数理解析研究所講究録
1055巻 1998年 1-11

Asymptotic efficiency in sequential estimation

筑波大学・数学系　小池健一　(Ken-ichi Koike)

1. はじめに

$X_1, X_2, \ldots$を互いに独立にいずれも(σ-有限測度μに関する)密度関数$f(x,\theta)$に従う確率変数とする．但し，$\theta \in \Theta(\subset \mathbf{R}^1)$とする．$\theta$の一致推定量$T=\{T_n(X_1,\ldots,X_n)\}$と任意の$\varepsilon>0$に対して，裾確率

$$\alpha_n(T,\theta,\varepsilon) := P_\theta\{|T_n-\theta|>\varepsilon\}$$

は，$n\to\infty$としたとき指数のオーダーで0に近づき，その漸近展開が

$$\alpha_n(T,\theta,\varepsilon) = \exp\{-n\beta(T,\theta,\varepsilon)+o(1)\} \quad (n\to\infty)$$

で与えられる．ただし，$\beta(T,\theta,\varepsilon)$は正の定数でexponential rateといわれる．ここで，$\alpha_n(T,\theta,\varepsilon)$は小さい，すなわち$\beta(T,\theta,\varepsilon)$は大きい方が良い推定量と考える．

Bahadur([Ba71])は，一致推定量$T=\{T_n(X_1,\ldots,X_n)\}$の漸近的な振る舞いを測る尺度としてこのexponential rateを提案した．また，Fu([F73])は適当な正則条件の下で，θの一致推定量$T=\{T_n(X_1,\ldots,X_n)\}$と任意の$\varepsilon>0$に対して

$$\beta(T,\theta,\varepsilon) \le \beta(\theta,\varepsilon)$$

となることを示した．ここで，$\beta(\theta,\varepsilon)$はBahadur boundと呼ばれ，

$$\beta(\theta,\varepsilon) := \inf_{\theta'}\{K(\theta',\theta) \ : \ |\theta'-\theta|>\varepsilon\}$$

で与えられ，$K(\theta',\theta)$はKullback-Leibler情報量

$$K(\theta',\theta) := \int\left\{\log\frac{f(x,\theta')}{f(x,\theta)}\right\}f(x,\theta')d\mu$$

とする．ここで，特に標本が独立同分布からのもので，最尤推定量のときには，適当な条件の下でこの不等式で等号が成立，すなわち有効となることが知られている([Ba60,67], [F75])．

一方，逐次の場合，標本の大きさが無限大に概収束するような停止則の列に対して，検定統計量の効率がBerk and Brown ([BeBr78])等により論じられている．これは非逐次の場合の効率(Bahadur slopeという)が，逐次の場合にも自然に拡張できることを示している．さらに，逐次推定においては，三田([M95])が，exponential classの下で，ある種の停止則を用いたときの裾確率の評価を与え，最尤推定量がその評価式を達成していることを示している．

ここでは，逐次推定の場合に，標本の大きさの期待値が無限大に発散するような停止則の列に対して，Bahadur, Zabell and Gupta ([BaZG80])の方法に従って，一致推定量の列の被覆確率に基づく評価式を与える．なお，逐次検定の場合にBerk ([Be76])が同様の議論をしている．

2. 一致推定量の被覆確率に基づく下界

$\mathbf{X}_{(n)} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$を($\sigma$-有限測度$\mu$に関する)密度関数$f^n(x,\theta)$に従う確率変数とする($n \geq 1$)．但し，$\theta \in \Theta(\subset \mathbf{R}^1)$とする．$\{N_k\}$を停止則の列，すなわち，各$k = 1, 2, \ldots$に対して

$$\{N_k \leq n\} \in \sigma(\mathbf{X}_{(n)}) \quad (\mathbf{X}_{(n)}\text{より生成される}\sigma\text{-algebra}) \quad (n \geq 1)$$

なる自然数値確率変数とする．ここでは，任意の$\theta \in \Theta$, $k = 1, 2, \ldots$について$E_\theta(N_k) < \infty$とする．以下では簡単のためN_kの代わりにNで表す．

$-\infty \leq t \leq \infty$, $\theta, \theta' \in \Theta$, $k = 1, 2, \ldots$に対して

$$C_{k,\theta,\theta'}(t) := \left\{ x \ : \ \frac{1}{E_\theta(N)} \log \frac{f^N(x,\theta')}{f^N(x,\theta)} \leq t \right\}$$

とし，任意の$A \in \sigma(\mathbf{X}_{(N)})$について(ここで，$k = 1, 2, \ldots$について

$$\sigma(\mathbf{X}_{(N)}) := \{A \ : \ A \cap \{N \leq n\} \in \sigma(\mathbf{X}_{(n)}),\ n = 1, 2, \ldots\}$$

とする．詳しくは西尾([N78])を参照)

$$P_\theta^k(A) := \int_A f^N(x,\theta) d\mu,$$
$$\tilde{K}(\theta', \theta) := \inf \left\{ t \ : \ \lim_{k \to \infty} P_{\theta'}^k \{C_{k,\theta,\theta'}(t)\} = 1 \right\}$$

とおく．ただし，$f^N(x,\theta)$は停止則Nの下での密度を表し，実際には，例えば

$$P_\theta^k(A) = \int_A f^N(x,\theta)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{N=n\}\cap A} f^n(x,\theta)dx$$

となる．このとき

$$\begin{aligned} P_{\theta'}^k\{C_{k,\theta,\theta'}(t)\} &= \int_{\left\{x\,:\,\frac{1}{E_\theta(N)}\log\frac{f^N(x,\theta')}{f^N(x,\theta)}\le t\right\}} f^N(x,\theta')d\mu \\ &\le \int_{C_{k,\theta,\theta'}(t)} f^N(x,\theta)\exp\{tE_\theta(N)\}d\mu \\ &\le \exp\{tE_\theta(N)\} \end{aligned}$$

となる．よって$E_\theta(N)\to\infty$ $(k\to\infty)$のとき，$t<0$に対して

$$\lim_{k\to\infty} P_{\theta'}^k\{C_{k,\theta,\theta'}(t)\} = 0$$

となるので$0\le\tilde{K}(\theta,\theta)\le\infty$が成り立つ．

定理1． $E_\theta(N)\to\infty$ $(k\to\infty)$を満たす停止則$\{N_k\}$と

$$\varliminf_{k\to\infty} \int_{A_k} f^N(x,\theta')d\mu > 0 \tag{1}$$

なる事象列$\{A_k\}$に対して

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{E_\theta(N)} \log \int_{A_k} f^N(x,\theta)d\mu \ge -\tilde{K}(\theta',\theta) \tag{2}$$

が成り立つ．

証明． $\tilde{K}(\theta',\theta)=\infty$のとき，(2)は自明なので，$0\le\tilde{K}(\theta',\theta)<\infty$として良い．$t>\tilde{K}(\theta',\theta)$に対して，$B_{k,\theta,\theta'}(t)=C_{k,\theta,\theta'}(t)^c$ ($B_{k,\theta,\theta'}(t)$の補集合)とおくと

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} P_{\theta'}^k\{B_{k,\theta,\theta'}(t)\} &= \lim_{k\to\infty}\left[1-P_{\theta'}^k\{C_{k,\theta,\theta'}(t)\}\right] \\ &= 1-\lim_{k\to\infty}P_{\theta'}^k\{C_{k,\theta,\theta'}(t)\} \\ &= 1-1=0 \quad (t>\tilde{K}(\theta',\theta)\text{より}) \end{aligned}$$

となるので

$$
\begin{aligned}
P_{\theta}^{k}(A_k) &\geq P_{\theta}^{k}\{A_k \cap C_{k,\theta,\theta'}(t)\} \\
&= \int_{A_k \cap C_{k,\theta,\theta'}(t)} f^N(x,\theta)d\mu \\
&\geq \int_{A_k \cap C_{k,\theta,\theta'}(t)} \exp\{-tE_\theta(N)\}\frac{f^N(x,\theta')}{f^N(x,\theta)} f^N(x,\theta)d\mu \\
&= \exp\{-tE_\theta(N)\}P_{\theta'}^{k}\{A_k \cap C_{k,\theta,\theta'}(t)\} \\
&\geq \exp\{-tE_\theta(N)\}\left[P_{\theta'}^{k}(A_k) - P_{\theta'}^{k}\{B_{k,\theta,\theta'}(t)\}\right] \\
&(P_{\theta'}^{k}(A_k \cap C_{k,\theta,\theta'}(t)) + P_{\theta'}^{k}(B_{k,\theta,\theta'}(t)) \geq P_{\theta'}^{k}(A_k \cap C_{k,\theta,\theta'}(t)) \\
&+ P_{\theta'}^{k}(A_k \cap B_{k,\theta,\theta'}(t)) = P_{\theta'}^{k}(A_k)\text{で}P_{\theta'}^{k}(B_{k,\theta,\theta'}(t))\text{を移項すればよい})
\end{aligned}
$$

となる．この式の両辺に対数をとり，$\{1/E_\theta(N)\}$倍して，$k \to \infty$とする．ここで，

$$
\varliminf_{k\to\infty} P_{\theta'}^{k}(A_k) > 0, \quad \lim_{k\to\infty} P_{\theta'}^{k}\{B_{k,\theta,\theta'}(t)\} = 0
$$

より

$$
\varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{E_\theta(N)} \log\left\{P_{\theta'}^{k}(A_k) - P_{\theta'}^{k}\{B_{k,\theta,\theta'}(t)\}\right\} = 0
$$

が成り立つ（何故なら，$\varliminf_{k\to\infty} P_{\theta'}^{k}(A_k) = a(>0)$とすると

$$
-\infty < \log a = \varliminf_{k\to\infty} \log P_{\theta'}^{k}(A_k) \leq \log 1 = 0
$$

となり，両辺を$\{1/E_\theta(N)\}$倍し，$k \to \infty$とすればよい）．従って

$$
\varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{E_\theta(N)} \log P_{\theta}^{k}(A_k) \geq -t
$$

を得る．tは$t > \tilde{K}(\theta',\theta)$であればよかったので，この様なもののinfimumをとれば(2)式を得る．(証明終)

例1. $X_1, X_2, \ldots$を互いに独立にいずれも(σ-有限測度μに関する)密度関数$f(x,\theta)$に従う確率変数とする．但し，$\theta \in \Theta(\subset \mathbf{R}^1)$とする．停止則の列$\{N_k\}$を，

$$
N_k \equiv k \qquad \text{with probability 1} \qquad (k = 1, 2, \ldots)
$$

とおく．このとき$E_\theta(N)=k\to\infty$ $(k\to\infty)$である．また，

$$\begin{aligned} C_{k,\theta,\theta'}(t) &= \left\{x \ : \ \frac{1}{E_\theta(N)}\log\frac{f^N(x,\theta')}{f^N(x,\theta)}\le t\right\} \\ &= \left\{x \ : \ \frac{1}{E_\theta(N)}\sum_{j=1}^{N}\log\frac{f(x_j,\theta')}{f(x_j,\theta)}\le t\right\} \\ &= \left\{x \ : \ \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\log\frac{f(x_j,\theta')}{f(x_j,\theta)}\le t\right\}. \end{aligned}$$

となる．大数弱法則より，X_iの密度が$f(x,\theta')$のとき

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\log\frac{f(X_j,\theta')}{f(X_j,\theta)}\xrightarrow{p}E_{\theta'}\left\{\log\frac{f(X_1,\theta')}{f(X_j,\theta)}\right\}=K(\theta',\theta)\quad(k\to\infty)$$

となるので，

$$\lim_{k\to\infty}P_{\theta'}^{k}\{C_{k,\theta,\theta'}(t)\}=\begin{cases}1 & (t\ge K(\theta',\theta)\text{のとき}),\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

となり，$\tilde{K}(\theta',\theta)$が通常のKullback-Leibler情報量と一致，すなわち

$$\tilde{K}(\theta',\theta)=K(\theta',\theta) \tag{3}$$

となることが示される．また，P_θ—$\lim_{k\to\infty}N_k/k=c(>0)$かつ$\lim_{k\to\infty}E_\theta(N_k)/k=c$となるような停止則の列$\{N_k\}$について考える．大数強法則より，$X_i$の密度が$f(x,\theta')$のとき

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\log\frac{f(X_j,\theta')}{f(X_j,\theta)}\xrightarrow{\text{a.s.}}E_{\theta'}\left\{\log\frac{f(X_1,\theta')}{f(X_j,\theta)}\right\}\quad(k\to\infty)$$

が成り立つ．一方，与えられた条件より$N_k\xrightarrow{p}\infty$となるので

$$\frac{1}{N_k}\sum_{j=1}^{N_k}\log\frac{f(X_j,\theta')}{f(X_j,\theta)}\xrightarrow{p}K(\theta',\theta)\quad(k\to\infty)$$

を得る．以上より

$$\frac{1}{E_\theta(N)}\sum_{j=1}^{N_k}\log\frac{f(X_j,\theta')}{f(X_j,\theta)}=\frac{ck}{E_\theta(N)}\frac{N_k}{ck}\frac{1}{N_k}\sum_{j=1}^{N_k}\log\frac{f(X_j,\theta')}{f(X_j,\theta)}\xrightarrow{p}K(\theta',\theta)\quad(k\to\infty)$$

となり, 以下は$N_k \equiv k$の場合と同様にして(3)式が成り立つことが示される.

次に, $C_{k,\theta,\theta'}(t)$の代わりに

$$\tilde{C}_{k,\theta,\theta'}(t) := \left\{ x \ : \ \frac{1}{N} \log \frac{f^N(x,\theta')}{f^N(x,\theta)} \leq t \right\}$$

とした場合を考える. このとき, P_θ—$\lim_{k\to\infty} N_k = \infty$となるような停止則の列$\{N_k\}$に対して, 上と同様に

$$\frac{1}{N_k} \sum_{j=1}^{N_k} \log \frac{f(X_j,\theta')}{f(X_j,\theta)} \xrightarrow{p} K(\theta',\theta) \quad (k \to \infty)$$

となるので, この場合も(3)式が成り立つ.

以下では, $X_1, X_2, \ldots$が互いに独立に同一の分布(密度$f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta$) に従う場合のみを考える. θの実数値関数$g(\theta)$の一致推定量$T = \{T_n(\mathbf{X}_{(n)})\}$と停止則の列$\{N_k\}$に対して,

$$\begin{aligned} a_k(\varepsilon,\theta) &:= \int_{\{|T_N - g(\theta)| \geq \varepsilon\}} f^N(x,\theta) d\mu, \\ \Delta(\varepsilon,\theta) &:= \{\theta' \in \Theta \ : \ |g(\theta') - g(\theta)| > \varepsilon\}, \\ b(\varepsilon,\theta) &:= \begin{cases} \inf\{\tilde{K}(\theta',\theta) \ : \ \theta' \in \Delta(\varepsilon,\theta)\} & (\Delta(\varepsilon,\theta) \neq \emptyset \text{のとき}), \\ \infty & (\text{その他}) \end{cases} \end{aligned}$$

とおく. このとき次の定理を得る.

定理2. $\{N_k\}$を, P_θ—$\lim_{k\to\infty} N_k = \infty$ $(\theta \in \Theta)$を満たす停止則の列とし, $T = \{T_n(\mathbf{X}_{(n)})\}$を$\theta$の実数値関数$g(\theta)$の強一致推定量とする. このとき

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{E_\theta(N)} \log a_k(\varepsilon,\theta) \geq -b(\varepsilon,\theta) \tag{4}$$

が成り立つ.

証明. θ, εを固定する. $b(\varepsilon,\theta) = \infty$のとき, (4)式は自明なので, $b(\varepsilon,\theta) < \infty$としてよい. このとき$\Delta(\varepsilon,\theta) \neq \emptyset$となる. $\theta' \in \Delta(\varepsilon,\theta)$をとる. いま$X_i$が密度$f(x,\theta')$を持つ分布に従っているとすると, T_nは強一致推定量なので$T_n \xrightarrow{\text{a.s.}} g(\theta')$となる. さらに, $P_{\theta'}\theta' - \lim_{k\to\infty} N_k = \infty$ $(k \to \infty)$なので, $T_N \xrightarrow{p} g(\theta')$ $(k \to \infty)$となる. よって, 三角不等式($||X| - |Y|| \leq |X - Y|$)より

$$\begin{aligned} &P_{\theta'}\theta' \{||T_N - g(\theta)| - |g(\theta') - g(\theta)|| \geq \varepsilon\} \\ \leq &P_{\theta'\theta'} \{|T_N - g(\theta) - g(\theta') + g(\theta)| = |T_N - g(\theta')| \geq \varepsilon\} \to 0 \quad (k \to \infty) \end{aligned}$$

となる．よって，$\theta' \in \Delta(\varepsilon,\theta)$より$|T_N - g(\theta)| \xrightarrow{p} |g(\theta') - g(\theta)| > \varepsilon \ (k \to \infty)$となる．ここで，$A_k := \{x \ : \ |T_N - g(\theta)| \geq \varepsilon\}$とすると

$$\lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f^N(x,\theta')d\mu = 1$$

となる．これは定理1の条件を満たしており，

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{1}{E_\theta(N)} \log \int_{A_k} f^N(x,\theta)d\mu \geq -\tilde{K}(\theta',\theta)$$

となる．θ'は$\theta' \in \Delta(\varepsilon,\theta)$であれば任意でよいので，右辺のsupをとり題意を得る． （証明終）

注意. 特に$T = \{T_n(\mathbf{X}_{(n)})\}$が$g(\theta)$の最尤推定量の場合に，$T$が強一致推定量となるための十分条件が，例えばWald([W49])により与えられている．いくつかを列記すると

(i) Θは$\mathbf{R}^1$の開区間である．

(ii) X_iの分布P_θの密度関数$f(x,\theta)$の台$A := \{x \ : \ f(x,\theta) > 0\}$が$\theta$と無関係である．

(iii) P_θは認定可能である．

例2. $X_1, X_2, \ldots$を互いに独立にいずれも$(0,\theta)$上の一様分布に従う確率変数とする．但し，$\theta \in \Theta = (0,\infty)$とする．$g(\theta) = \theta$の推定について考える．$N_k \equiv k \ (k = 1,2,\ldots)$なる停止則$\{N_k\}$について考える．いま

$$\tilde{K}(\theta',\theta) = K(\theta',\theta) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\theta'} \theta' f(x,\theta') \log \frac{f(x,\theta')}{f(x,\theta)} dx = \log \frac{\theta}{\theta'} & (\theta' \leq \theta\text{のとき}), \\ \infty & (\text{その他}), \end{cases}$$

$$\Delta(\varepsilon,\theta) = \{\theta' \in (0,\infty) \ : \ |\theta' - \theta| > \varepsilon\},$$

$$\begin{aligned} b(\varepsilon,\theta) &= \inf\left\{\tilde{K}(\theta',\theta) \ : \ \theta' \in \Delta(\varepsilon,\theta)\right\} \\ &= \begin{cases} \inf\left\{\log\dfrac{\theta}{\theta'} \ : \ \theta' \in \Delta(\varepsilon,\theta), \ \theta' \leq \theta\right\} = \log\dfrac{\theta}{\theta-\varepsilon} & (0 < \varepsilon < \theta), \\ \infty & (\varepsilon \geq \theta) \end{cases} \end{aligned}$$

となる．ここで

$$a_k(\varepsilon,\theta) := \int_{\{|T_k - \theta| \geq \varepsilon\}} f^k(x,\theta)dx$$

とし，$T_k := \max_{1\leq i\leq k} X_i = X_{(k)}$とおく($\theta$の最尤推定量)．$T_k$の分布関数は

$$\begin{aligned} P_\theta\{T_k \leq t\} &= P_\theta\left(\max_{1\leq i\leq k} X_i \leq t\right) \\ &= P_\theta(X_1 \leq t\text{かつ}\cdots\text{かつ}X_k \leq t) \\ &= \{P_\theta(X_1 \leq t)\}^k = \left(\frac{t}{\theta}\right)^k \qquad (0 \leq t \leq \theta\text{のとき}) \end{aligned}$$

となる(密度は $p_{T_k}(t) = k\left(\frac{t}{\theta}\right)^{k-1}\frac{1}{\theta}$). $\varepsilon < \theta$のとき

$$a_k(\varepsilon,\theta) = \int_0^{\theta-\varepsilon} p_{T_k}(t)dt = \frac{k}{\theta^k}\int_0^{\theta-\varepsilon} t^{k-1}dt = \left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^k$$

となり

$$\frac{1}{E_\theta(N)}\log a_k(\varepsilon,\theta) = \log\frac{\theta-\varepsilon}{\theta} = -b(\varepsilon,\theta)$$

を得る. 一方, $\varepsilon \geq \theta$のとき

$$a_k(\varepsilon,\theta) = \int_{\{|T_k-\theta|\geq\varepsilon\}} f^k(x,\theta)dx = 0$$

となり, $\log 0 = -\infty$とすれば

$$\frac{1}{E_\theta(N)}\log a_k(\varepsilon,\theta) = -b(\varepsilon,\theta)$$

となる.

注意. 例2においては, 最尤推定量が強一致性を持つための十分条件(Wald([W49])の条件)を満たさないが, T_kは強一致推定量となっている. 実際, 次のようにして示される.

一般に"$X_n \overset{\text{a.s.}}{\to} X\ (n\to\infty)$
$\iff P\left(|X_k - X| > \varepsilon, {}^\forall k \geq n\right) \to 0\ (n\to\infty)$"が知られている(例えば西尾([N78]), p.71参照).
いま,

$$\begin{aligned}
P_\theta\left(|T_k-\theta| > \varepsilon,\ {}^\forall k\geq n\right) &= P_\theta\left(\theta - T_k > \varepsilon,\ {}^\forall k \geq n\right)\\
&= P_\theta\left(\theta-\varepsilon > T_k,\ {}^\forall k\geq n\right)\\
&= P_\theta\left(\theta-\varepsilon > X_{(n)}\ \text{かつ}\ \theta-\varepsilon > X_{n+1}\ \text{かつ}\ \theta-\varepsilon > X_{n+1}\ldots\right)\\
&= \left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n \times \frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\times\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\times\cdots\\
&\to 0 \quad (n\to\infty)
\end{aligned}$$

となる. よって, $T_k \overset{\text{a.s.}}{\to} \theta\ (k\to\infty)$がいえた.

Θが$\mathbf{R}^1$の開区間であり, 分布P_θの密度の台$A = \{x : f(x,\theta) > 0\}$が$\theta$と無関係で, $(\partial/\partial\theta)f(x,\theta)$が存在し有限値をとるとする. このとき, $\theta\in\Theta$の関数$I(\theta) := E_\theta\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X_1,\theta)\right\}^2\right]$をFisher情報量と呼ぶ.

定理3([Ba60]). 適当な正則条件の下で, $\varepsilon \to 0$のとき

$$K(\theta+\varepsilon,\theta)=\frac{\varepsilon^2}{2}I(\theta)+o(\varepsilon^2)$$

と展開できる.

証明の概略. 下式

$$\int f(x,\theta)d\mu=1$$

において, 両辺のθに関する2次までの導関数が左辺においては積分記号下で得られる, すなわち

$$\int\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta)\right\}f(x,\theta)d\mu=\int\frac{\partial}{\partial\theta}f(x,\theta)d\mu=\frac{\partial}{\partial\theta}\int f(x,\theta)d\mu=0$$
$$\left(E_\theta\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X,\theta)\right\}=0\right)$$

かつ

$$\begin{aligned}&\int\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x,\theta)\right)+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta)\right)^2\right\}f(x,\theta)d\mu\\&=\int\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}f(x,\theta)d\mu=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\int f(x,\theta)d\mu=0\\&\qquad\left(E_\theta\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X,\theta)\right\}^2\right]=-E_\theta\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(X,\theta)\right\}\right)\end{aligned}$$

が成り立つとする. Taylor展開より

$$\begin{aligned}\log f(x,\theta+\varepsilon)=&\log f(x,\theta)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta)+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x,\theta)+O(\varepsilon^3),\\f(x,\theta+\varepsilon)=&f(x,\theta)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\theta}f(x,\theta)+O(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}
K(\theta+\varepsilon,\theta) &= \int f(x,\theta+\varepsilon)\log\frac{f(x,\theta+\varepsilon)}{f(x,\theta)}d\mu \\
&= \int f(x,\theta+\varepsilon)\{\log f(x,\theta+\varepsilon)-\log f(x,\theta)\}d\mu \\
&= \int\left\{f(x,\theta)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\theta}f(x,\theta)+O(\varepsilon^2)\right\} \\
&\quad\cdot\left\{\log f(x,\theta)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta)+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x\theta)+O(\varepsilon^3)\right\}d\mu \\
&=\varepsilon^2\int\left\{\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}f(x,\theta)}{f(x,\theta)}\right\}^2 f(x,\theta)d\mu+\frac{\varepsilon^2}{2}\int\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x,\theta)\right\}f(x,\theta)d\mu \\
&=\varepsilon^2\int\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta)\right\}^2 f(x,\theta)d\mu+\frac{\varepsilon^2}{2}\int\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x,\theta)\right\}f(x,\theta)d\mu \\
&=\frac{\varepsilon^2}{2}\int\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta)\right\}^2 f(x,\theta)d\mu \\
&=\frac{\varepsilon^2}{2}I(\theta)
\end{aligned}$$

となる．ここで剰余項の積分値も無視できるものとした(このようなことが許されるための十分条件は[Ba60]を参照)．よって, 題意を得た． (証明終)

従って, 定理2と3から次を得る．

定理4. $\{N_k\}$を, P_θ—$\lim_{k\to\infty}N_k/k=c(>0)$ $(\theta\in\Theta)$かつ$\lim_{k\to\infty}E_\theta(N_k)/k=c$となるような停止則の列, $T=\{T_n(\mathbf{X}_{(n)})\}$を$\theta$の実数値関数$g(\theta)$の強一致推定量とする．このとき定理3の正則条件の下で,

$$\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\ \underline{\lim}_{k\to\infty}\frac{1}{\varepsilon^2E_\theta(N)}\log a_k(\varepsilon,\theta)\geq-\frac{I(\theta)}{2}$$

が成立する．

証明略.

参考文献

[Ba60] Bahadur, R. R. (1960). Asymptotic efficiency of tests and estimates. *Sankhyā*, **22**, 229–252.

[Ba67] Bahadur, R. R. (1967). Rates of convergence of estimates and test statistics. *Ann. Math. Statist.*, **38**, 303–324.

[Ba71] Bahadur, R. R. (1971). *Some Limit Theorems in Statistics*, SIAM, Philadelphia.

[BaZG80] Bahadur, R. R., Zabell, S. and Gupta, S. (1980). Large deviations, tests, and estimates. In *Asymptotic Theory of Statistical Tests and Estimation.* (ed. Chatcravarti, I. M.), 33–64. Academic Press, New York.

[Be76] Berk, R. H. (1976). Asymptotic efficiencies of sequential tests. *Ann. Statist.*, **4**, 891–911.

[BeBr78] Berk, R. H. and Brown, L. D. (1978). Sequential Bahadur efficiency. *Ann. Statist.*, **6**, 567–581.

[F73] Fu, J. C. (1973). On a theorem of Bahadur on the rate of convergence of point estimators. *Ann. Statist.*, **1**, 741–749.

[F75] Fu, J. C. (1975). The rate of convergence of estimates and test statistics. *Ann. Statist.*, **3**, 234–240.

[M95] Mita, H. (1995). Tail probability of sequential maximum likelihood estimator for exponential class. *J. Japan Statist. Soc.*, **25**, 173–182.

[N78] 西尾真喜子. (1978). 確率論. 実教出版.

[W49] Wald, A. (1949). Note on the consistency of the maximum likelihood estimate. *Ann. Math. Statist.*, **20**, 595–601.