数理解析研究所講究録
1056 巻 1998 年 96-109

いくつかの凸な物体による散乱について

井川　満 (阪大理) (Mitsuru Ikawa)

1. 序　$\mathcal{O}_j$ $(j=1,2,\ldots,J)$ を $\mathbf{R}^3$ のなかの有界な開集合で、その境界 $\partial\mathcal{O}_j=\Gamma_j$ は滑らかなものとする。$\mathcal{O}_j$ $(j=1,2,\ldots,J)$ の形とその配置に関しては、以下のことを仮定する:

(H.1) 各 $\mathcal{O}_j$ は strictly convex, すなわち Γ_j のガウス曲率は正である。

(H.2) $\{j_1,j_2,j_3\}\in\{1,2,\ldots,J\}^3$ で、$\ell\neq\ell'$ ならば $j_\ell\neq j_{\ell'}$ を満たすものに対しては

$$(\text{convex hull of } \overline{\mathcal{O}_{\ell_1}} \text{ and } \overline{\mathcal{O}_{\ell_2}})\cap\overline{\mathcal{O}_{\ell_3}}=\emptyset$$

がなりたつ。

物体の個数に関しては

$$J\geq 3$$

を仮定する。

次のようにおく:

$$\mathcal{O}=\cup_{j=1}^J\mathcal{O}_j,\quad \Omega=\mathbf{R}^3\setminus\overline{\mathcal{O}},\quad \Gamma=\cup_{j=1}^J\Gamma_j$$

この講演で考える問題は、Ω における古典力学に関するゼータ関数の性質についてである。ここで、古典力学というのは Ω 内の質点の運動を指しているのであるが、その質点の運動に関して、考察の対象として運動の周期軌道を取り上げる。向きを持った Ω 内の周期軌道を γ で表すことにする。周期軌道 γ に対して次の量を導入しておこう:

d_γ : γ の長さ,
i_γ : γ の反射点の個数,
$\lambda_{\gamma,1}$, $\lambda_{\gamma,2}$: γの Poincare 写像の個有値で 1 より小さいもの.

物体に関する仮定 (H.1) と (H.2) より、Ω 内の周期軌道は可算無限個あることが分かる。そして、周期軌道の分布の仕方に関しては次のことが分かっている: ある正の定数 a_0 があって、任意の $r>0$ に対して

$$\#\{\gamma:\ \gamma \text{ は } \Omega \text{ 内の周期軌道で } d_\gamma\leq r\}\leq\exp(a_0r). \tag{1.1}$$

が成り立つ。

周期軌道全体の性質を表すものとして、ゼータ関数 $\zeta(s)$ がある。その定義は、次のように与えられる:

$$\zeta(s)=\prod_{\gamma:\text{prime}}\left(1-(-1)^{i_\gamma}(\lambda_{\gamma,1}\lambda_{\gamma,2})^{1/2}\exp(-sd_\gamma)\right)^{-1} \tag{1.2}$$

ここで、無限積は Ω での向きを持った周期軌道で、素であるような γ 全体に亘って取るものとする。ここで素であるとは、より小さい周期を持った周期軌道の繰り返しとなっていないことを指すこととする。

ゼータ関数の定義式 (1.2) に、次の $x=0$ の近傍で成り立つ関係式

$$(1-x)^{-1} = \exp(\log(1-x)^{-1}) = \exp(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n)$$

を用いると、$\zeta(s)$ は形式的には次のようにも表せる:

$$\zeta(s) = \exp\left(\sum_{\gamma:\mathrm{prime}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\{(-1)^{i_\gamma}(\lambda_{\gamma,1}\lambda_{\gamma,2})^{1/2}\exp(-sd_\gamma)\}^n\right) \tag{1.3}$$

(1.3) の右辺に現れている無限和

$$\sum_{\gamma:\mathrm{prime}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\{(-1)^{i_\gamma}(\lambda_{\gamma,1}\lambda_{\gamma,2})^{1/2}\exp(-sd_\gamma)\}^n$$

は

$$\sum_{\gamma:\mathrm{periodic}}\frac{T_\gamma}{d_\gamma}(-1)^{i_\gamma}(\lambda_{\gamma,1}\lambda_{\gamma,2})^{1/2}\exp(-sd_\gamma) \tag{1.4}$$

とも表される。ここで和は Ω での素なものもまたそうでないものも含めた、全ての周期軌道に亘ってとるものとし、T_γ は周期軌道 γ の素周期とする。周期軌道の個数に関する評価式 (1.1) を考慮に入れると、(1.4) は $\Re s > a_0$ においては絶対収束しており、(1.4) はその範囲において s についての正則関数を与えており、よって (1.3) の右辺はそこでやはり正則となる。また、(1.4) が絶対収束するような s に対しては (1.2) の右辺の無限積も絶対収束し、それは (1.3) の右辺と等しいことがわかる。

さて、(1.4) の各項の形より、

> $s_1 \in \mathbf{C}$ で (1.4) は絶対収束しているならば、全ての $\Re s \geq \Re s_1$ を満たす $s \in \mathbf{C}$ において、(1.4) は絶対収束する

ことが分かる。従って、次のような $s_0 \in \mathbf{R}$ が存在する:

> $\Re s > s_0$ なる s に対しては (1.4) は絶対収束するが、$\Re s < s_0$ なる s に対しては (1.4) は絶対収束しない.

この $s_0 \in \mathbf{R}$ を、ゼータ関数 $\zeta(s)$ の絶対収束座標と呼ぶことにする。先に注意したことと、s_0 の定義より、次のことが言える。

$\zeta(s)$ は $\Re s > s_0$ で正則である。

上の事実に関して、直ちに思い浮かぶ疑問は、絶対収束が保証されていないところに、$\zeta(s)$ を解析接続して行くとどんなことが起こるかということである。すなわち、$\Re s \leq s_0$ の

範囲に $\zeta(s)$ を解析接続するとき、どのような振る舞いをするかが問題である。Pollicott[9] および Haydn[2] の結果より、ある正の定数 α_1 で

$$\zeta(s) \text{ は } \Re s > s_0 - \alpha_1 \text{ で有理型である}$$

ことが分かっている。また、絶対収束軸 $\Re s = s_0$ の上には極はないことも知られている。しかしながら、$\Re s < s_0$ において極が現れるか、あるいは現れないかについては全く分かっていなかった。

この講演で示す結果は次の定理である。

定理 1　条件 (H.1) および (H.1) を満たしている障害物 $\mathcal{O}$ に対して (1.2) で定義されるゼータ関数 $\zeta(s)$ の絶対収束座標 s_0 が

$$s_0 > 0 \tag{1.5}$$

となっているとする。その時、ある正の定数 α_0 が存在して、

$$\zeta(s) \text{ は } \Re s \geq s_0 - \alpha_0 \text{ で正則である。} \tag{1.6}$$

上の定理は、絶対収束座標に関して (1.5) と言う条件を課してはいるが、$s_0 \geq \Re s > s_0 - \alpha_1$ のなかで、$\zeta(s)$ は極を持つとしても、直線 $\Re s = s_0$ に集積していく様なことは起こり得ないことを示している。このようなゼータ関数の極の分布に関する情報はこれまで全く知られていなかったことである。

ここで強調しておきたいことは、上の定理は Ω における古典力学の周期軌道に関する結果であるが、その証明には量子力学の結果を用いるということである。ここで量子力学として考察する対象は、Ω の中でのラプラス作用素である。より詳しくは $L^2(\Omega)$ の中で、Dirichlet 境界条件を課したもとでのラプラス作用素の自己共役作用素として実現されたものである。このように自己共役作用素として実現されたものを $-A$ で表すことにすると、$L^2(\Omega)$ の中の作用素 A は非負となる、すなわち、作用素 A の定義域を $D(A)$ で表すと、

$$(Au, u)_{L^2(\Omega)} \geq ||u||^2_{L^2(\Omega)} \quad \text{for all} \quad u \in D(A)$$

が成り立つことを意味している。したがって、$\Im z \leq -s_0$ なる範囲にある z に対しては、

$$|((z^2 - A)u, u)_{L^2(\Omega)}| \geq s_0 |\Re z| \; ||u||^2_{L^2(\Omega)} \quad \text{for all} \quad u \in D(A)$$

が成り立つ。このことは、

$$||(z^2 - A)^{-1}||_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{s_0 |\Re z|} \quad \text{for all} \quad \Im z \leq -s_0 \tag{1.7}$$

なる評価式が成立することを意味している。

我々が定理を証明する方法は、もし $\alpha_0 > 0$ をどのように小さく選んでも、 $s_0 - \alpha_0 \leq \Re s < s_0$ の範囲にゼータ関数 $\zeta(s)$ の極が無限個存在するならば、$z \in \mathbf{C}$ が $-s_0 \leq \Im z <$

$-(s_0-\alpha_0)$, $|\Re z|\geq 1$ の範囲を動くとき $(z^2-A)^{-1}$ は有界に留まらないことを示すことである。これは、(1.7) に矛盾する。

このように、古典力学のなかに現れるゼータ関数の性質を調べるのに、量子力学において一般に成立する事実を用いることは、少々奇妙な感じを受けるかもしれないが、現在のところ古典力学の範囲内で定理を示すことは出来ていない。

2. 振動的境界値にたいする漸近解の構成

パラメータ $z\in\mathbf{C}$ を持った境界値問題を考えよう:

$$\begin{cases}(-\Delta-z^2)u=0 & \text{in }\Omega,\\ u=f(x) & \text{on }\Gamma.\end{cases}\tag{2.1}$$

$\Im z<0$ となる z にたいして、(2.1) は $L^2(\Omega)$ のなかに一意的に解を持つ。この解を

$$u(x)=(R(z)f)(x)$$

と表そう。そうすると、$R(z)\in\mathcal{L}(L^2(\Gamma),L^2(\Omega))$ であって、パラメータ z に関しては $z\in\{z;\ \Im z<0\}$ の範囲で解析的に依存している。

境界 Γ_1 上に与えられた次の形の振動的境界値関数

$$f(x,z)=e^{-iz\varphi(x)}g(x)\tag{2.2}$$

に対して

$$\begin{cases}(-\Delta-z^2)u=0 & \text{in }\ \Omega,\\ u=f(x,z) & \text{on }\ \Gamma_1,\\ u=0 & \text{on }\ \Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\cdots\cup\Gamma_J\end{cases}\tag{2.3}$$

の解の近似解を次の手順で構成する事にしよう:

まず $\varphi_{(1)}(x)$ を実数値関数で

$$\begin{cases}\varphi_{(1)}(x)=\varphi(x) & \text{on }\ \Gamma_1\\ |\nabla\varphi_{(1)}(x)|=1\end{cases}$$

を満たすものとし、$u_{(1)}(x,z)$ を

$$u_{(1)}(x,z)=e^{-iz\varphi_{(1)}(x)}g_{(1)}(x)$$

の形の関数で、$(-z^2-\Delta)u=0$ in Ω に対する漸近解となるようにする。その構成法は標準的な手法を用いればよい。次に、$u_{(1,2)}, u_{(1,3)},\cdots,u_{(1,J)}$ を次の形

$$u_{(1,l)}(x,z)=e^{-iz\varphi_{(1,l)}(x)}g_{(1,l)}(x)\qquad(l=2,3,\ldots,J)$$

の漸近解であって、境界条件

$$u_{(1)}(x,z)+u_{(1,l)}(x,z)=0\quad\text{on}\ \ \Gamma_{1,l}\quad(l=2,3,\ldots,J),$$

を満たしているように構成する。ここで、$\Gamma_{i,j}$ は Γ_j の部分で Γ_i より見える部分を指すものとする。

我々は、この手順を繰り返すのであるが、それを表示するのに次の記号を準備しておこう。$n = 2, 3, \ldots$ に対して、

$$\begin{aligned} I_n = \{\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_n);\ & i_j \in \{1, 2, \ldots, J\},\ i_1 = 1 \\ & \text{and} \quad A(i_j, i_{j+1}) = 1 \quad \text{for all } j = 1, 2, \ldots, n-1\}. \end{aligned}$$

とおく。

ここで、全ての $\mathbf{i} \in I_n$ に対して $u_{\mathbf{i}}(x, z)$ が次の形の漸近解として与えられているとしよう:

$$u_{\mathbf{i}}(x, z) = e^{-iz\varphi_{\mathbf{i}}(x)} g_{\mathbf{i}}(x). \tag{2.4}$$

その時、$\mathbf{j} \in I_{n+1}$ に対して、

$$u_{\mathbf{j}}(x, z) = e^{-iz\varphi_{\mathbf{j}}(x)} g_{\mathbf{j}}(x)$$

なる形の $u_{\mathbf{j}}(x, z)$ を以下の性質を満たすものとして定義しよう: $\mathbf{j} \in I_{n+1}$ は $\mathbf{j} = (\mathbf{i}, k)$, $\mathbf{i} \in I_n$ の形であるとする。まず相関数 $\varphi_{\mathbf{j}}(x)$ を

$$\begin{cases} \varphi_{\mathbf{j}}(x) = \varphi_{\mathbf{i}}(x) & \text{on} \quad \Gamma_{i_n, k} \\ |\nabla \varphi_{\mathbf{j}}(x)| = 1 \end{cases}$$

を満たすようにつくる。次に、振幅関数を輸送方程式を満たし、かつ境界条件

$$g_{\mathbf{j}}(x) = -g_{\mathbf{i}}(x) \qquad \text{on} \quad \Gamma_{i_n, k}$$

を満たすように作る。このようにすると

$$u_{\mathbf{i}}(x, z) + u_{\mathbf{j}}(x, z) = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_{i_n, k}$$

が成り立つ。この手順により、任意の $I = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$ の元 $\mathbf{i}$ に対して $u_{\mathbf{i}}(x, z)$ を定義することが出来る。これらを用いて $w(x, z)$ を

$$w(x, z) = \sum_{\mathbf{i} \in I} u_{\mathbf{i}}(x, z), \tag{2.5}$$

を定義しよう。この $w(x, z)$ は (2.3) の近似解となってる。もちろん近似解の意味をきちんと説明しなければならないが、それは後に回すことにして、まず (2.5) で与えられる関数 $w(x, z)$ の表示について考察することにする。

3. $w(x,z)$ の Ruelle operator を用いた表現

3.1. Ω での古典力学系と数列空間 Σ_A

$A = [A(i,j)]_{i,j=1,2,\ldots,J}$ を、次で与えられる $J \times J$ 行列とする:

$$A(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad i \neq j, \\ 0 & \text{for} \quad i = j. \end{cases}$$

この行列 A に対して無限数列の集合 Σ_A を次で定義しよう:

$$\begin{aligned} \Sigma_A = \{\xi = (\ldots, \ & \xi_{-n}, \xi_{-n+1}, \ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots); \\ & \xi_i \in \{1, 2, \ldots, J\} \ \text{ and } \ A(\xi_i, \xi_{i+1}) = 1 \ \text{ for all } \ i\}. \end{aligned}$$

すると、各 $\xi \in \Sigma_A$ に対して、未来に対してもまた過去についても、障害物 $\mathcal{O}$ によって捉えられた幾何光学の軌道で、その物体での反射の順序が ξ となっている $\mathcal{X}(\xi)$ が一意的に存在する。より詳しく言えば、$\mathcal{X}(\xi)$ は Ω での幾何光学の軌道で、時刻 0 において Γ_{ξ_0} 上で反射し、時間が進むに従って順次 Γ_{ξ_1}, $\Gamma_{\xi_2}, \cdots$ 上で反射する。また、時間を逆方向にたどると、$\Gamma_{\xi_{-1}}$, $\Gamma_{\xi_{-2}}, \cdots$ の順に反射をしてきていたものとする。ここで、軌道 $\mathcal{X}(\xi)$ の第 j 番目の反射点を $P_j(\xi)$ と記すことにする。この記号を用いると、$\mathcal{X}(\xi)$ は、順次以下の点

$$\cdots, P_{-1}(\xi), P_0(\xi), P_1(\xi), \cdots.$$

を結んでいって作られる無限の折れ線となっていることが分かる。

$\xi \in \Sigma_A$ に対して、Ω での折れ線が一つ定まることを用いて、Σ_A 上の関数 $f(\xi)$ を次で定義しよう:

$$f(\xi) = |P_0(\xi) - P_1(\xi)|. \tag{3.1}$$

また、$\xi \in \Sigma_A$ に対して、相関数の列 $\{\varphi_{\xi,j}(x)\}_{j=-\infty}^{\infty}$ で、全ての j に対して

$$\begin{array}{ll} (\text{ア}) & |\nabla\varphi_{\xi,j}(x)|^2 = 1 \quad \text{in a neighborhood of} \quad P_j(\xi)P_{j+1}(\xi), \\ (\text{イ}) & \nabla\varphi_{\xi,j}(P_j(\xi)) \quad \text{is parallel to} \quad \overrightarrow{P_j(\xi)P_{j+1}(\xi)}, \\ (\text{ウ}) & \varphi_{\xi,j}(x) = \varphi_{\xi,j+1}(x) \quad \text{on (a neighborhood of } P_{j+1}(\xi)) \cap \Gamma_{\xi_{j+1}}. \\ (\text{エ}) & \text{the principal curvatures of } \mathcal{C}_{\xi,j}(P_j(\xi) \text{ with respect to } \ \nabla\varphi_{\xi,j}(P_j(\xi)) \\ & \text{are positive,} \end{array} \tag{3.2}$$

ただし

$$\mathcal{C}_{\xi,j}(x) = \{y;\ \varphi_{\xi,j}(y) = \varphi_{\xi,j}(x)\}$$

とする。条件 (3.2) は、$P_j(\xi)P_{j+1}(\xi)$ の近傍で $\nabla\varphi_{\xi,j}(x)$ を一意的に定めることを注意しておこう。

次に、$G_{\xi,j}(x)$ によって波面 $\mathcal{C}_{\xi,j}(x)$ の x におけガウス曲率を表すこととし、関数 $g(\xi)$ を

$$g(\xi) = \log\sqrt{G_{\xi,0}(P_1(\xi))/G_{\xi,0}(P_0(\xi))} \tag{3.3}$$

で定義しよう。すると

$$g(\xi) < 0 \quad \text{for all} \quad \xi \in \Sigma_A \tag{3.4}$$

が従う。 さて、σ_A によって Σ_A の元の左平行移動作用素を表す、すなわち、

$$(\sigma_A \xi)_i = \xi_{i+1} \quad \text{for all} \quad i.$$

すると、(1.2) で定義したゼータ関数 $\zeta(s)$ は以下のようにも表せる:

$$\zeta(s) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{{\sigma_A}^n \xi = \xi} \exp S_n r(\xi, s)\right), \tag{3.5}$$

ここで

$$r(\xi, s) = -sf(\xi) + g(\xi) + \sqrt{-1}\,\pi, \tag{3.6}$$

$$S_n r(\xi, s) = r(\xi, s) + r(\sigma_A \xi, s) + \cdots + r({\sigma_A}^{n-1}\xi, s) \tag{3.7}$$

とおいた。

明らかに $\xi \in \Sigma_A$ で${\sigma_A}^n \xi = \xi$ をみたしているものは、作用 σ_A に関する周期 n の周期的要素であり、その ξ に対応する軌道 $\mathcal{X}(\xi)$ は Ω での n 個の反射点を持った周期軌道となっている。ここで γ によって対応する周期軌道を表すと、これは Γ_{ξ_0} 上のある点から出発して、順次 $\Gamma_{\xi_0}, \Gamma_{\xi_0}, \cdots$ 上で反射して行き、 $\Gamma_{\xi_{n-1}}$ 上で反射した後、出発点に返る軌道となっている。また、

$$\exp\left(S_n r(\xi, s)\right) = e^{-sd_\gamma} (\lambda_{\gamma,1}\lambda_{\gamma,2})^{1/2}(-1)^{i_\gamma}, \tag{3.8}$$

が成り立っている。

また、一つの向きを持った周期軌道 γ に対応する $\xi \in \Sigma_A$ の個数は、γ の素周期軌道が持つ反射点の個数と一致する。$\sigma_A^n \xi = \xi$ であれば、γ の反射点の個数は n である。このことは、

$$\frac{\gamma \text{ に対応する } \xi \text{ の個数}}{n} = \frac{T_\gamma}{d_\gamma}$$

となる。以上のことから、(1.4) で定義した $\zeta(s)$ は (3.5) で与えられたものと一致することが分かる。

3.2. Ruelle 作用素とゼータ関数

Σ_A 上の関数 $k(\xi)$ に対して

$$\text{var}_n\, k = \sup\{|k(\xi) - k(\xi')|;\ \xi_i = {\xi'}_i \ \text{ for all } \ |i| \le n\},$$

とおき、 $0 < \theta < 1$ に対して

$$||k||_\theta = \sup_n \frac{\text{var}_n\, k}{\theta^n}$$

と定義する。そして

$$||k||_\infty = \sup_{\xi\in\Sigma_A} |k(\xi)|, \quad \text{and} \quad |||k|||_\theta = ||k||_\theta + ||k||_\infty,$$

とおく。

関数空間 $\mathcal{F}_\theta(\Sigma_A)$ を

$$\mathcal{F}_\theta(\Sigma_A) = \{k(\xi);\ |||k|||_\theta < \infty\}$$

で定義する。さて、一方方向の数列の空間を

$$\Sigma_A^+ = \{\xi = (\xi_0, \xi_1, \cdots);\ A(\xi_i, \xi_{i+1}) = 1 \ \text{ for all } i \geq 0\},$$
$$\Sigma_A^- = \{\xi = (\cdots, \xi_{-2}, \xi_{-1});\ A(\xi_{i-1}, \xi_i) = 1 \ \text{ for all } \ i \leq -1\}$$

として導入しよう。

前の小節で導入した関数 $f(\xi)$ と $g(\xi)$ は、$\mathcal{O}$ より定まるある $0 < \theta < 1$ に対して

$$f, g \in \mathcal{F}_\theta(\Sigma_A)$$

となっていることは確かめられる。

各 $j \in \{1, 2, \ldots, J\}$ に対して $\xi_{-n}^{(j)}$, $n = 1, 2, \ldots$ を $\xi_{-1}^{(j)} \neq j$ を満たし、かつ $A(\xi_{-n-1}, \xi_{-n}) = 1$ を全ての $n = 1, 2, \ldots$ に対して満たしているように選ぶ。そして $\xi = (\xi_0, \xi_1, \cdots) \in \Sigma_A^+$ または、$\xi = (\cdots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \cdots) \in \Sigma_A$に対して $e(\xi)$ として Σ_A の元を次の方法により対応させよう: $\xi_0 = j$ の場合には

$$e(\xi) = (\cdots, \xi_{-n}^{(j)}, \xi_{-n+1}^{(j)}, \cdots, \xi_{-1}^{(j)}, \xi_0, \xi_1, \cdots).$$

(3.6) 式で定義された $r(\xi, s)$ に対して $\tilde{r}(\xi, s)$ と $\chi(\xi, s)$ を

$$\tilde{r}(\xi, s) \text{ は } (\xi_0, \xi_1, \cdots) \text{ にのみ依存する},$$

すなわち、$\tilde{r}$ は $\mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+)$ に属する関数となっているように、次の形で作ろう：

$$\tilde{r}(\xi, s) = r(\xi, s) - \chi(\xi, s) + \chi(\sigma_A \xi, s),$$
$$\chi(\xi, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \{r(\sigma_A^j \xi) - r(\sigma_A^j e(\xi))\}$$

このように定義した $\tilde{r}(\xi, s)$ が Σ_A^+ 上の関数になっていることは、直接確かめられる。ここで大切なことは、

$$\sum_{\substack{\sigma_A^n \xi = \xi \\ \xi \in \Sigma_A^+}} S_n \tilde{r}(\xi, s) = \sum_{\substack{\sigma_A^n \xi = \xi \\ \xi \in \Sigma_A}} S_n r(\xi, s)$$

が成り立つことである。

ここで、Ruelle operator $\mathcal{L}_s$ を導入する。この作用素は空間$\mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+)$ の中の線形作用素で次で定義されるものである:

$$\mathcal{L}_s v(\xi) = \sum_{\sigma_A \eta = \xi} e^{\tilde{r}(\eta,s)} v(\eta) \quad \text{for} \quad v \in \mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+). \tag{3.9}$$

作用素 $\mathcal{L}_s$ に関連して、もう一つの作用素 $|\mathcal{L}_s|$ を

$$(|\mathcal{L}_s| v)(\xi) = \sum_{\sigma_A \eta = \xi} |e^{\tilde{r}(\eta,s)}| v(\eta) \quad \text{for } v \in \mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+) \tag{3.10}$$

で定義しよう。 Perron-Frobenius の定理はある $h \in \mathbf{R}$ が存在して、次が成り立っていることを保証している:

$$\begin{cases} \text{the spectrum of } \ |\mathcal{L}_h| \text{ is contained in} \{\lambda \in \mathbf{C};\ |\lambda| \le 1\}, \\ |\mathcal{L}_h| \ \text{ has 1 as an eigenvalue.} \end{cases} \tag{3.11}$$

さらに $|\mathcal{L}_h|$ は次のような分解をもつ:

$$|\mathcal{L}_h| = 1\mathcal{P} + \mathcal{S},$$

ここで

$$\mathcal{P} v(\xi) = w(\xi) \int_{\Sigma_A^+} v(\eta) d\mu(\eta)$$
$$\text{the spectral radius of } \mathcal{S} < 1,$$

であって、$w(\xi)$ は個有値 1 に対応した固有関数で、 $\mu(\xi)$ は Gibbs 測度で

$$\int_{\Sigma_A^+} w(\eta) d\mu(\eta) = 1$$

を満たしているものである。

この定数 h に関しては、次の事実がある:

$$\zeta(s) \text{ の絶対収束座標 } s_0 \text{は } h \text{ と一致する} \tag{3.12}$$

ゼータ関数の特異点と Ruelle 作用素とは深い関係があるが、次の事実を挙げておこう。これは、第 4 節における定理の証明に大切な役割を果たす。

事実

ある正の数 a、これは $\mathcal{O}$ より定まるのであるが、があって、$\Re > s_0 - a$ の範囲において、ゼータ関数 $\zeta(s)$ が極を $s = \sigma$ で持つ必要十分条件は、$\mathcal{L}_\sigma$ が個有値として 1 を持つことである。

3.3. $w(x, z)$ の表現

各 $\xi \in \Sigma_A^+$ に対して、以下の性質を持った点列 $\{Q_j(\xi)\}_{j=0}^\infty$ が存在して一意であることを注意しておこう。全ての $j = 0, 1, 2 \ldots$ に対して

$$Q_j(\xi) \in \Gamma_{\xi_j} \quad \text{and} \quad Q_{j+1}(\xi) = Q_j(\xi) + |Q_{j+1}(\xi) - Q_j(\xi)| \nabla \varphi_{\mathbf{i}}(Q_j(\xi)),$$

が成り立つ、ただし $\mathbf{i} = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_j)$ とおいた。すなわち、$\{Q_j(\xi)\}_{j=0}^{\infty}$ は Γ_1 上より $\nabla\varphi_{(1)}$ 方向に出る道で、順番に Γ_{ξ_1}, Γ_{ξ_2}, $\cdots$ の上で反射を繰り返してゆく折れ線である。

次のように置こう:

$$f_j^+(\xi) = |Q_{j+1}(\xi) - Q_j(\xi)| \quad \text{and} \quad g_j^+(\xi) = \frac{1}{2} \log \frac{G_{\mathbf{i}}(Q_{j+1}(\xi))}{G_{\mathbf{i}}(Q_j(\xi))}$$

ただし $G_{\mathbf{i}}(x)$ は曲面 $\mathcal{C}_{\mathbf{i}}(x) = \{y;\ \varphi_{\mathbf{i}}(y) = \varphi_{\mathbf{i}}(x)\}$ のガウス曲率を表すものとする。

$\xi_0 = 1$ を満たしている $\xi \in \Sigma_A^+$ に対して定義される関数 $\phi^+(\xi)$ を

$$\phi^+(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ s\left(f(\sigma_A{}^n e(\xi)) - f_n^+(\xi) \right) + g(\sigma_A{}^n e(\xi)) - g_n^+(\xi) \right\} \tag{3.13}$$

によって導入する。

$y \in$ convex hull of $\cup_{j=J}^{J} \mathcal{O}_j$ としよう。$\xi \in \Sigma_A$ にたいして Γ_{ξ_j} $(j = \dots, -2, -1, 0)$ 上で反射を順次行った後 y に到達するような折れ線が一意に存在する。i の折れ線の過去における反射点を $Q_{-j}^{(-)}(\xi; y)$, $j = 0, 1, 2, \dots$ と記すことにしよう。すると、線分 $Q_{-j}^{(-)}(\xi; y) Q_{-j+1}^{(-)}(\xi; y)$ の近傍で定義された相関数の列 $\psi_{\xi,-j}(x)$ で以下を満たすようなものが取れる:

$$\begin{cases} |\nabla\psi_{\xi,-j}(x)| = 1, & \\ \psi_{\xi,-j}(x) = \psi_{\xi,-j+1}(x) & \text{on} \quad \Gamma_{\xi_{-j}}. \end{cases}$$

次に

$$f_j^-(\xi; y) = |Q_{-j}^{(-)}(\xi; y) - Q_{-j+1}^{(-)}(\xi; y)| \quad \text{and} \quad g_j^-(\xi; y) = \frac{1}{2} \log \frac{G_{\xi,-j}(Q_{-j+1}^{(-)}(\xi; y))}{G_{\xi,-j}(Q_{-j}^{(-)}(\xi; y))}$$

とおこう、ただし$G_{\xi,-j}(x)$ は波面 $\{y;\ \psi_{\xi,-j}(y) = \psi_{\xi,-j}(x)\}$ の x におけるガウス曲率を表すものとする。$\xi \in \Sigma_A$ に対して $\phi^-(\xi, s)$ を

$$\phi^-(\xi; y, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ s\left(f(\sigma_A{}^{-n}\xi) - f_n^-(\xi; y) \right) + \left(g(\sigma_A{}^{-n}\xi) - g_n^-(\xi; y) \right) \right\}$$

によって定義しよう。

以上の準備のもとに、空間 $\mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+)$ での新しい作用素 $\mathcal{G}_s$ および $\mathcal{M}_{n,(y,s)}$ を次により定義しよう:

$$\mathcal{G}_s v(\xi) = \sum_{\sigma_A \eta = \xi,\ \eta_1 = 1} e^{\{\phi^+(\eta, s) + \chi(e(\eta), s) + \tilde{r}(\eta, s)\}} v(\eta), \tag{3.14}$$

そして

$$(\mathcal{M}_{n,(y,s)} v)(\xi) = \sum_{\sigma_A \eta = \xi} e^{\{\phi^-(\sigma_A^{n+1} e(\eta); y, s) - \chi(\sigma_A^{n+1} e(\eta), s) + \tilde{r}(\eta, s)\}} v(\eta). \tag{3.15}$$

さて $v_0(\xi) \in \mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+)$ を次の様にとる:

$$v_0(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \xi_0 = 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

各 $k \in \{1,2,\ldots,J\}$ にたいして, $\xi^{(k)} \in \Sigma_A^+$ を勝手に一つ選んで固定しよう。全ての $y \in$ convex hull of $\cup_{j=J}^J \mathcal{O}_j$ に対して、ある定数 $C>0$ が存在して

$$\begin{aligned} &|\sum_{k=1}^{J}\left(\mathcal{L}_s{}^n\mathcal{M}_{n,(y,s)}\,\mathcal{G}_s\,v_0\right)(\xi^{(k)}) - \sum_{|\mathbf{i}|=n+2} u_{\mathbf{i}}(y,-is)| \\ &\qquad\qquad \le |s|\,(\theta+ca)^{n+2} \qquad \text{for all } \Re s > s_0 - a, \end{aligned} \tag{3.16}$$

ここで c はある正の定数とする。

評価式 (3.16) は $\sum_{n=0}^{\infty}(\mathcal{L}_s{}^n\mathcal{M}_{n,s}\,\mathcal{G}_s\,v_0)$ が存在することが $w(x,-is)$ の存在を導き出すことを示している。なぜならば (3.16) が成り立っているならば

$$|\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{J}(\mathcal{L}_s{}^n\mathcal{M}_{n,s}\,\mathcal{G}_s\,v_0)\,(\xi^{(k)}) - w(x,-is)\,| \le C \quad \text{for all } \Re s \ge s_0 - a \tag{3.17}$$

となるからである。従って、$w(x,s)$ が絶対収束軸を越えて存在することを示すには $\sum_{n=0}^{\infty}(\mathcal{L}_s{}^n\mathcal{M}_{n,s}\,\mathcal{G}_s\,v_0)$ が $\Re s = s_0$ を越えて解析接続できることを示せばよいことが分かった。。

3.3. $\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}_s{}^n\mathcal{M}_{n,s}$ の表現

まず ϕ^- に関しては次が成り立つことを注意しておこう。

$$|\phi^-(\sigma_A{}^n\,e(\xi);y,s) - \phi^-(\sigma_A{}^{n-1}\,e(\sigma_A\xi);y,s)| \le c|s|\,\theta^{n-1}, \tag{3.18}$$

これより次の評価式が従う:

$$||\mathcal{L}_s{}^n\mathcal{M}_{n,(y,s)} - L_s{}^{n-1}\mathcal{M}_{n-1,(y,s)}\mathcal{L}_s||_\infty \le c|s|\,\theta^{n-1}. \tag{3.19}$$

よって、次の式の右辺は $\Re s > s_0 - a$ の範囲において絶対収束していることが従う:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(y,s)} = \ & \mathcal{M}_{0,(y,s)} + \left(\mathcal{L}_s\mathcal{M}_{1,(y,s)} - \mathcal{M}_{0,(y,s)}\mathcal{L}_s\right) + \left(\mathcal{L}_s{}^2\mathcal{M}_{2,(y,s)} - \mathcal{L}_s{}^1\mathcal{M}_{1,(y,s)}\mathcal{L}_s\right) \\ & + \cdots + \left(\mathcal{L}_s{}^n\mathcal{M}_{n,(y,s)} - \mathcal{L}_s{}^{n-1}\mathcal{M}_{n-1,(y,s)}\mathcal{L}_s\right) + \cdots \end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s{}^n\,\mathcal{M}_{n,(y,s)} &= \left(\mathcal{L}_s{}^n\mathcal{M}_{n,(y,s)} - \mathcal{L}_s{}^{n-1}\mathcal{M}_{n-1,(y,s)}\mathcal{L}_s\right) \\ &\quad + \left(\mathcal{L}_s{}^{n-1}\mathcal{M}_{n-1,(y,s)} - \mathcal{L}_s{}^{n-2}\mathcal{M}_{n-2,(y,s)}\mathcal{L}_s\right)L_s \\ &\quad + \cdots + \left(\mathcal{L}_s\mathcal{M}_{1,(y,s)} - \mathcal{M}_{0,(y,s)}\mathcal{L}_s\right)\mathcal{L}_s{}^{n-1} + \mathcal{M}_{0,(y,s)}\mathcal{L}_s{}^n \end{aligned}$$

と書き表せることに注意しておこう。もし $\Re s > s_0$ の範囲で考えるならば、$||\mathcal{L}_s||_\infty < 1$ であるから、上の評価式と関係式を併せ持ちいることにより、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}_s{}^n\,\mathcal{M}_{n,(y,s)} = \mathcal{R}_{(y,s)}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}_s{}^n \tag{3.20}$$

なる表現を得る。

さて、$\Re s > s_0 - a$ の範囲においては $\mathcal{L}_s$ は次のような分解を持つ:

$$\mathcal{L}_s = \sum_{\ell} \lambda_\ell(s)\, \mathcal{P}_\ell(s) + \mathcal{Q}(s), \tag{3.20}$$

ここで ℓ に関する和は有限個であり、

$$\text{the spectral radius of}\, \mathcal{Q}(s) \le 1 - \varepsilon_0 \quad (\varepsilon_0 > 0) \quad \text{for all } \Re\, s > s_0 - a. \tag{3.22}$$

が成り立っている。すると $\Re s > s_0 - \varepsilon$ の範囲においては

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_s{}^n = \frac{1}{1 - \lambda_\ell(s)} \mathcal{P}_\ell(s) + \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Q}(s)^n. \tag{3.23}$$

なる関係式が成り立つ。そして (3.23) の右辺は、$\Re s \ge s_0 - a$ において有理型関数となっている。従って、$\Re s > s_0 - a$ で成り立っている式 (3.17) より

$$\left| \sum_{k=1}^{J} \left(\left(\sum_{\ell} \frac{1}{1 - \lambda_\ell(s)} \mathcal{R}_{(y,s)} \mathcal{P}_\ell(s) + \mathcal{R}_{(y,s)} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Q}_s{}^n \right) v_0 \right) (\xi^{(k)}) - w(x, -is) \right| \le C.$$

この事実は

$$w(x^{(k)}, z) \text{can be continued meromorphically up to } \Im z \le -s_0 + a.$$

4. 定理の証明

convex hull of $\cup_{j=1}^{J} \mathcal{O}_j$ の内部では、(2.5) より

$$(-z^2 - \triangle) w(x, z) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} (-z^2 - \triangle) u_{\mathbf{i}}(x, z)$$

となり、$u_{\mathbf{i}}(x, z)$ の形とその作り方より、

$$(-z^2 - \triangle) u_{\mathbf{i}}(x, z) = \exp(-iz\varphi_{\mathbf{i}}(x))\, \triangle g_{\mathbf{i}}(x)$$

となる。従って

$$(-z^2 - \triangle) w(x, z) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \exp(-iz\varphi_{\mathbf{i}}(x))\, \triangle g_{\mathbf{i}}(x) \tag{4.1}$$

(4.1) の右辺は基本的に $w(x, z)$ の表現式と同じ形の無限和として表されているので、前節の議論をそのまま用いることが出来て、

$$\begin{aligned} \Bigg| \sum_{k=1}^{J} \left(\mathcal{T} \left(\sum_{\ell} \frac{1}{1 - \lambda_\ell(s)} \mathcal{R}_{(y,s)} \mathcal{P}_\ell(s) + \mathcal{R}_{(y,s)} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Q}_s{}^n \right) v_0 \right) (\xi^{(k)}) \\ - \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \exp(-iz\varphi_{\mathbf{i}}(x))\, \triangle g_{\mathbf{i}}(x) \Bigg| \le C \end{aligned} \tag{4.2}$$

ここで $\mathcal{T}$ は $\mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+)$ の中の有界連続作用素を表すものとする。

いま $s=\sigma$ において $\zeta(s)$ が極を持つとしよう。3.3 節に述べた事実より、ある ℓ があって、$\lambda_\ell(\sigma)=1$ が成り立っている。$s=\sigma$ の十分近くで考える。次の命題を認めよう:

命題 $\Im z \le -s_0 + a$ には独立な定数 $c_0 > 0$ と $0 < \varepsilon_0 < 1$ なる定数が存在して

$$||(\mathcal{R}_{(x,s)}\mathcal{P}_\ell(s)v_0)(\xi^{(k)})||_{L^2(\Omega)} \ge c_0|\Re z|^{-\varepsilon_0}$$

が成り立つ。

さて (4.2) より、$z=-i\sigma$ の十分近くでは、

$$||(-z^2-\triangle)w(\cdot,z)||_{L^2(\Omega)} \le C|(1-\lambda_\ell(z))^{-1}| \tag{4.3}$$

一方で、命題を用いると

$$||w(\cdot,z)||_{L^2(\Omega)} \ge c_\epsilon|(1-\lambda_\ell(z))^{-1}|\;|\Re z|^{1-\epsilon}+C_1 \tag{4.4}$$

が成り立っている。C_1 は z に独立な定数である。これらの不等式を (1.7) の両辺に代入すると、

$$c_0\frac{1}{|(1-\lambda_\ell(iz))|\;|\Re z|^{\epsilon_0}}+C_1 \le \frac{1}{s_0\,|\Re z|}\,\frac{C}{|(1-\lambda_\ell(iz))|} \tag{4.5}$$

が従う。この式ににおいて、現れている定数は $z \le -s_0 + a$ に独立であることより、もし $|\Re z|$ が十分に大きい場合には、z を $-i\sigma$ に近づけると矛盾が従う。

定理の仮定より、$\Im\sigma$ がいくらでも大きくなるような $\zeta(s)$ の極が存在することが保証されているから、定理が導けたことになる。

命題の証明が残っているが、これは $\mathcal{R}_{(x,s)}$ の具体的な形を用いる。証明が長くなるので、省略することにする。

References

1. R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov differomorphism,* S. L. M., 470, Springer-Verlag, Berlin (1975)

2. N. Haydn, *Meromorphic extension of the zeta function for Axiom A flows,* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **10**(1990), 347–360.

3. M. Ikawa, *Decay of solutions of the wave equation in the exterior of several convex bodies,* Ann. Inst. Fourier, **38**(1988), 113–146.

4. M. Ikawa, *On the existence of poles of the scattering matrix for several convex bodies,* Proc. Japan Acad. **64**(1988), 91–93.

5. M. Ikawa, *Singular perturbation of symbolic flows and poles of the zeta functions,* Osaka J. Math. **27**(1990), 281–300.

6. M. Ikawa, *On zeta function and scattering poles for several convex bodies,* Journées "Equations aux dérivées partielles" de Saint Jean de Monts (1994), II.

7. P. D. Lax and R. S. Phillips, Scattering theory. Revised edition, Academic Press, New York, 1989

8. W. Parry and M. Pollicott, *An analogue of the prime number theorem for closed orbits of Axiom A flows,* Ann. Math. **118**(1983), 537-591.

9. M. Pollicott *Meromorphic extension of generalized zeta function,* Invent. Math. **85**(1986), 147–164.