数理解析研究所講究録
1056 巻 1998 年 29-39

Frobenius method for Fuchsian partial differential equations

岐阜大学 工学部 応用情報学科　萬代 武史 (Takeshi MANDAI)

Abstract: My talk is concerned with the construction of and the structure of all the solutions of homogeneous Fuchsian partial differential equations in the sense of Baouendi-Goulaouic([1]). Especially, we construct solutions, without any assumptions on the characteristic exponents, along the same line as the classical method of Frobenius to ordinary differential equations. Similar arguments can be applied to Fuchsian hyperbolic equations considered by H.Tahara([4], etc.).

1 序

1 次元の複素領域 $\Delta_T := \{ t \in \boldsymbol{C} \mid |t| < T \}$ $(T > 0)$ 上で，$t = 0$ で確定特異点を持つ次の常微分作用素を考える．

$$P = P(t, D_t) = t^m D_t^m + a_1(t) t^{m-1} D_t^{m-1} + \cdots + a_m(t) \ , \qquad m \geq 1, \quad a_j \in \mathcal{O}(\Delta_T), \tag{1.1}$$

ここで，$D_t := \dfrac{d}{dt}$ であり，$\mathcal{O}(\Omega)$ は Ω 上の正則関数全体のなす空間である．

$$\mathcal{C}(\lambda) = \mathcal{C}[P](\lambda) := (\lambda)_m + a_1(0)(\lambda)_{m-1} + \cdots + a_m(0) = t^{-\lambda} P(t^\lambda)|_{t=0}$$

なる λ の多項式は，P の**指数多項式** (indicial polynomial) と呼ばれる．但し，$(\lambda)_k := \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-k+1)$．また，$\mathcal{C}(\lambda) = 0$ の根は，P の**特性指数** (characteristic exponent, characteristic index) と呼ばれる．$\vartheta := tD_t$ とおくと，$(\vartheta)_k = t^k D_t^k$ であり，$\mathcal{C}(\vartheta) = t^m D_t^m + a_1(0) t^{m-1} D_t^{m-1} + \cdots + a_m(0)$ となる．

まず，特性指数 $\{\lambda_l\}_{l=1}^m$ が**整数差を持たない場合**を考えよう．(重複している特性指数は差が 0 と考えるので，特に，特性指数はすべて重複度が 1 ということも仮定している．) この場合には，$S_{\infty,T} := \widetilde{\Delta_T \setminus \{0\}}$($\Delta_T \setminus \{0\}$ の普遍被覆 (universal covering)) で正則な $Pu = 0$ の解はすべて，$u(t) = \sum_{l=1}^{m} t^{\lambda_l} \sum_{j=0}^{\infty} u_{l,j} t^j$ と表される．さらに，各 l に対して $u_{l,0}$ を任意に与えると，$u_{l,j}$ $(j \geq 1)$ が

$$\mathcal{C}(\lambda_l + j) \times u_{l,j} = [\text{ Terms determined by } u_{l,0}, \ldots, u_{l,j-1}] \tag{1.2}$$

の形の式で帰納的に一意に決まる．右辺を $\mathcal{C}(\lambda_l + j) \neq 0$ で割れば良いだけである．特に，$\{ t^{\lambda_l} + \sum_{j=1}^{\infty} u_{l,j} t^{\lambda_l + j} \mid l = 1, \ldots, m \}$ の形の $\mathrm{Ker}_{\mathcal{O}(S_{\infty,T})} P := \{ u \in \mathcal{O}(S_{\infty,T}) \mid Pu = 0 \}$ の基底が取れる．言い換えると，

$$\boldsymbol{C}^m \ni (u_{l,0})_{l=1}^m \xrightarrow{\sim} u(t) \in \mathrm{Ker}_{\mathcal{O}(S_{\infty,T})} P$$

は線型空間としての同型写像になる．

次に，特性指数が**整数差を持つ場合**を考えよう．この場合には，一般に $\log t$ を含む解が現れる．すなわち，解は $u = \sum_{l=1}^{d} t^{\mu_l} \sum_{j=0}^{\infty} u_{l,j}(t) t^j$ の形に書ける．但し，$u_{l,j}(t) = \sum_{k=0}^{r_{l,j}} u_{l,j,k} (\log t)^k$ は $(\log t)$ の多項式で，$\{ \mu_1, \ldots, \mu_d \}$ は相異なる特性指数のすべてである．(もし，重複度が 2 以上の特性指数があれば，必ず $\log t$ を含む解が現れるが，そうでないときは，すべての解が $\log t$ を含まないこともありうる．) $r_{l,0}$ を [μ_l の重複度]-1 ととり，各 l に対して $u_{l,0}(t)$ を任意に与えて，$u_{l,j}(t)$ $(j \geq 1)$ を帰納的に決めていくこともできるが，もっと簡単な**フロベニウス** (Frobenius) **の方法**と呼ばれる方法がある．これについては，後でもう少し詳しく述べるが，この場合にも，

$$\boldsymbol{C}^m \ni (u_{l,0,k})_{0 \leq k \leq r_{l,0}; 1 \leq l \leq d} \xrightarrow{\sim} u(t) \in \mathrm{Ker}_{\mathcal{O}(S_{\infty,T})} P$$

は同型写像になる．

さて，偏微分方程式のときはどうなるだろうか？ $t \in \boldsymbol{C}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{C}^n$ とし，Baouendi-Goulaouic ([1]) の意味の，重み (weight) 0 のフックス型 (Fuchsian) 偏微分作用素を考える．すなわち，

$$\begin{aligned} P = P(t, x, D_t, D_x) &= t^m D_t^m \\ &\quad + P_1(t, x, D_x) t^{m-1} D_t^{m-1} + \cdots + P_m(t, x, D_x). \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$P_j(t,x,D_x) \text{ は } x \text{ についての } j \text{ 次以下の線型偏微分作用素} \quad (1 \le j \le m)$$
$$\mathrm{ord}_{D_x} P_j(0,x,D_x) \le 0 \quad (1 \le j \le m)$$

の形の微分作用素である．係数は $(t,x)=(0,0)$ の近傍で正則と仮定する．([2] では，"*an operator which has regular singularity in a weak sense along* $\Sigma_0 := \{\, t=0 \,\}$" と呼ばれている作用素である (Definition 4.2).)

$a_j(x) := P_j(0,x,D_x)$ とおき，

$$\mathcal{C}(x;\lambda) = \mathcal{C}[P](x;\lambda) := (\lambda)_m + a_1(x)(\lambda)_{m-1} + \cdots + a_m(x) = t^{-\lambda} P(t^\lambda)|_{t=0}$$

をやはり P の**指数多項式**と呼ぶ．また，$\mathcal{C}(x;\lambda)=0$ の根 $\lambda=\lambda(x)$ を**特性指数**と呼ぶ．特性指数 $\lambda(x)$ が x について正則に取れるとは限らず，これがフックス型偏微分方程式の研究において，今まで 1 つの障害となっていたことを強調しておきたい．

ここで，

$$\Omega_R := \{\, x \in \boldsymbol{C}^n \mid |x| < R \,\} \ ,$$
$$\mathcal{O}_0 := \operatorname*{indlim}_{R>0} \mathcal{O}(\Omega_R) \ ,$$
$$\widetilde{\mathcal{O}} := \operatorname*{indlim}_{T>0,R>0} \mathcal{O}(S_{\infty,T} \times \Omega_R) \ .$$

とおく．

$x=0$ における特性指数 $\{\, \lambda_l(0) \,\}_{l=1}^m$ が**整数差を持たない場合**には，$\lambda_l(x)$ を $x=0$ の近傍での正則関数としてとることができ，$Pu=0$ の $u \in \widetilde{\mathcal{O}}$ なる解はすべて

$$u(t,x) = \sum_{l=1}^{m} t^{\lambda_l(x)} \sum_{j=0}^{\infty} t^j u_{l,j}(t,x), \tag{1.4}$$

$$u_{l,j}(t,x) = \sum_{k=0}^{r_{l,j}} u_{l,j,k}(x)(\log t)^k \quad (u_{l,j,k} \in \mathcal{O}_0) \tag{1.5}$$

の形に表される．(常微分の時と違って，整数差を持たない場合でも一般に $\log t$ が現れる.)　さらに，$r_{l,0}=0$ $(l=1,\ldots,m)$ であり，$u_{l,0}(t,x)=u_{l,0,0}(x) \in \mathcal{O}_0$ を任意に与えて，$u_{l,j}$ $(j \ge 1)$ が一意的に決まる．

特性指数が**整数差を持つ場合**には，解は一般にもっと複雑であり，その理由の1つはもちろん，正則な特性指数をとることができないことである．たとえば，$\mathcal{C}(x;\lambda)=\lambda^2-x$ の場合には，$t^{\sqrt{x}}+t^{-\sqrt{x}}$ や $\dfrac{t^{\sqrt{x}}-t^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ 及びこれらの微分が必要になる．また，正則な特性指数が取れる場合でも，整数差を持てば，差分商やその微分が必要になってくる．たとえば，$\mathcal{C}(x;\lambda)=(\lambda-x)(\lambda-1+x)$ の場合，$\dfrac{t^{x}-t^{-x}}{x}$ やその微分が必要である．一般には，“（高次の）差分商の対称化” が必要になってくる．

当初，この差分商の対称化やその微分を直接的に扱っていたが，筑波大学の若林氏から，差分商をコーシー積分で書くと簡単になるというアドバイスをうけ，議論を簡単にすることができた．さらに，この議論を良く見ると，解の構成が常微分方程式の場合の古典的なフロベニウスの方法と本質的に同様にやれることが分かった．

例 1　$x=0$ の近傍で考える．Γ を $\pm\sqrt{x}$ を囲む単純閉曲線とすると，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{a\lambda+b}{\lambda^2-x}t^\lambda\,d\lambda = a\frac{t^{\sqrt{x}}+t^{-\sqrt{x}}}{2}+b\frac{t^{\sqrt{x}}-t^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

となる．a,b が x に依らないなら，この式を x で微分すると，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{a\lambda+b}{(\lambda^2-x)^2}t^\lambda\,d\lambda$$

となり簡単に表せる．

この講演の目標は，古典的なフロベニウスの方法をフックス型偏微分方程式にも使える形に修正し，特性指数に制限なく，解を構成することである．同様の議論は，田原氏のフックス双曲型方程式 ([4], [5], etc.) にも使える．

2　常微分方程式に対するフロベニウスの方法

(1.1) の常微分作用素 P を考える．特性指数 λ_0 を1つ固定する．$0=k_0<k_1<\cdots<k_q$ を λ_0+k がまた特性指数となるような非負整数 k のすべてとする．r_l を λ_0+k_l の重複度とし，$R:=\sum_{l=0}^q r_l$ とおく．特性指数が整数差を持たない場合には，常に，$q=0, r_0=1, R=1$ である．

$N \in \boldsymbol{N}$ を $N \geq k_q$ととり，$\lambda \in \boldsymbol{C}$ を λ_0 の近くを動く正則パラメータと見て，

$$P(U) = \Big(\prod_{\nu=0}^{N} \mathcal{C}(\lambda+\nu)\Big) t^\lambda =: A(\lambda) t^\lambda \ . \tag{2.1}$$

なる方程式を解く．右辺にある $A(\lambda)$ は λ_0 を R 重根に持っていることが重要である．

右辺に $\mathcal{C}$ があることがきいて，(1.2) で $u_{l,j}$ を決めていくことができ，

$$U = U(\lambda; t) = \widetilde{U}(\lambda; t) t^\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(\lambda) t^{\lambda+j} \ , \tag{2.2}$$

$$U_j \text{ は } j \text{ に依らない } \lambda_0 \text{ の近傍で正則} \tag{2.3}$$

の形の解が得られる．ここで，$U_0(\lambda) = \prod_{\nu=1}^{N} \mathcal{C}(\lambda+\nu)$ は $\lambda = \lambda_0$ を $(R - r_0)$ 重根に持っており，$\widetilde{U}$ は λ_0 のある近傍 D とある $T > 0$ に対して，$D \times \Delta_T$ で収束している．

この U について，λ_0 は $A(\lambda)$ の R 重根であり，$U_0^{(R-r_0)}(\lambda_0) \neq 0$ であるので，$(\partial_\lambda^l U)(\lambda_0; t)$ $(l = R - r_0, \ldots, R-1)$ は $a_l t^{\lambda_0} (\log t)^{l-R+r_0}$ $(a_l \neq 0)$ から始まる展開を持つ $Pu = 0$ の独立な解となる．これらの解を各特性指数 λ_0 について作れば，m 個の独立な解が得られ，解空間の基底となる．

このアイデアをそのままフックス型偏微分作用素に適用しようとすると，次の様な困難に出会う．

(1) 特性指数 $\lambda_0(x)$ は x について正則に取れるとは限らない．

(2) 上では，“λ で微分して，$\lambda = \lambda_0$ を代入する’ という作用素と P とが可換であるので，$u = (\partial_\lambda^l U)(\lambda_0; t)$ が $Pu = 0$ の解となったが，特性指数が x に依存し，P が x に関する微分を含むと，これらは可換でなくなる．

(もし特性指数がすべて x に依らないなら，上のやり方はそのままフックス型偏微分作用素に適用できる.)

3 フロベニウス法の修正

前節の方法を偏微分方程式でも通用する形に修正したい．アイデアは極めて単純である．

$P(U) = A(\lambda)t^\lambda$ の解 U を使って，$u = (\partial_\lambda^l U)(\lambda_0; t)$ $(l = R - r_0, \ldots, R-1)$ なる解を作ったわけだが，λ_0 を囲む十分小さな単純閉曲線 Γ をとると，

$$(\partial_\lambda^l U)(\lambda_0; t) = l! \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{U(\lambda; t)}{(\lambda - \lambda_0)^{l+1}} d\lambda \tag{3.1}$$

と表せる．

$$V(\lambda; t) := l! \frac{U(\lambda; t)}{(\lambda - \lambda_0)^{l+1}} \tag{3.2}$$

とおくと，V は $P(V) = l! \dfrac{A(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{l+1}} t^\lambda$ の解である．右辺は $\lambda = \lambda_0$ の近くで正則なので，積分すると 0 となり，一方 $V = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} V_j(\lambda) t^{\lambda+j}$ の初項 $V_0(\lambda)t^\lambda = l! \dfrac{U_0(\lambda)t^\lambda}{(\lambda - \lambda_0)^{l+1}}$ は $\lambda = \lambda_0$ を $(l + 1 - R + r_0)$ 位の極に持っていて，積分して 0 でない解が出てくる．

まとめると次のようになる．

定理 2 任意の多項式 $F(\lambda)$ に対して，$V[F](\lambda; t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} V_j[F](\lambda) t^{\lambda+j}$ を $P(V) = F(\lambda)t^\lambda$ の解とする．このとき，

$$u[\lambda_0, F](t) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma V[F](\lambda; t)\, d\lambda \tag{3.3}$$

は $Pu = 0$ の解である．特に，$u[\lambda_0]_p := u[\lambda_0, (\lambda - \lambda_0)^p]$ $(p = 0, \ldots, r_0 - 1)$ とおくと，$\displaystyle\bigcup_{\lambda_0 : \mathcal{C}(\lambda_0) = 0} \{\, u[\lambda_0]_p \mid p = 0, \ldots, r_0 - 1 \}$ は，解空間 $\mathrm{Ker}_{\mathcal{O}(S_{\infty,T})} P$ の基底となる．

フロベニウスの方法をこの形に捉えると，次節で見るように，フックス型偏微分方程式に対しても使うことができる．

4 フックス型偏微分方程式に対するフロベニウスの方法

λ_l $(l = 1, \ldots, d)$ を $\mathcal{C}(0; \lambda) = 0$ の相異なる根のすべてとし，r_l を λ_l の重複度とする．$\epsilon \geq 0$ を $\mathrm{Re}\,\lambda_l - \epsilon \notin \boldsymbol{Z}$ $(\forall l)$ となるようにとる．また，$L_l \in \boldsymbol{Z}$ を

$L_l+\epsilon<\mathrm{Re}\,\lambda_l<L_l+\epsilon+1$. となるようにとる.

補題 3　$1\le l\le d$ に対して，ある単純閉曲線 Γ_l で囲まれた $\boldsymbol{C}$ 内の領域 D_l と $\boldsymbol{C}^n$ の領域 Ω，及び Ω で正則な係数を持つモニックな多項式 $E_l(x;\lambda)\in\mathcal{O}(\Omega)[\lambda]$ $(1\le l\le d)$ を次の条件を満たすようにとることができる.

(a)　$\lambda_l\in D_l\ \ (1\le l\le d),\quad 0\in\Omega,$

(b)　$\overline{D_l}\cap\overline{D_{l'}}=\emptyset\ \ (\,l\neq l'\,)$,

(c)　すべての l に対して，$\overline{D_l}\cap\{\,\lambda_{l'}-j\in\boldsymbol{C}\mid 1\le l'\le d, j\in\boldsymbol{N}\,\}=\{\,\lambda_l\,\}$.
　($\{\,\lambda_{l'}-j\in\boldsymbol{C}\mid 1\le l'\le d, j\in\boldsymbol{N}\,\}$ は離散集合である.)

(d)　すべての l に対して，$\overline{D_l}\subset\{\,\lambda\in\boldsymbol{C}\mid L_l+\epsilon<\mathrm{Re}\,\lambda<L_l+\epsilon+1\,\}$.

(e)　$\mathcal{C}(x;\lambda)=\prod_{l=1}^{d}E_l(x;\lambda)$, かつ $E_l(0;\lambda)=(\lambda-\lambda_l)^{r_l}\ (1\le l\le d)$.

(f)　すべての l に対して，“$E_l(x;\lambda)=0,\ x\in\Omega\implies\lambda\in D_l$”.

(g)　すべての $x\in\Omega,\ \lambda\in\bigcup_{l=1}^{d}\Gamma_l,\ j\in\boldsymbol{N}$ に対して，$\mathcal{C}(x;\lambda+j)\neq 0$.

定理 4　Ω の任意の部分領域 Ω' と任意の $F\in\mathcal{O}(\Omega')[\lambda]$ に対して，

$$P(V)=F(x;\lambda)t^{\lambda}\tag{4.1}$$

の解 $V(t,x;\lambda)=V[F](t,x;\lambda)=t^{\lambda}\widetilde{V}[F](t,x;\lambda)=t^{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}V_j(x;\lambda)t^j$ が存在する．ここで，任意の $\Omega''\Subset\Omega'$ に対して，ある $T''>0$ が存在して，$\widetilde{V}\in\mathcal{O}(\Delta_{T''}\times\Omega''\times(\bigcup_{l=1}^{d}\Gamma_l))$ となる．このとき，$1\le l\le d$ に対して，

$$u[l,F](t,x):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_l}V[F](t,x;\lambda)\,d\lambda\ (\in\mathcal{O}(S_{\infty,T''}\times\Omega''))\tag{4.2}$$

は $Pu=0$ の解であり，すべての l,F を考えると，$\widetilde{\mathcal{O}}$ に属する $Pu=0$ の解がすべて出てくる.

さらに，適当な F をとると，$(\mathcal{O}_0)^m \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}_{\tilde{\mathcal{O}}} P$ が示せる．すなわち，$\mathcal{C}(x;\lambda) = E_l(x;\lambda)R_l(x;\lambda)$ として，$F_{l,p}(x;\lambda) := \partial_\lambda^p E_l(x;\lambda)\cdot R_l(x;\lambda)$ とおき，$u_{l,p}[\varphi] := u[l,\varphi F_{l,p}]$ $(\varphi \in \mathcal{O}_0)$ とおくと，

$$(\mathcal{O}_0)^m \ni (\varphi_{l,p})_{1\le l\le d;1\le p\le r_l} \xrightarrow{\sim} \sum_{1\le l\le d;1\le p\le r_l} u_{l,p}[\varphi_{l,p}] \in \mathrm{Ker}_{\tilde{\mathcal{O}}} P \tag{4.3}$$

は同型写像となる．

もちろん，$(\mathcal{O}_0)^m$ から $\mathrm{Ker}_{\tilde{\mathcal{O}}} P$ への同型写像は，他の取り方もできるが，上のように決めると，$u_{l,p}[\varphi]$ の展開の初項は，$\varphi(x)w_{l,p}(t,x)$ の形をしていて，

$$w_{l,p}(t,x) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_l} \frac{\partial_\lambda^p E_l(x;\lambda)}{E_l(x;\lambda)} t^\lambda\, d\lambda \ \in \mathrm{Ker}_{\tilde{\mathcal{O}}}\, \mathcal{C}(x;\vartheta)$$

である．この $\{\, w_{l,p}(\cdot,x) \mid 1 \le p \le r_l \,\}$ は x をとめる毎に $\mathrm{Ker}_{\mathcal{O}(S_{\infty,T})}\, E_l(x;\vartheta)$ の基底であるが，x について正則となる基底のうちで，多分最も単純な基底の 1 つであろう．たとえば，$x = 0$ では，

$$w_{l,p}(t,0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_l} \frac{(r_l)_p}{(\lambda-\lambda_l)^p} t^\lambda\, d\lambda = (r_l)_p \frac{1}{(p-1)!} t^{\lambda_l}(\log t)^{p-1}$$

となっている．

注意 5　ここで述べた作り方ですべての解が得られることの証明は，そう簡単ではない．常微分方程式の時は，解空間が有限次元で，しかも一般論から m 次元である事が分かっているので，1 次独立性からすぐに分かったが，偏微分の時はそうは行かない．

5　すべての解が出てくることについて

この節では，上で述べた作り方ですべての解が出てくること，すなわち，(4.3) が $\mathrm{Ker}_{\tilde{\mathcal{O}}} P$ の上への写像であること，の証明の概略を述べる．(1 対 1 であることも決してトリビアルではないが，省略する．) 基本的には，田原氏の [5] における議論を真似る．

$\widetilde{V}$ の展開に応じて，$u_{l,p}[\varphi] =: \sum_{j=0}^{\infty} u_{l,p,j}[\varphi] = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{u}_{l,p,j}[\varphi]t^j$ と展開する．$\tilde{u}_{l,p,j}[\varphi] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_l} V_j(x;\lambda)t^\lambda\, d\lambda$，$w_{l,p} = u_{l,p,0}[1] = \tilde{u}_{l,p,0}[1]$ となっている．

$\epsilon \geq 0$ を "$\mathcal{C}(x;\lambda) = 0 \ (x \in \Omega) \implies \operatorname{Re}\lambda - \epsilon \notin \boldsymbol{Z}$" となるように取ってあったことに注意して，次の定義をする．

定義 6　$\theta > 0, T > 0$ とフレシェ空間 X に対して，

$$S_{\theta,T} := \{ t \in S_{\infty,T} \mid |\arg t| < \theta \} \ ,$$

$$W[\theta](T;X) := \{ \phi \in \mathcal{O}(S_{\theta,T};X) \mid \text{すべての } 0 < \theta' < \theta, l \in \boldsymbol{N} \text{ に対して，} \\ (\vartheta^l \phi)(t) \to 0 \text{ in } X(\text{ as } t \to 0 \text{ in } S_{\theta',T}) \}$$

とおく．$L \in \boldsymbol{Z}$ に対して，

$$W_{\theta,T}^{(L)}(X) := t^{L+\epsilon} \times W[\theta](T;X)$$

とおく．

証明で使う事柄をまとめると，次の命題となる．

命題 7　Ω' を Ω の部分領域とし，$\theta, T > 0$ とする．

(1) ある $L \in \boldsymbol{Z}$ があって，$\operatorname{Ker}_{\mathcal{O}(S_{\theta,T})\times\Omega'} P \subset W_{\theta,T}^{(L)}(\mathcal{O}(\Omega'))$.

(2)

$$W_{\theta,T}^{(L)}(\mathcal{O}(\Omega')) \subset W_{\theta,T}^{(L-1)}(\mathcal{O}(\Omega')),$$
$$t \times W_{\theta,T}^{(L)}(\mathcal{O}(\Omega')) \subset W_{\theta,T}^{(L+1)}(\mathcal{O}(\Omega')),$$
$$\partial_t(W_{\theta,T}^{(L)}(\mathcal{O}(\Omega'))) \subset W_{\theta,T}^{(L-1)}(\mathcal{O}(\Omega')).$$

$B(x;D_x)$ を $\mathcal{O}(\Omega')$ に属する係数を持つ x の線型微分作用素とすると，

$$B(x;D_x)(W_{\theta,T}^{(L)}(\mathcal{O}(\Omega'))) \subset W_{\theta,T}^{(L)}(\mathcal{O}(\Omega')).$$

(3) 十分大きな L に対して，$\operatorname{Ker}_{\mathcal{O}(S_{\theta,T}\times\Omega')} P \cap W_{\theta,T}^{(L)}(\mathcal{O}(\Omega')) = \{0\}$.

(4) 任意の $g \in W_{\theta,T}^{(L)}(\mathcal{O}(\Omega'))$ に対して，$\mathcal{C}(x;\vartheta)v = g$ の解 $v \in W_{\theta,T}^{(L)}(\mathcal{O}(\Omega'))$ が存在する．(このことが成立するために，$W_{\theta,T}^{(L)}(\mathcal{O}(\Omega))$ の定義で，ϵ だけずらしておく必要があった.)

(5) $w_{l,p} \in W_{\theta,T}^{(L_l)}(\mathcal{O}(\Omega'))$.　($L_l \in \boldsymbol{Z}$ は "$E_l(x;\lambda) = 0 \implies L_l + \epsilon < \operatorname{Re}\lambda < L_l + 1 + \epsilon$"

を満たすようにとっていた.) さらに, 任意の $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega' \times \Gamma_l)$ に対して, $u_{l,p,j}[\varphi] \in W_{\theta,T}^{(L_l+j)}(\mathcal{O}(\Omega'))$.

(6) $u \in W_{\theta,T}^{(L)}(\mathcal{O}(\Omega'))$ かつ $\mathcal{C}(x;\vartheta)u = 0$ とすると, ある $\varphi_{l,p} \in \mathcal{O}(\Omega')$ $(1 \leq l \leq d, L_l \geq L, 1 \leq p \leq r_l)$ があって, $u = \sum_{1\leq l\leq d; L_l \geq L; 1\leq p\leq r_l} \varphi_{l,p}(x) w_{l,p}(t,x)$.

(1) の証明は, 田原氏 (上智大学) に教えて頂いた (personal communication). これはまた, 大内氏 (上智大学) の最新の結果 ([3]) からも出てくる.

以上のことを認めると, (4.3) が全射であることを次のようにして示せる.

[証明] $u \in \mathcal{O}(S_{\theta,T} \times \Omega')$, $Pu = 0$ と仮定する. (1) によって, ある $L \in \boldsymbol{Z}$ があって $u \in W_{\theta,T}^{(L)}(\mathcal{O}(\Omega'))$ となる. $R := P - \mathcal{C}(x;\vartheta)$ とおくと, (2) によって $Ru \in W_{\theta,T}^{(L+1)}(\mathcal{O}(\Omega'))$ となる. (4) により, ある $v \in W_{\theta,T}^{(L+1)}(\mathcal{O}(\Omega'))$ があって $\mathcal{C}(x;\vartheta)v = -Ru$ となるので, $u - v \in \mathrm{Ker}_{\mathcal{O}(S_{\theta,T}\times\Omega')}\mathcal{C}(x;\vartheta)$ となる. $u - v \in W_{\theta,T}^{(L)}(\mathcal{O}(\Omega'))$ であるから, (6) によってある $\varphi_{l,p}[0] \in \mathcal{O}(\Omega')$ $(1 \leq l \leq d, L_l \geq L, 1 \leq p \leq r_l)$ があって

$$u - v = \sum_{1\leq l\leq d,\ L_l\geq L,\ 1\leq p\leq r_l} \varphi_{l,p}[0] w_{l,p}$$

となる. $u[1] := u - \sum_{1\leq l\leq d,\ L_l\geq L,\ 1\leq p\leq r_l} u_{l,p}[\varphi_{l,p}[0]]$ とおくと, $P(u[1]) = 0$ であり, さらに Ω' を小さく取り直すと $u[1] \in W_{\theta,T}^{(L+1)}(\mathcal{O}(\Omega'))$ となることが (5) を使って示せる.

同様にして, Ω' と T を小さく取り直すと, ある $\varphi_{l,p}[1] \in \mathcal{O}(\Omega')$ があって $u[2] := u[1] - \sum_{l,p} u_{l,p}[\varphi_{l,p}[1]] \in \mathrm{Ker}_{\mathcal{O}(S_{\theta,T}\times\Omega')} P \cap W_{\theta,T}^{(L+2)}(\mathcal{O}(\Omega'))$ となる. これを繰り返して, $u[N] \in \mathrm{Ker}_{\mathcal{O}(S_{\theta,T}\times\Omega')} P \cap W_{\theta,T}^{(L+N)}(\mathcal{O}(\Omega'))$ で $u[N] = u - \sum_{l,p} u_{l,p}[\varphi_{l,p}]$ ($\varphi_{l,p} \in \mathcal{O}(\Omega')$) と書けるものが得られる.

(3) によって, 十分大きな N に対して $u[N] = 0$ となり, したがって u が $u = \sum_{l,p} u_{l,p}[\varphi_{l,p}]$ ($\varphi_{l,p} \in \mathcal{O}_0$) と書ける. ∎

謝辞： 貴重なアドバイス等を下さった田原秀敏先生 (上智大学) 及び若林誠一郎先生 (筑波大学) に感謝します.

参考文献

[1] M. S. Baouendi and C. Goulaouic, *Cauchy problems with characteristic initial hypersurface*, Comm. Pure Appl. Math. **26** (1973), 455–475.

[2] M. Kashiwara and T. Oshima, *Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems*, Ann. of Math. (2) **106** (1977), 145–200.

[3] S. Ōuchi, *Growth property and slowly increasing behavior of singular solutions of linear partial differential equations in the complex domain*, to appear.

[4] H. Tahara, *Fuchsian type equations and Fuchsian hyperbolic equations*, Japan. J. Math. (N.S.) **5** (1979), 245–347.

[5] ———, *Singular hyperbolic systems, V. asymptotic expansions for Fuchsian hyperbolic partial differential equations*, J. Math. Soc. Japan **36** (1984), 449–473.