\Sigma)$ で span される vector space とする. R を $kX(\Sigma)$ の vector subspace とする

$\mathcal{H}(\Sigma) = kX(\Sigma)/R$ とおく. R としては普通は局所的な関係式から生成されるものを考える (以下そうであるとしよう).

さて上のようなシステムが与えられたとき、 Σ の写像類群 $\mathcal{M}(\Sigma)$ の表現

$$\begin{array}{ccc} \rho : \mathcal{M}(\Sigma) & \longrightarrow & GL(\mathcal{H}(\Sigma)) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ [\alpha] & \mapsto & \alpha_* : \mathcal{H}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{H}(\Sigma) \\ & & \Downarrow \quad \Downarrow \\ & & [G] \mapsto [\alpha(\Sigma)] \end{array}$$

が得られる. self diffeomorphism $\alpha : \Sigma \xrightarrow{\cong} \Sigma$ は α の mapping cylinder に対応する.

よって上の表現 ρ を拡張するようなかたちで、surfaces とその cobordisms のなす圏 3-Cob から、 k -vector spaces のなす圏 $k\text{-Vect}$ への関手を作ることが目標である. そのためにどうすればよいかを考える.

Σ_0, Σ_1 を closed oriented surfaces とし、 M を Σ_0 と Σ_1 の間の cobordism とする. つまり $\partial M = -\Sigma_0 \cup \Sigma_1$. $f : M \rightarrow [0, 1]$ を Morse function で、 $\Sigma_i = f^{-1}(i)$

($i = 0, 1$) となるものとする. f の critical values

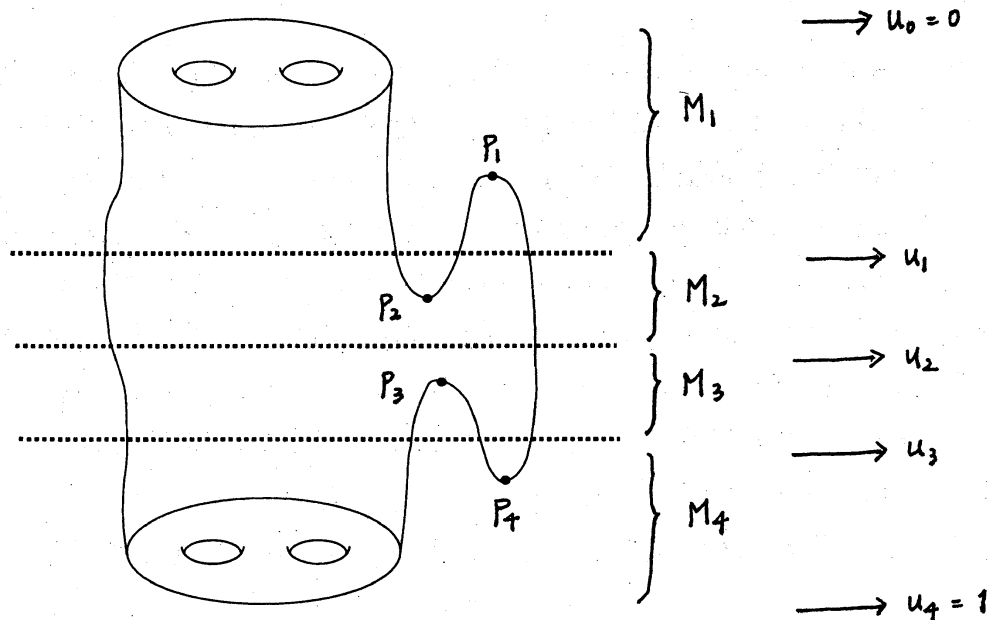
$$(0 <) t_1 < t_2 < \cdots < t_m (< 1)$$

に対応する critical points を $p_1, p_2, \dots, p_m \in M$ とする. $u_0, \dots, u_m \in [0, 1]$ を

$$u_0 = 0 < t_1 < u_1 < t_2 < \cdots < t_m < u_m = 1$$

となるものとする.

$M_i = f^{-1}[u_{i-1}, u_i]$ ($i = 1, \dots, m$) とおく. M は “simple” な cobordisms M_1, \dots, M_m の合成である.



以下では次のように問題を分割する.

- (A) Σ_0 から Σ_1 への simple な cobordism (i.e., critical point をちょうど一つだけ持つような Morse function をもつような cobordism) M に対して, operator

$$\rho(M) : \mathcal{H}(\Sigma_0) \rightarrow \mathcal{H}(\Sigma_1)$$

を定義する. (index 0, 1, 2, 3 の 4 種類がある.)

- (B) (A) により, Morse function つき cobordism に対して, simple cobordism に対応する operators の合成として operator を定義する.
- (C) (B) で定義した operator が実は Morse function の選び方によらないことを言う. (本質的には index i と index $i+1$ の critical points の death-birth があっても operator が変わらないようにすればよい.)

(A) について

• index 0 の場合

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_0 \\ \Sigma \amalg S^2 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Cylinder with two holes} \\ \text{Dome with one hole} \end{array}$$

$$= (\Sigma_0 \times I) \cup B^3$$

R は local な relations から生成されるから

$$\mathcal{H}(\Sigma_0 \amalg S^2) \cong \mathcal{H}(\Sigma_0) \otimes \mathcal{H}(S^2)$$

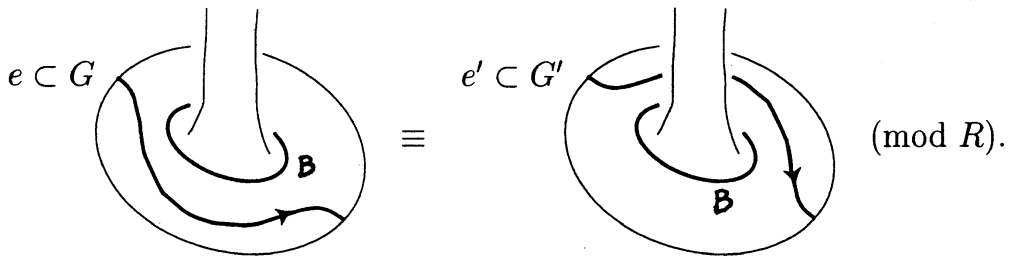
なる自然な同型がある. よって $\rho(M)([G]) = [G] \otimes [A]$ ($[A]$ は $\mathcal{H}(S^2)$ の “ある” 元) と定義するのが自然である. (A がみたすべき性質はあとから出てくる.)

• index 1 の場合

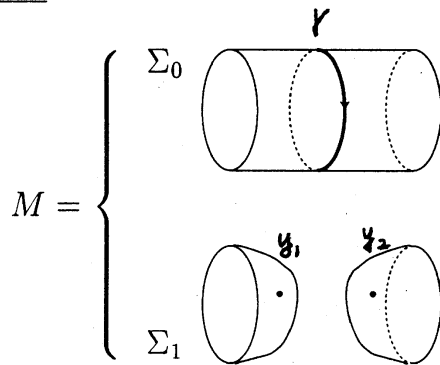
$$M = \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_0 \\ \Sigma_1 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Two planes with points } x_1, x_2 \\ \text{Two planes connected by a tube } \gamma \end{array}$$

$\rho(M) : \mathcal{H}(\Sigma_0) \rightarrow \mathcal{H}(\Sigma_1)$ を定義するには, まず $[G] \in \mathcal{H}(\Sigma_0)$ なる graph G をとる. G としては, x_1, x_2 にぶつからないものをとる. γ を Σ_1 内の circle で, 上図のようなものとする. “ γ から離れたところでは何もおこっていない” のあるから, $\rho(M)([G])$ は, $[G \cup B]$, B は γ の regular nbd 内のある graph の k -linear cobordism, とするのが自然である.

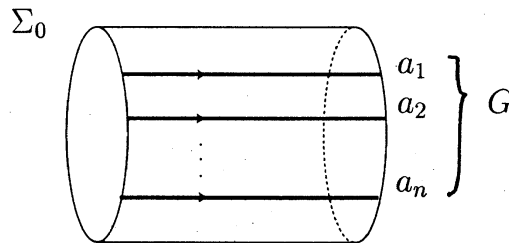
$\rho(M)$ が well-defined であるためには, $[G \cup B]$ が G の取り方によらない必要がある. よって, B は次のような条件をみたすとするのが自然である.



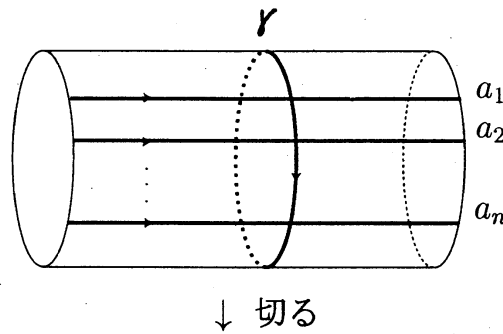
• index 2 の場合

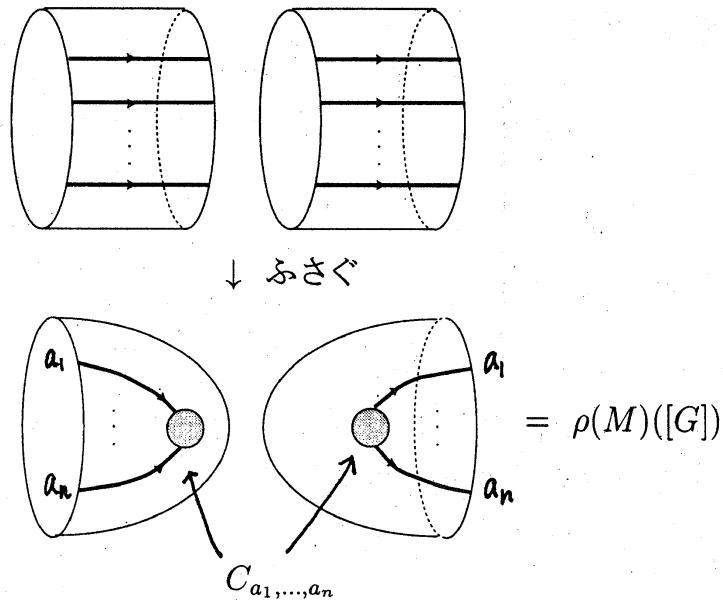


$[G] \in \mathcal{H}(\Sigma_0)$ とする. G は (少しずらせば)



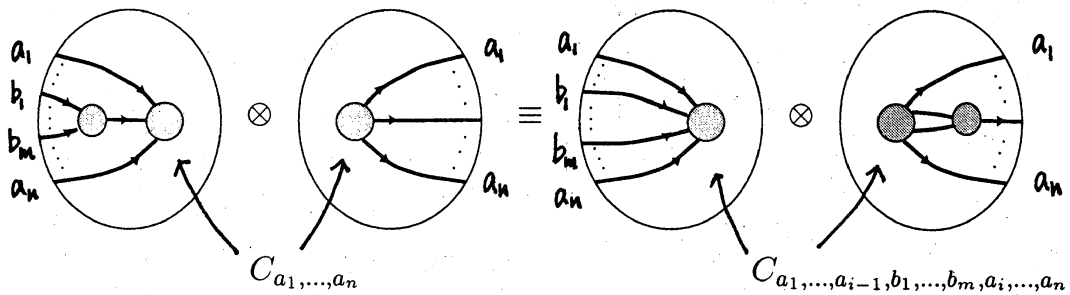
のようになっているとしてよい. ここで, $a_1, \dots, a_n \in S$ である. これを何とかして circle γ で切り開いて, 切れたところを disk でふさぎ, 残った edge を “どうにかする必要がある”.





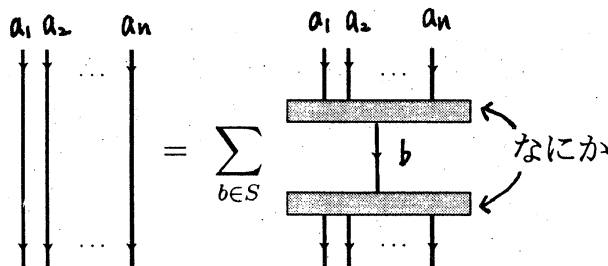
ここで、 C は適当な subgraph の linear combination である。

$\rho(M)([G])$ が ρ の取り方によらないためには、例えば



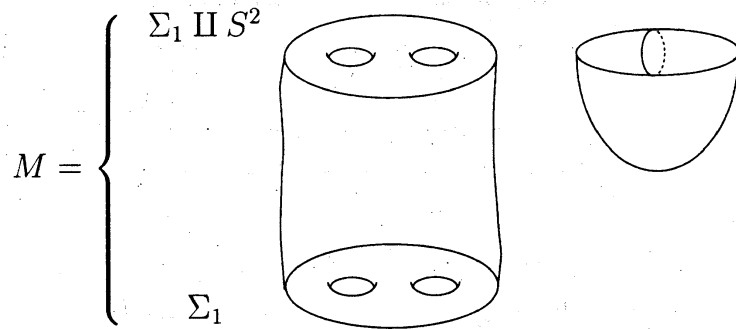
等が成り立つ必要がある。

もし " \mathcal{H} が semi-simple", つまり \mathcal{H} においては、つねに



と書けたとする。このときは、各 $b \in S$ に対して、 C_b を定義してやれば十分である。quantum 6j-symbol (或いは、同じことだが、semi-simple k -linear abelian rigid monoidal category) から決まる skein theory の場合はそうになっている。

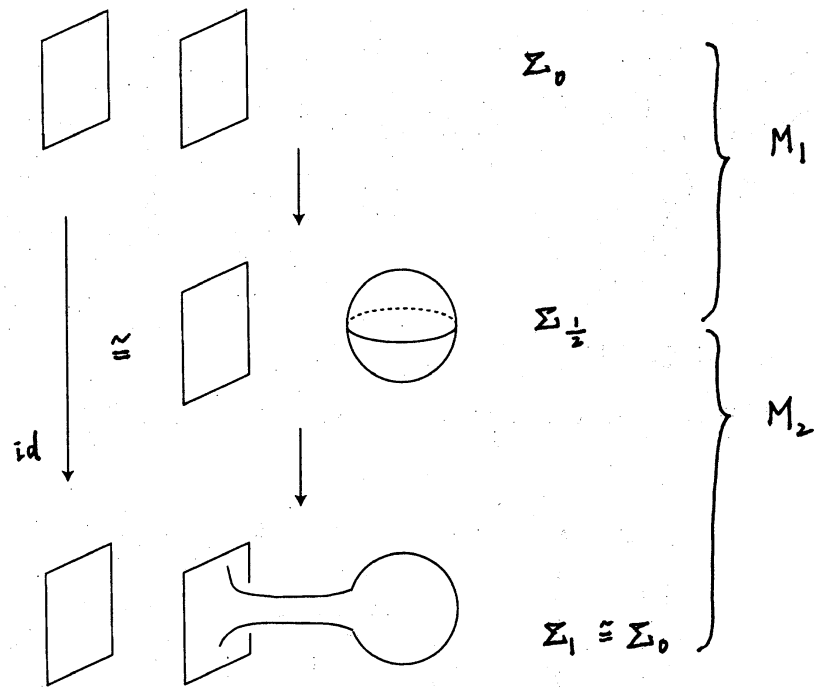
- index 3 の場合



$\rho(M) ([G] \otimes [G']) = \rho(M) ([G]) \cdot D ([G'])$ とするのが自然である. 但し $D : \mathcal{H}(S^2) \rightarrow k$ は k -linear map とする.

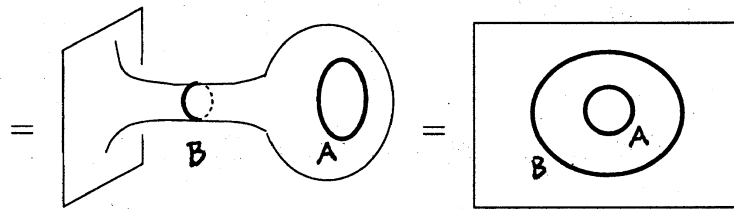
(C) について

- (0,1)-birth の場合



$[G] \in \mathcal{H}(\Sigma_0)$ をとる.

$$\begin{aligned} \rho(M) ([G]) &= \rho(M_2) (\rho(M_1) ([G])) \\ &= \rho(M_2) ([G] \otimes A) \end{aligned}$$



よって

$$\begin{matrix} \text{O} \\ \text{A} \\ \text{B} \end{matrix} \equiv \begin{matrix} 1 \\ \text{(empty)} \end{matrix} \pmod{R}$$

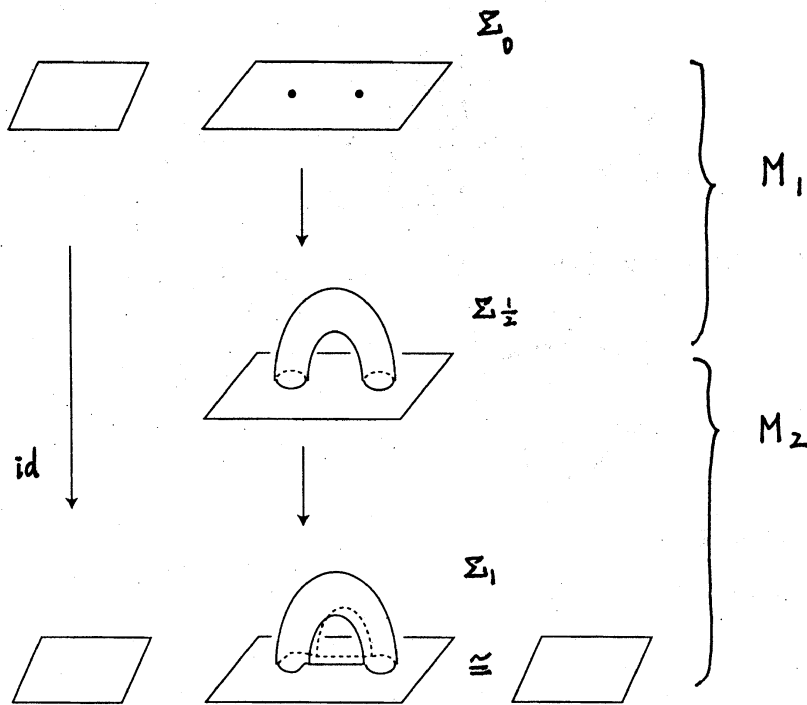
を必要とする.

6j-symbol から決まる skein theory では, $\mathcal{H}(S^2) \cong k$ であることがわかる. よって, $A \in k$ である. 上の条件から, A は invertible で

$$\begin{matrix} \text{O} \\ \text{B} \end{matrix} = A^{-1} \text{ in } \mathcal{H}(\Sigma)$$

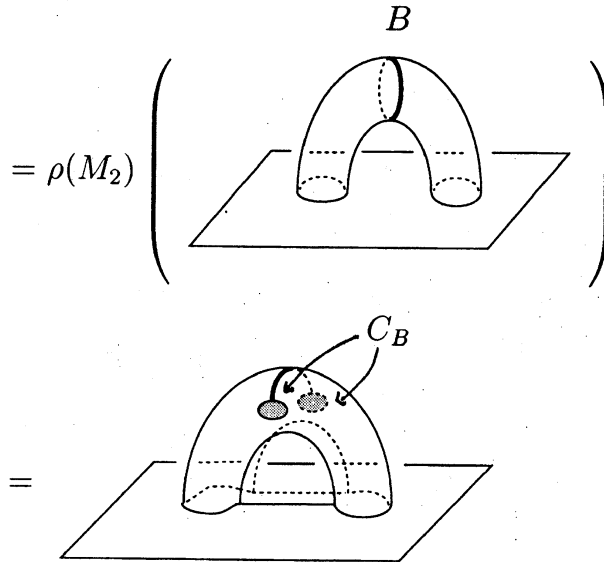
である.

• (1,2)-birth の場合

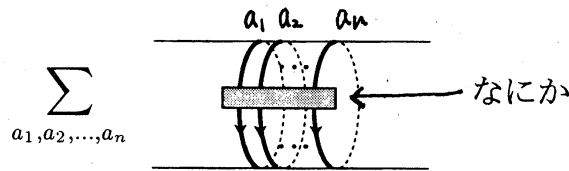


$[G] \in \mathcal{H}(\Sigma_0)$ に対し

$$\rho(M) ([G]) = \rho(M_2) (\rho(M_1) ([G]))$$



(これは正確な書き方ではない。) しかし, B は



などと書けるので, これから C_B は定義される. よって

$$B = 1 \quad \text{in} \quad \mathcal{H}(\Sigma)$$

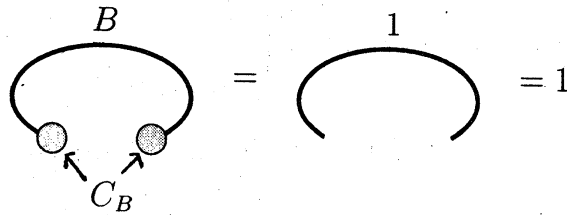
The diagram shows a genus-2 surface B with a shaded region C_B .

とならねばならない.

6j-symbol のときは

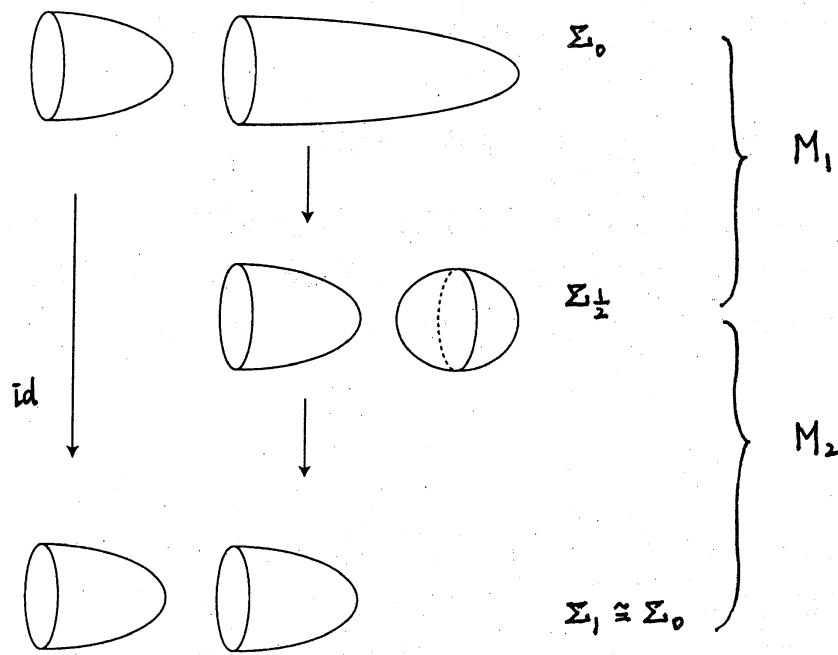
$$B = \sum_{a \in S} \left(\frac{\text{Surface with } a \text{ and } C_B}{\text{Surface with } a \text{ and empty}} \right) \text{Surface with } a$$

と書ける. これから



となって, 上の条件は自動的にでてくる.

• (2,3)-birth の場合



$[G] \in \mathcal{H}(\Sigma_0)$ に対し

$$\rho(M) ([G]) = \rho(M_2) (\rho(M_1) ([G])) = \rho(M_2) \left(\left(\text{cone with } C_1 \right) \left(\text{sphere with } C_1 \right) \right)$$

ここで

$$\dots \text{---} \text{---} \text{---} \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} = \mu(\text{empty diagram}) \quad (\mu \in k)$$

と書けるから

$$\begin{aligned} \rho(M) ([G]) &= \mu \rho(M_2) \left(\left(\text{cone} \quad \text{sphere} \right) \right) \\ &= \mu [G] \cdot D([\text{empty diagram}]). \end{aligned}$$

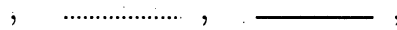
よって $\mu \cdot D([\text{empty diagram}]) = 1$ となる.

以上のようにして, surface 上の skein theory から surface の cobordism がなす圏 3-Cob への表現を構成することができる. このようにして得られる表現のうち, $6j$ -symbol からくるものは, Turaev-Viro TQFT と同等である.

2. E_6 から決まる $6j$ -symbol を用いた場合

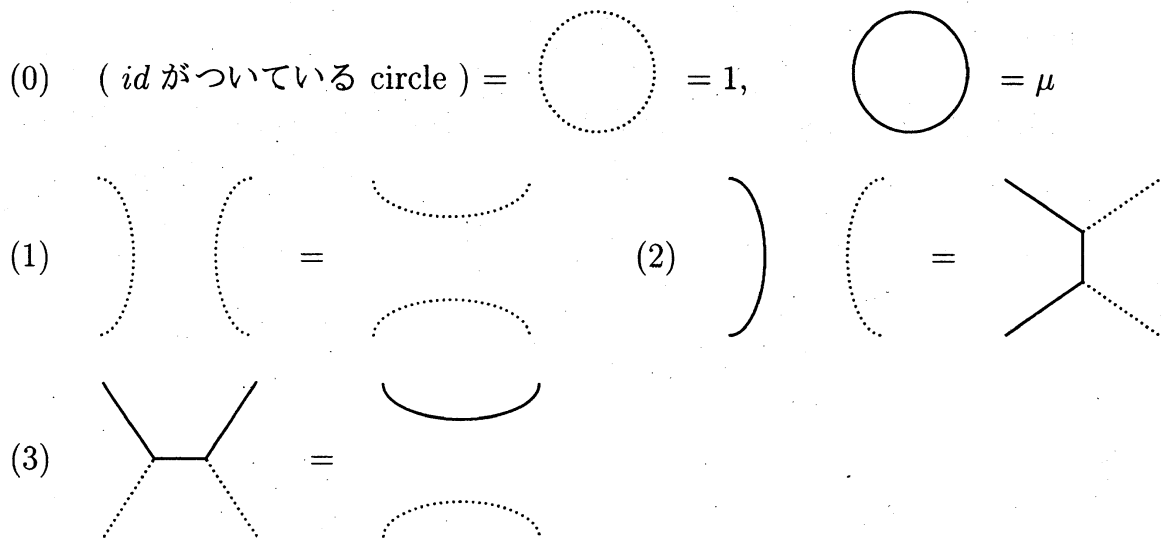
ここでは, 前節で定義された不変量を E_6 から決まる $6j$ -symbol を用いた場合について考え, いくつかの多様体に関する不変量の値およびその計算方法を述べる.

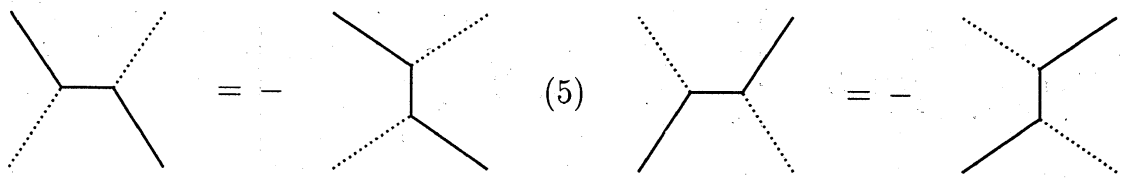
$k = \mathbb{C}$ とする. E_6 の場合, $S = \{id, \alpha, \beta\}$ となり, id, α, β がついた edge をそれぞれ

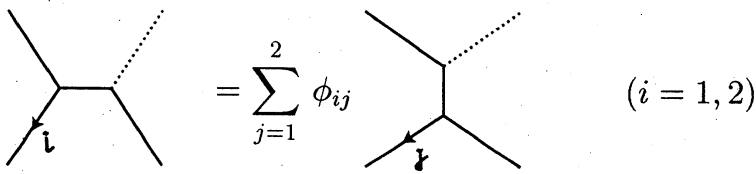


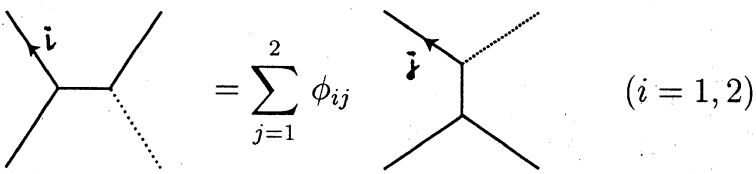
で表すことにする. また $\mu = 1 - \epsilon\sqrt{3}$ ($\epsilon = \pm 1$) とおき, index 1 の operator の定義において必要な B は $id + \alpha + \mu\beta$ とする.

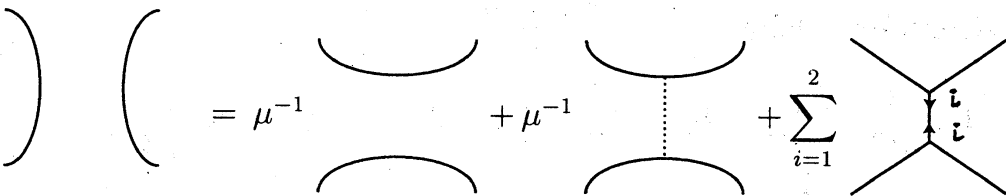
さらに E_6 から決まる $6j$ -symbol は次のようになる.

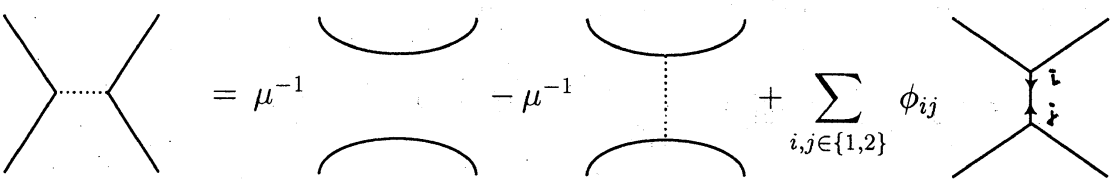


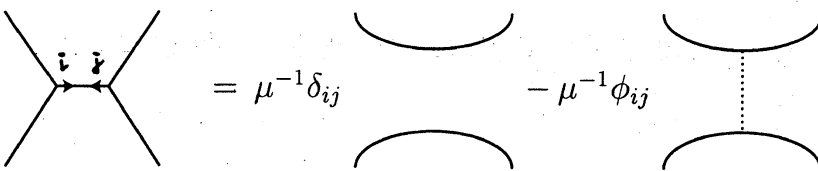
(4) 

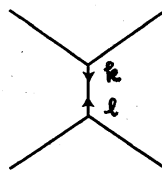
(6)  $(i = 1, 2)$

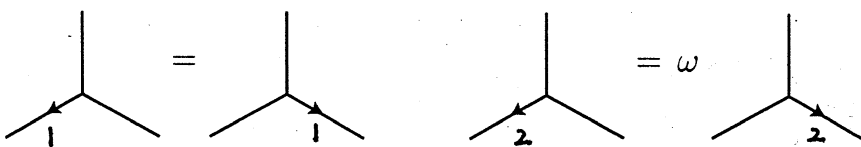
(7)  $(i = 1, 2)$

(8) 

(9) 

(10) 

$+ \sum_{k, \ell \in \{1, 2\}} \lambda_{k\ell}^{ij}$ 

(11) 

$$(12) \quad \begin{array}{c} \uparrow i \\ \bigcirc \\ \downarrow j \end{array} = \delta_{ij} \quad \Bigg| \quad (13) \quad \begin{array}{c} \bigcirc \\ \text{---} \\ \bigcirc \end{array} = \quad \Bigg|$$

$$(14) \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \bigcirc \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \bigcirc \\ \text{---} \\ \bigcirc \end{array} = \mu \quad \Bigg| \quad \Bigg|$$

但し

$$\phi_{11} = \frac{\epsilon}{\sqrt{3}}, \quad \phi_{12} = \phi_{21} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad \phi_{22} = -\frac{\epsilon}{\sqrt{3}}$$

$$\delta_{ij} : \text{Kronecker's delta}, \quad \omega = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2},$$

$$\lambda_{11}^{11} = 1 + \frac{\epsilon}{\sqrt{3}}, \quad \lambda_{12}^{11} = \lambda_{21}^{11} = \lambda_{11}^{12} = \lambda_{11}^{21} = 0, \quad \lambda_{22}^{11} = \lambda_{11}^{22} = \frac{\epsilon}{\sqrt{3}},$$

$$\lambda_{12}^{12} = \lambda_{21}^{21} = \omega^{-1} \frac{\epsilon}{\sqrt{3}}, \quad \lambda_{21}^{12} = \lambda_{12}^{21} = \omega \frac{\epsilon}{\sqrt{3}},$$

$$\lambda_{22}^{12} = \lambda_{22}^{21} = \lambda_{12}^{22} = \lambda_{21}^{22} = \frac{1 + \sqrt{3}\epsilon}{\sqrt{6}}, \quad \lambda_{22}^{22} = 0.$$

そこで次に、この 6j-symbol を用いて具体的に不変量の値を計算する。

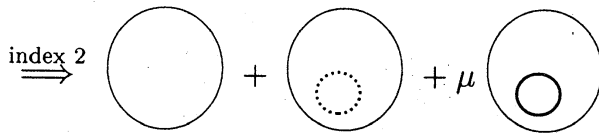
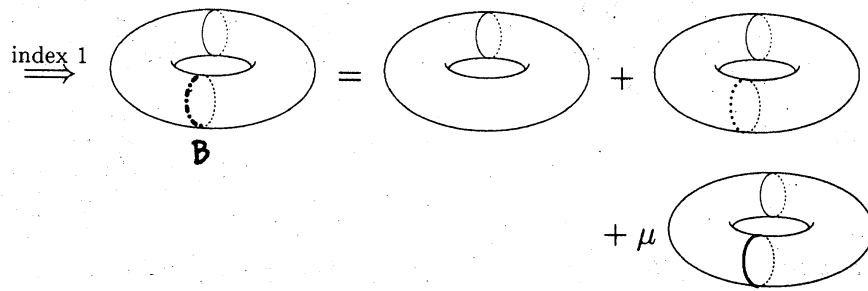
• $S^2 \times S^1$ について

$S^2 \times S^1$ は

$$\emptyset \xrightarrow{\text{index } 0} S^2 \xrightarrow{\text{index } 1} \begin{array}{c} \bigcirc \\ \text{---} \\ \bigcirc \end{array} \xrightarrow{\text{index } 2} S^2 \xrightarrow{\text{index } 3} \emptyset$$

と表せるので

$$\emptyset \xrightarrow{\text{index } 0} \bigcirc$$



$\xrightarrow{\text{index } 3} (1 + 1 + \mu^2) \emptyset.$

よって, $\rho(S^2 \times S^1) = 6 - 2\sqrt{3}\epsilon$ ($\epsilon = \pm 1$) となる. 以下, この値を ν と書くことにする.

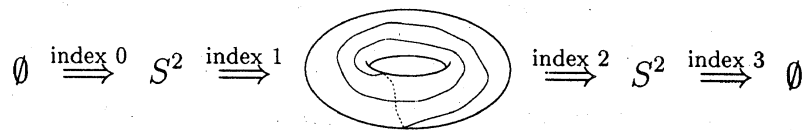
3次元多様体 M に対して $\hat{\rho}(M) = \rho(M) \rho(S^2 \times S^1)^{-1}$ とおき, これを正規化された不変量と呼ぶことにする. 当然, $\hat{\rho}(S^2 \times S^1) = 1$ である.

• S^3 について

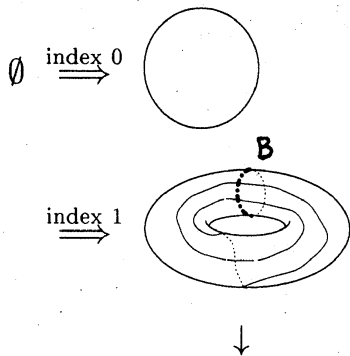
S^3 は $\emptyset \xrightarrow{\text{index } 0} S^2 \xrightarrow{\text{index } 3} \emptyset$ と表せるので, $\rho(S^3) = 1$ となる. したがって, 正規化された不変量の値は $\hat{\rho}(S^3) = 1 \times \rho(S^2 \times S^1)^{-1} = \nu^{-1}$ である.

• $L(2, 1)$ について

$L(2, 1)$ は



と表せる. よって



$$B = \text{torus with loop} + \text{torus with dashed curve} + \mu \text{torus with dashed curve}$$

上の等式の右辺の第 2 項, 第 3 項は, それぞれ 6j-symbol の (1), (8) を用いると

$$\text{torus with dashed curve} = \text{torus with dashed curve and loop} = \text{torus with loop and dashed curve}$$

$$\xrightarrow{\text{index 2}} \text{circle with dashed inner circle} \xrightarrow{\text{index 3}} \emptyset,$$

$$\text{torus with dashed curve} = \mu^{-1} \text{torus with dashed curve and loop} + \mu^{-1} \text{torus with dashed curve and loop} + \sum_i \text{torus with dashed curve and loop}$$

$$\xrightarrow{\text{index 2}} \mu^{-1} \text{circle with dashed inner circle} + \mu^{-1} \text{circle with dashed inner circle and loop} + \sum_i \text{circle with dashed inner circle and loop}$$

$$= \mu^{-1} \text{circle with dashed inner circle} + \mu^{-1} \mu \text{circle with dashed inner circle and loop} + 2 \text{circle with loop}$$

$$\xrightarrow{\text{index 3}} (\mu^{-1} \times \mu + 1 \times 0 + 2 \times 0) \emptyset = \emptyset$$

となるので

$$\rho(L(2,1)) = 1 + 1 + \mu = 3 - \sqrt{3}\epsilon,$$

$$\hat{\rho}(L(2,1)) = (3 - \sqrt{3}\epsilon)\nu^{-1} = \frac{1}{2}.$$

- $L(3,1)$ について
 $L(3,1)$ は

$$\emptyset \xrightarrow{\text{index } 0} S^2 \xrightarrow{\text{index } 1} \text{torus} \xrightarrow{\text{index } 2} S^2 \xrightarrow{\text{index } 3} \emptyset$$

と表せる. よって

(*1)

等式 (*1) の右辺の第 2 項は, $6j$ -symbol の (1) を用いると

となる.

つぎに等式 (*1) の右辺の第 3 項について考える. $6j$ -symbol の (8), (2) より

$$\begin{aligned}
&= \mu^{-1} \left(\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right) + \mu^{-1} \left(\begin{array}{c} \cup \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ \cup \end{array} \right) + \sum_i \mu^{-1} \left(\begin{array}{c} \cup \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ \cup \end{array} \right) \\
&+ \sum_i \mu^{-1} \left(\begin{array}{c} \cup \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ \cup \end{array} \right) + \sum_{i,j} \left(\begin{array}{c} \cup \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ \cup \end{array} \right)
\end{aligned}$$

である. 右辺の第 3 項を除いては index 2 の critical point を越えると degree 1 の vertex をもつ graph になるので, 最終的にはこの部分からの不変量の値への寄与はないことがわかる. よって, 右辺の第 3 項についてのみ計算すればよい. $6j$ -symbol の (11), (12) を用いると

$$\begin{aligned}
\sum_i \mu^{-1} \left(\begin{array}{c} \cup \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ \cup \end{array} \right) &\xrightarrow{\text{index } 2} \sum_i \mu^{-1} \left(\begin{array}{c} \cup \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ \cup \end{array} \right) \\
&= \mu^{-1} \left(\begin{array}{c} \cup \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ \cup \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \cup \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ \cup \end{array} \right) \\
&= \mu^{-1} \left(\begin{array}{c} \cup \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ \cup \end{array} \right) + \omega^2 \left(\begin{array}{c} \cup \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ \cup \end{array} \right) \\
&= \mu^{-1} (1 + \omega^2) \left(\begin{array}{c} \cup \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ \cup \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{\text{index } 3} \mu^{-1} (1 + \omega^2) \mu \emptyset = (1 + \omega^2) \emptyset.
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\rho(L(3,1)) &= 1 + \mu(1 + \omega^2) = 1 + \frac{(1 - \sqrt{3}\epsilon)(1 \mp \sqrt{3}i)}{2}, \\
\hat{\rho}(L(3,1)) &= (1 + \mu(1 + \omega^2)) \nu^{-1} \\
&= \left(1 + \frac{(1 - \sqrt{3}\epsilon)(1 \mp \sqrt{3}i)}{2} \right) \frac{1}{6 - 2\sqrt{3}\epsilon} = \frac{1 \pm \epsilon i}{4}.
\end{aligned}$$

• $L(4,1)$ について

$L(4,1)$ の場合は

$$\begin{aligned}
 \text{Genus-3 surface with boundary } B &= \text{torus} + \text{Genus-2 surface with boundary} \\
 &+ \mu \cdot \text{Genus-3 surface with boundary} \tag{*2}
 \end{aligned}$$

について $L(3,1)$ と同様に計算をすればよい.

等式 (*2) の右辺の第 2 項は, $6j$ -symbol の (1) を用いると

$$\begin{aligned}
 \text{Genus-2 surface with boundary} &= \text{Genus-2 surface with boundary} = \text{torus with boundary} \\
 &\xrightarrow{\text{index 2}} \text{circle with dashed inner boundary} \xrightarrow{\text{index 3}} \emptyset \tag{*3}
 \end{aligned}$$

となる.

つぎに等式 (*2) の右辺の第 3 項について考える. $6j$ -symbol の (8) より

$$\begin{aligned}
 \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \end{array} \right| &= \mu^{-1} \left| \begin{array}{c} \cup \\ | \\ \cap \\ | \end{array} \right| + \mu^{-1} \left| \begin{array}{c} \cup \\ | \\ \cup \\ | \end{array} \right| + \sum_i \left| \begin{array}{c} \cup \\ | \\ \cap \\ | \\ \cup \\ | \\ \cap \\ | \end{array} \right| \\
 &= \mu^{-1} \left(\mu^{-1} \left| \begin{array}{c} \cup \cup \\ | | \\ \cap \cap \end{array} \right| + \mu^{-1} \left| \begin{array}{c} \cup \cup \\ | \cup \\ \cap \cap \end{array} \right| + \sum_i \mu^{-1} \left| \begin{array}{c} \cup \cup \\ | \cup \\ \cap \cap \\ | \cup \\ \cap \cap \end{array} \right| \right) \\
 &+ \mu^{-1} \left(\mu^{-1} \left| \begin{array}{c} \cup \cup \\ | \cup \\ \cup \cup \end{array} \right| + \mu^{-1} \left| \begin{array}{c} \cup \cup \\ | \cup \\ \cup \cup \end{array} \right| + \sum_i \mu^{-1} \left| \begin{array}{c} \cup \cup \\ | \cup \\ \cup \cup \\ | \cup \\ \cup \cup \end{array} \right| \right) \\
 &+ \sum_i \left(\mu^{-1} \left| \begin{array}{c} \cup \cup \\ | \cup \\ \cup \cup \\ | \cup \\ \cup \cup \end{array} \right| + \mu^{-1} \left| \begin{array}{c} \cup \cup \\ | \cup \\ \cup \cup \\ | \cup \\ \cup \cup \end{array} \right| + \sum_j \mu^{-1} \left| \begin{array}{c} \cup \cup \\ | \cup \\ \cup \cup \\ | \cup \\ \cup \cup \\ | \cup \\ \cup \cup \end{array} \right| \right)
 \end{aligned}$$

さらに $6j$ -symbol の (1), (2), (8) を用いた後, 整理すると

$$\begin{aligned}
\left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \end{array} \right| &= \mu^{-2} \begin{array}{c} \cup \cup \\ \cap \cap \end{array} + \mu^{-2} \begin{array}{c} \cup \cup \\ \cdots \cup \\ \cap \cap \end{array} + \mu^{-1} \sum_{i,j} \begin{array}{c} \cup \cup \\ \vdots \\ \cap \cap \end{array} \\
&+ \mu^{-2} \left(\begin{array}{c} \cup \cup \\ \vdots \\ \cap \cap \end{array} + \begin{array}{c} \cup \cup \\ \vdots \\ \cap \cap \end{array} \right) + \mu^{-1} \sum_{i,j} \begin{array}{c} \cup \cup \\ \vdots \\ \cap \cap \end{array} \\
&+ \mu^{-1} \sum_i \left(\begin{array}{c} \cup \cup \\ \vdots \\ \cap \cap \end{array} + \begin{array}{c} \cup \cup \\ \vdots \\ \cap \cap \end{array} + \begin{array}{c} \cup \cup \\ \vdots \\ \cap \cap \end{array} + \begin{array}{c} \cup \cup \\ \vdots \\ \cap \cap \end{array} \right) \\
&+ \sum_{i,j,k} \begin{array}{c} \cup \cup \\ \vdots \\ \cap \cap \end{array} \tag{*4}
\end{aligned}$$

となる. 等式 (*4) の右辺の最初の 3 つの項を除いた項は, $L(3,1)$ の場合と同様の考察から, 不変量の値への寄与はないことがわかる. そこで以下, 最初の 3 つの項についてのみ考える.

等式 (*4) の右辺の第 1 項は

$$\begin{aligned}
\mu^{-2} \begin{array}{c} \cup \cup \\ \cap \cap \end{array} &= \mu^{-2} \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \\
&\xrightarrow{\text{index } 2} \mu^{-2} \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \xrightarrow{\text{index } 3} \mu^{-1} \emptyset \tag{*5}
\end{aligned}$$

である.

等式 (*4) の右辺の第 2 項は, $6j$ -symbol の (5), (13) より

$$\begin{aligned}
\mu^{-2} \begin{array}{c} \cup \cup \\ \cap \cap \end{array} &= \mu^{-2} \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \\
&\xrightarrow{\text{index } 2} \mu^{-2} \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} = -\mu^{-2} \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} = -\mu^{-2} \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \\
&\xrightarrow{\text{index } 3} -\mu^{-1} \emptyset \tag{*6}
\end{aligned}$$

となる.

等式 (*4) の右辺の第 3 項は, 6j-symbol の (10) より

$$\begin{aligned}
 \mu^{-1} \sum_{i,j} \text{Diagram 1} &= \mu^{-1} \sum_{i,j} \text{Diagram 2} \\
 &\xrightarrow{\text{index 2}} \mu^{-1} \sum_{i,j} \text{Diagram 3} \\
 &= \mu^{-1} \sum_{i,j} \left(\begin{array}{l} \mu^{-1} \delta_{ij} \text{Diagram 4} + \mu^{-1} \phi_{ij} \text{Diagram 5} \\ + \sum_{k,l} \lambda_{kl}^{ij} \text{Diagram 6} \end{array} \right) \\
 &= \mu^{-2} \sum_i \text{Diagram 7} + \mu^{-2} \sum_{i,j} \phi_{ij} \text{Diagram 8} \\
 &\quad + \mu^{-1} \sum_{i,j,k,l} \lambda_{kl}^{ij} \text{Diagram 9}
 \end{aligned}$$

である. そこで, 以下, 最後の等式の右辺の 3 つの項についてそれぞれ計算を行なう. 第 1 項は, 6j-symbol の (10), (12), (13) より

$$\begin{aligned}
 \mu^{-2} \sum_i \text{Diagram 7} &= \mu^{-2} \sum_i \left(\mu^{-1} \text{Diagram 10} + \mu^{-1} \phi_{ii} \text{Diagram 11} + \sum_{k,l} \lambda_{kl}^{ii} \text{Diagram 12} \right) \\
 &= \mu^{-2} \sum_i \left(\mu^{-1} + \mu^{-1} \phi_{ii} + \sum_k \lambda_{kk}^{ii} \right) \text{Diagram 13} \\
 &= \mu^{-2} (2\mu^{-1} + \lambda_{11}^{11} + \lambda_{22}^{11} + \lambda_{11}^{22}) \text{Diagram 14}. \tag{*7}
 \end{aligned}$$

第 2 項は, $6j$ -symbol の (13), (4), (6), (12) より

$$\begin{aligned}
 & \mu^{-2} \sum_{i,j} \phi_{ij} \left(\text{Diagram 1} \right) \\
 &= \mu^{-2} \sum_{i,j} \phi_{ij} \left(\begin{array}{l} \mu^{-1} \delta_{ij} \left(\text{Diagram 2} \right) + \mu^{-1} \phi_{ij} \left(\text{Diagram 3} \right) \\ + \sum_{k,l} \lambda_{kl}^{ij} \left(\text{Diagram 4} \right) \end{array} \right) \\
 &= \mu^{-2} \sum_{i,j} \phi_{ij} \left(\begin{array}{l} \mu^{-1} \delta_{ij} \left(\text{Diagram 5} \right) - \mu^{-1} \phi_{ij} \left(\text{Diagram 6} \right) \\ + \sum_{k,l} \lambda_{kl}^{ij} \sum_m \phi_{km} \left(\text{Diagram 7} \right) \end{array} \right) \\
 &= \mu^{-2} \sum_{i,j} \phi_{ij} \left(\begin{array}{l} \mu^{-1} \delta_{ij} \left(\text{Diagram 8} \right) - \mu^{-1} \phi_{ij} \left(\text{Diagram 9} \right) \\ + \sum_{k,l} \lambda_{kl}^{ij} \sum_m \phi_{km} \left(\text{Diagram 10} \right) \end{array} \right) \\
 &= \mu^{-2} \left(-\mu^{-1} \sum_{i,j} \phi_{ij}^2 + \sum_{i,j,k,l} \phi_{ij} \lambda_{kl}^{ij} \phi_{kl} \right) \left(\text{Diagram 11} \right). \tag{*8}
 \end{aligned}$$

第 3 項は $6j$ -symbol の (12), (11) より

$$\begin{aligned}
 & \mu^{-1} \sum_{i,j,k,l} \lambda_{kl}^{ij} \left(\text{Diagram 12} \right) \\
 &= \mu^{-1} \sum_{i,j,k,l} \lambda_{kl}^{ij} \delta_{jk} \left(\text{Diagram 13} \right) = \mu^{-1} \sum_{i,l} (\lambda_{1l}^{i1} + \lambda_{2l}^{i2}) \left(\text{Diagram 14} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu^{-1} \left(\begin{aligned} &(\lambda_{11}^{11} + \lambda_{21}^{12}) \textcircled{1} + (\lambda_{12}^{11} + \lambda_{22}^{12}) \omega \textcircled{1} \\ &+ (\lambda_{11}^{21} + \lambda_{21}^{22}) \omega^2 \textcircled{2} + (\lambda_{12}^{21} + \lambda_{22}^{22}) \textcircled{2} \end{aligned} \right) \\
&= \mu^{-1} (\lambda_{11}^{11} + \lambda_{21}^{12} + \lambda_{12}^{21} + \lambda_{22}^{22}) \textcircled{\textcircled{\quad}} \quad (*)9
\end{aligned}$$

よって、等式 (*4) の右辺の第 3 項は、等式 (*7), (*8), (*9) より

$$\begin{aligned}
&\mu^{-1} \sum_{i,j} \textcircled{\textcircled{\textcircled{\quad}}} \\
&\xrightarrow{\text{index 2}} \dots \xrightarrow{\text{index 3}} \left\{ \begin{aligned} &\mu^{-1} (2\mu^{-1} + \lambda_{11}^{11} + \lambda_{22}^{11} + \lambda_{11}^{22}) \\ &+ \mu^{-1} \left(-\mu^{-1} \sum_{i,j} \phi_{ij}^2 + \sum_{i,j,k,l} \phi_{ij} \lambda_{kl}^{ij} \phi_{kl} \right) \\ &+ \lambda_{11}^{11} + \lambda_{21}^{12} + \lambda_{12}^{21} + \lambda_{22}^{22} \end{aligned} \right\} \emptyset \\
&= (1 \pm \epsilon i) \emptyset \quad (*)10
\end{aligned}$$

となる。

したがって (*2), (*3), (*5), (*6), (*10) より、 $L(4,1)$ の不変量の値は

$$\begin{aligned}
\rho(L(4,1)) &= 1 + 1 + \mu(\mu^{-1} - \mu^{-1} + 1 + \epsilon i) \\
&= 2 + \mu(1 + \epsilon i) = (\sqrt{3} - \epsilon)(\sqrt{3} \mp i), \\
\hat{\rho}(L(4,1)) &= (2 + \mu(1 + \epsilon i)) \nu^{-1} \\
&= \frac{(\sqrt{3} - \epsilon)(\sqrt{3} \mp i)}{6 - 2\sqrt{3}\epsilon} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} \mp i)}{6}
\end{aligned}$$

となる。

● $L(5,1)$ について

$L(5,1)$ についても $L(3,1)$ や $L(4,1)$ と同様にして不変量の値を計算することができる。ここでは計算方法は省略することにして、不変量の値のみを記しておく。

$$\begin{aligned}
& \rho(L(5, 1)) \\
&= 1 + \mu \left[\mu^{-1}(1 + \omega) + \mu^{-2}(\phi_{11} + \omega^{-2}\phi_{22})(-\mu - \sum_{i,j} (\phi_{ij})^2 + \mu \sum_{i,j,k,\ell} \lambda_{k\ell}^{ij} \phi_{ij} \phi_{\ell k}) \right. \\
&\quad + \mu^{-1}(1 + \omega) - \mu^{-1}(\phi_{11} + \omega\phi_{22}) \\
&\quad + \mu^{-3} \sum_{j,k,m} \phi_{jk} \left\{ \phi_{m1} \xi_{k1}^{jm} (1 + \phi_{11} + \mu\lambda_{11}^{11} + \mu\lambda_{22}^{11}) + \phi_{m1} \xi_{k2}^{jm} (\phi_{21} + \mu\lambda_{22}^{21}) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + \omega\phi_{m2} \xi_{k1}^{jm} (\phi_{21} + \mu\lambda_{22}^{21}) + \omega\phi_{m2} \xi_{k2}^{jm} (1 + \phi_{22} + \mu\lambda_{11}^{22}) \right\} \\
&\quad + \mu^{-3} \sum_{j,k,m,n} \phi_{jk} \omega^{m-n} \phi_{nm} \left\{ (\phi_{n1} \phi_{11} + \omega^{-1} \phi_{n2} \phi_{21}) \right. \\
&\quad \quad \quad \times (\xi_{k1}^{jm} (1 + \phi_{11} + \mu\lambda_{11}^{11} + \mu\lambda_{22}^{11}) + \xi_{k2}^{jm} (\phi_{21} + \mu\lambda_{22}^{21})) \\
&\quad \quad \quad + \omega^{-1} (\phi_{n1} \phi_{12} + \omega^{-1} \phi_{n2} \phi_{22}) \\
&\quad \quad \quad \left. \times (\xi_{k1}^{jm} (\phi_{21} + \mu\lambda_{22}^{21}) + \xi_{k2}^{jm} (1 + \phi_{22} + \mu\lambda_{11}^{22})) \right\} \\
&\quad + \mu^{-2} \sum_{j,k,m,n} \phi_{jk} \omega^{m-n} \left\{ \xi_{k1}^{jm} (\phi_{n1} \lambda_{11}^{nm} + \omega\phi_{n2} \lambda_{12}^{nm}) (1 + \phi_{11} + \mu\lambda_{11}^{11} + \mu\lambda_{22}^{11}) \right. \\
&\quad \quad \quad + \xi_{k2}^{jm} (\phi_{n1} \lambda_{11}^{nm} + \omega\phi_{n2} \lambda_{12}^{nm}) (\phi_{12} + \mu\lambda_{11}^{12} + \mu\lambda_{22}^{12}) \\
&\quad \quad \quad + \omega \xi_{k1}^{jm} (\phi_{n1} \lambda_{21}^{nm} + \omega\phi_{n2} \lambda_{22}^{nm}) (\phi_{21} + \mu\lambda_{11}^{21} + \mu\lambda_{22}^{21}) \\
&\quad \quad \quad \left. + \omega \xi_{k2}^{jm} (\phi_{n1} \lambda_{21}^{nm} + \omega\phi_{n2} \lambda_{22}^{nm}) (1 + \phi_{22} + \mu\lambda_{11}^{22} + \mu\lambda_{22}^{22}) \right\} \\
&\quad + \mu^{-2} \sum_j (1 + \omega + \phi_{jj}(1 + \omega) + \mu(1 + \omega) \sum_m \lambda_{mm}^{jj}) \\
&\quad + (\phi_{11} + \omega\phi_{22}) \sum_{j,k} \mu^{-1} \phi_{jk} (\mu^{-1} \delta_{jk} - \mu^{-1} \phi_{j,k} + \sum_{\ell,m} \phi_{\ell m} \lambda_{\ell m}^{kj}) \\
&\quad + \mu^{-2} \sum_j (\lambda_{1j}^{j1} (1 + \phi_{11} + \mu\lambda_{11}^{11} + \mu\lambda_{22}^{11}) + \omega \lambda_{1j}^{j2} (\phi_{21} + \mu\lambda_{22}^{21})) \\
&\quad + \mu^{-2} \phi_{11} \sum_j \lambda_{1j}^{j1} (1 - \phi_{11} + \mu \sum_{k\ell} \phi_{\ell k} \lambda_{k,\ell}^{11}) \\
&\quad + \omega \mu^{-2} \phi_{11} \sum_j \lambda_{1j}^{j2} (-\phi_{21} + \mu \sum_{k,\ell} \phi_{\ell k} \lambda_{k\ell}^{21}) \\
&\quad + \sum_j \lambda_{1j}^{j1} \lambda_{11}^{11} + \omega \mu^{-2} \phi_{12} \sum_j \lambda_{2j}^{j1} (1 - \phi_{11} + \mu \sum_{k,\ell} \phi_{\ell k} \lambda_{k\ell}^{11}) \\
&\quad + \omega^2 \mu^{-2} \phi_{12} \sum_j \lambda_{2j}^{j2} (-\phi_{21} + \mu \sum_{k,\ell} \phi_{\ell k} \lambda_{k\ell}^{21}) + \omega^2 \lambda_{21}^{12} \sum_j \lambda_{2j}^{j2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mu^{-2} \phi_{21} \sum_j \lambda_{1j}^{j1} (-\phi_{21} + \mu \sum_{k,\ell} \phi_{k\ell} \lambda_{k\ell}^{21}) \\
& + \omega \mu^{-2} \phi_{21} \sum_j \lambda_{1j}^{j2} (1 - \phi_{22} + \mu \sum_{k,\ell} \phi_{k\ell} \lambda_{k\ell}^{22}) \\
& + \sum_j (\lambda_{1j}^{j1} \lambda_{12}^{21} + \omega \lambda_{1j}^{j2} \lambda_{22}^{21}) + \mu^{-2} \omega \sum_j (\lambda_{2j}^{j1} (\phi_{21} + \mu \lambda_{22}^{21}) \\
& + \omega \lambda_{2j}^{j2} (1 + \phi_{22} + \mu \lambda_{11}^{22})) + \mu^{-2} \omega \phi_{22} \sum_j \lambda_{2j}^{j1} (-\phi_{21} + \mu \sum_{k,\ell} \phi_{k\ell} \lambda_{k\ell}^{21}) \\
& + \mu^{-2} \omega^2 \phi_{22} \sum_j \lambda_{2j}^{j2} (1 - \phi_{22} + \mu \sum_{k,\ell} \phi_{k\ell} \lambda_{k\ell}^{22}) + \omega \sum_j \lambda_{2j}^{j1} \lambda_{12}^{22} \Big].
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{array}{lll}
\xi_{11}^{11} = \phi_{11} \phi_{11}, & \xi_{21}^{21} = \phi_{21} \phi_{21}, & \xi_{21}^{11} = \phi_{11} \phi_{21} \omega^{-1}, \\
\xi_{11}^{21} = \phi_{21} \phi_{11} \omega, & \xi_{12}^{11} = \phi_{11} \phi_{12} \omega, & \xi_{22}^{21} = \phi_{21} \phi_{22} \omega, \\
\xi_{22}^{11} = \phi_{11} \phi_{22}, & \xi_{12}^{21} = \phi_{21} \phi_{12} \omega^2, & \xi_{11}^{12} = \phi_{12} \phi_{11} \omega^{-1}, \\
\xi_{21}^{22} = \phi_{22} \phi_{21} \omega^{-1}, & \xi_{21}^{12} = \phi_{12} \phi_{21} \omega^{-2}, & \xi_{11}^{22} = \phi_{22} \phi_{11}, \\
\xi_{12}^{12} = \phi_{12} \phi_{12}, & \xi_{22}^{22} = \phi_{22} \phi_{22}, & \xi_{22}^{12} = \phi_{12} \phi_{22} \omega^{-1}, \\
\xi_{12}^{22} = \phi_{22} \phi_{12} \omega & &
\end{array}$$

とする。

また $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\epsilon = 1$ として数値を求めると

$$\hat{\rho}(L(5, 1)) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

である。