数理解析研究所講究録
1058巻 1998年 142-148

Extremal Kobayashi disks for ellipsoidal domains

Sidney M. Webster
University of Chicago

$D \subset\subset \mathbf{C}^n$ を強凸な有界領域とする. 境界 $\partial D = M$ は $\mathbf{C}^n$ 内の実超曲面であり, 以下 C^ω 級 (あるいは C^∞ 級) であると仮定する. 極値的小林円板 (extremal Kobayashi disk, 以下, 小林円板と略記する) は, $z \in D$ と接空間 $T_z\mathbf{C}^n$ 内の直線[1] l を固定したとき, 単位円板 Δ から D への正則写像 $K : \Delta \to D$ で, $K(0) = z$, $K'(0)$ が l に接する, という条件をみたすもののうち, 長さ $|K'(0)|$ を最大化するものとして定義される. 簡単のため, 像 $K(D)$ も K で表す.

$\mathbf{C}^n \times \mathbf{P}^*_{n-1}$ は $\mathbf{C}^n$ に接する超平面のなす空間であり, 複素次元 $2n-1$ の複素多様体である. M の 正則接空間 の全体 $\widetilde{M} = \{(z, H_zM) : z \in M\}$ は, $\mathbf{C}^n \times \mathbf{P}^*_{n-1}$ の totally real な実部分多様体をなし, その実次元は $2n-1$ である. Lempert [1] により, 次のことが示されている:

1. K は Δ の境界 $\partial\Delta$ まで滑らかに延び, ∂K は M に含まれる.

2. K のリフト $L : \overline{\Delta} \to \overline{D} \times \mathbf{P}^*_{n-1}$ で, Δ において正則, かつ $\partial L \subset \widetilde{M}$ となるものが存在する. すなわち, L は $z \in \Delta$ に $T_{K(z)}\mathbf{C}^n$ の超平面を正則に対応させ, ∂K においては M の正則接空間に一致する写像である. L を K に随伴する Lempert 円板とよぶ.

2. の性質をもつ正則曲線 K のことを, Lempert に従って, 領域 D の停留曲線 (stationary curve) とよぶ. $M = \partial D$ が実解析的な場合には, reflection により L を局所的に延長できる. 何故なら, このとき $\widetilde{M}$ も実解析的で, しかも totally real かつ $\dim_{\mathbf{R}} \widetilde{M} = \dim_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^n \times \mathbf{P}^*_{n-1})$ であるから. よって, 小林円板 K も ∂D をこえて少し延長されることになる.

さて, 我々の目標は, 可能な場合に, 小林円板の大域的解析接続およびそのパラメーター表示を具体的に求めることである. 球体 B^n の場合, $\partial B^n = S^{2n-1}$ で, 大域的な一価の reflection が可能である. よって, 小林円板をとり, 一回 reflect すると, 外側に円板が得られる. これら二つの円板は, S^{2n-1} 上でつながって有理曲線を与え

[1] 直線, 超平面... 等は, 断らない限り $\mathbf{C}$ 上考えるものとする.

る．もちろん我々は, この場合にすべての小林円板を知っており, それらはすべて線型 (直線による B^n の切り口) である．reflection により, 最も単純な有理曲線である直線が得られる．

この講演の主題である楕円体 (ellipsoid) の場合に移ろう．M の定義関数は, 次のような形のものであるとしてよい:

$$r(z,\overline{z}) = z\cdot\overline{z} + Az\cdot z + A\,\overline{z}\cdot\overline{z} - 1.$$

ここで,

$$Az\cdot z = \sum_{j=1}^{n} A_j z_j z_j, \quad 0 \le A_1 \le \cdots \le A_n < \frac{1}{2}$$

である．$A = 0$ ならば, D は球体で, このときすべての小林円板は線型であった．$A \neq 0$ の場合, 状況ははるかに複雑であるが, いくつかの線型円板は生き残る．たとえば,

1. 座標軸による楕円体の切り口．
2. 各 $z \in D$ に対して, 複素錐 $\{v \in T_z\mathbf{C}^n : Av\cdot v = 0\}$ の母線は, 楕円体を線型円板において cut する．Lempert の理論の簡単な応用として, この場合に, 円板に沿って正則に変化する超平面族の方程式を具体的に書き下すことができる．

これらが, これまでに知られているもののすべてであるが, 小林円板を与える線型円板は他にもあるかもしれない．

さて, やりたいことは, 他のすべての方向への小林円板を求めるということである．楕円体の場合, $\widetilde{M}$ は, 局所的には一価で, 大域的には二価の reflection をもつ．アイデアは, これを用いて円板を大域的に延長するというものである．reflection が高々二個の値しか持たないという事実が, 問題を取り扱い可能にする．

まず, $n = 1$, すなわち楕円 (ellipse) の場合を考える．定義関数における z は一複素変数となる．古典的な Schwarz-Carathéodory reflection は, 変数 z, $\overline{z}$ を独立に動かし, 方程式 $r(z,\overline{w}) = 0$ を解くことによって得られる．この方程式は二次だから, 楕円内に z を固定すると, z を通る共焦双曲線 (confocal hyperbola) 上に二つの解 w_1, w_2 を持つ．z が楕円の焦点の一つに近づくと, これら二点は互いに接近する．この場合, 小林円板は Riemann の写像に他ならない．すなわち, 楕円の内部から右半平面 $\{w \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\, w > 0\}$ への双正則写像 f である．この写像 f は, 1869 年に H. A. Schwarz によって計算されており, 楕円関数を用いて具体的に与えることができる．我々は, Riemann の写像がこのように計算できる理由を, 二価の reflection によって説明することができる．実際, 実代数曲線によって囲まれる領域で, その Riemann の写像が具体的に計算できるもののすべてについて, Riemann

の写像は二価の reflection によって説明できる．f が大域的に延長できるためには，$f(w_1)=f(w_2)$ がつねに成立しなければならない．これは写像 f に対する付加的な対称性であり，このことが計算を可能にする．詳細は省略する (c.f. [2]) が，次のことだけ述べておく．二価の reflection が存在するためには，$\deg_z r \leq 2$ が必要であり，これは $\deg r \leq 4$ を帰結する．実際，いわゆる双円的 (bicircular) な三次および四次曲線の枝によって囲まれる領域に対して，Riemann の写像を具体的に与えることができる．

さて，楕円体 $(n>1)$ の場合を見よう．再び変数 z, $\overline{z}$ を独立に動かし，方程式 $r(z,\overline{w})=0$ を解くことによって，複素解析的な超曲面

$$Q_{\overline{w}}=\{z\in \mathbf{C}^n : r(z,\overline{w})=0\}$$

を得る．これはいわゆる Segre の極多様体であり，楕円体に対しては二次超曲面となる．対応 $z\leftrightarrow Q_{\overline{z}}$ は反正則な対合的対応で，Segre の極対応と呼ばれる．r のみたす reality condition により，

$$z\in Q_{\overline{w}} \Leftrightarrow w\in Q_{\overline{z}}$$

が成り立つ．z が与えられたときに $w\in Q_{\overline{z}}$ をより正確に決定するために，接平面を考慮に入れると，対応

$$(z,T_zQ_{\overline{w}})\leftrightarrow (w,T_wQ_{\overline{z}})$$

が得られる．z をとり，そこでの超平面 p を固定すると，$Q_{\overline{w}}$ が z を通り，そこで p に接するような w が高々二つ存在する．この対応は，z が二次超曲面 $Q_{\overline{w}}$ の特異点であるときを除いて定義され，二価の写像を与える．対応して，二つの正則な対合 (involution) τ_1, τ_2 が定まる．

これらの対合をよりよく説明するために，M を複素化する:

$$\mathcal{M}=\{(z,\zeta): r(z,\zeta)=0\}.$$

これは $\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^n$ 内の非特異な二次超曲面である．

$$\pi_1(z,\zeta)=(z,T_zQ_\zeta)=(z,[r_z(z,\zeta)]),$$

$$\pi_2(z,\zeta)=(\zeta,T_\zeta Q_z)=(\zeta,[r_\zeta(z,\zeta)])$$

によって定義される写像 $\pi_1,\pi_2:\mathcal{M}\to\mathbf{C}^n\times\mathbf{P}^*_{n-1}$ は有理写像であり，それぞれ $r_z(z,\zeta)=0$, $r_\zeta(z,\zeta)=0$ なる $\mathcal{M}$ の点を除いて定義されている．reality condition により，$\pi_2\circ\rho=\overline{\pi_1}$ が成り立つ．ここで，$\rho:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ は反正則な対合 $\rho(z,\zeta)=(\overline{\zeta},\overline{z})$ である．π_1, π_2 は次数が 2 であり，それぞれ双有理な被覆対合 τ_1, $\tau_2=\rho\tau_1\rho$ をも

つ. さらに, $\rho_1 = \tau_1\rho\tau_1$, $\sigma = \tau_1\tau_2 = \rho_1\rho$ とおく. σ はいわゆる「可逆写像」である. これは力学的な概念であり, 対合により自身の逆に共役な写像を意味する.

$M_0 = FP(\rho)$ (ρ の固定点集合) は M のコピーに他ならない. $M_1 = \tau_1 M_0$ とおくと $M_1 = FP(\rho_1)$, ${\pi_1}^{-1}\widetilde{M} = M_0 \cup M_1$ である. 空間 $\mathbf{C}^n \times \mathbf{P}^*_{n-1}$ 上の二価の reflection は, 有理二重被覆 $\mathcal{M}$ に移行すると, 一価の reflection 二つに分解する. L を Lempert 円板とするとき, $A = {\pi_1}^{-1}L$ は 1 次元の解析的集合で, その境界 ∂A は二つの円周からなり, $M_0 \cup M_1$ に含まれる. 次の二つの可能性がある.

場合 0. A が可約. このとき, A は二つの既約成分からなり, それぞれ M_0, M_1 上に境界をもつ円板である. それぞれに M_0, M_1 に関する一価の reflection を施すことにより, 二つの有理曲線を得る. これらは π_1 によって一つの有理曲線に写される. 結局, L は有理曲線に延長することになる.

場合 1. A が既約. これが, 我々が扱うべき主要な状況である. このとき, A は π_1 によって L の上に 2 対 1 に写され, この L は小林円板 K と, よってさらに円板 $\Delta \subset \mathbf{P}_1$ と同一視される. A に M_0 に関する reflection ρ を一回施すと, ρA はやはり Δ の上への 2 対 1 の写像をもつ. これら二つの写像を合わせ, σ によって境界の二つの円周を同一視することにより, 閉 Riemann 面 $(A \cup \rho A)/\sigma$ が得られる. これは $\mathbf{P}_1$ の上への 2 対 1 の写像をもつので, 超楕円曲線であり, 種数は奇数である.

問題 1. 写像 $A \to L$ の分岐点 (焦点とよばれる), とくにその個数を求めよ. これから上の Riemann 面の種数が分かる. これは, A と π_1 の branch locus $\mathcal{B} = FP(\tau_1) = FP(\tau_2)$ の交点を求めることに帰着される.

$$\mathcal{A} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \sigma^k(A \cup \rho A)$$

とおくと, これは $\mathcal{M}$ 内の自己交叉をもちうる Riemann 面で, σ (および τ_1, ρ) により不変である.

問題 2. $\mathcal{A}$ のパラメーター表示を「具体的」に求めよ.

我々は, 複素化された楕円面 $\mathcal{M}$ の有理型写像 σ の不変曲線を見つけたい.

定理. 写像 σ は, (離散力学系として) 完全積分可能である. すなわち, 真の部分多様体[2] を除いて, $\mathcal{M}$ は σ-不変な n 次元の部分多様体 $\mathcal{L}^n(\overrightarrow{\mu})$ ($\overrightarrow{\mu} \in \mathbf{C}^{n-1}$) によって foliate され, σ の挙動は各 leaf 上「単純」である.

[2] 以下, 部分多様体は特異点をもつかもしれない.

我々は σ-不変な曲線を探しているのであるが, 一般に, 写像の不変曲線を探すのは, flow のそれを探すより難しい. ところが幸運なことに, $\mathcal{L}^n(\overrightarrow{\mu})$ 上に不変曲線が見つかる.

定理の証明は Möbius 球面幾何 (の複素版) に基づいている. このために, 今後

$$0 < A_1 < A_2 < \cdots < A_n, \quad A_j \neq \frac{1}{2}$$

と仮定する. $A_j > \frac{1}{2}$ ならば, M は双曲面 (hyperboloid) であり, 有界領域を囲まない. この場合が Lempert の理論との関連で意味をもつかどうかは分からないが, 以下の議論には $A_j \neq \frac{1}{2}$ を仮定すれば十分である. 座標変換 $z_j \mapsto {A_j}^{-\frac{1}{2}} z_j$ を行うと, 定義関数は

$$r(z, \zeta) = A^{-1} z \cdot \zeta + z \cdot z + \zeta \cdot \zeta - 1$$

となる. よって, 各 Q_ζ は複素球面 (主要部が $z \cdot z$ である二次超曲面, 以下, 単に球面とよぶ) である. 球面全体の空間は $\mathbf{P}_{n+1}$ と同一視され, Möbius 空間とよばれる. 球面の族 $\mathcal{Q}^n = \{Q_\zeta : \zeta \in \mathbf{C}^n\}$ は $\mathbf{P}_{n+1}$ 内の二次超曲面であることが分かる. 球面幾何には, これとは別に, M とは無関係に定義される二次超曲面がある. これは, 半径 0 の球面

$$S_\zeta = \{z \in \mathbf{C}^n : (z - \zeta) \cdot (z - \zeta) = 0\}$$

の全体 $\mathcal{S}^n = \{S_\zeta : \zeta \in \mathbf{C}^n\} (\subset \mathbf{P}_{n+1})$ であり, 球面幾何における基本二次曲面と呼ばれる. 我々は, この二次超曲面の対の幾何を考察する.

さて, 対応 $(z, \zeta) \in \mathcal{M} \mapsto (S_z, Q_\zeta) \in \mathcal{S} \times \mathcal{Q}$ は, $\mathcal{M}$ を

$$(\mathcal{S} \times \mathcal{Q})_0 = \left\{ (\xi, \eta) \in \mathcal{S} \times \mathcal{Q} : \text{直線 } l = \overrightarrow{\xi\eta} \text{ は } \xi \text{ において } \mathcal{S} \text{ に接する} \right\}$$

に双有理的に写す. 二つの二次超曲面 $\mathcal{S}$ と $\mathcal{Q}$ は一点で接している. $(\xi, \eta) \in (\mathcal{S} \times \mathcal{Q})_0$ に対して, 直線 $l = \overrightarrow{\xi\eta}$ は一般に $\mathcal{Q}$ と二点 η, η' で交わる. このとき, $\mathcal{M}$ の対合 τ_1 は η と η' を入れ換える写像に対応する. 一方, l をある超平面に関して折り返すことにより, 再び $\mathcal{S}$ と接する直線が得られる. 接点を ξ' とするとき, $\mathcal{M}$ のもう一つの対合 τ_2 は ξ と ξ' を入れ換える写像に対応する. 写像 σ は「零垂 (null cone) ビリヤード」というべきものであり, $\mathbf{R}^n$ 内の楕円体における通常のビリヤード (これは完全可積分系である) の類似物である. 対応 $(\xi, \eta) \mapsto (\overrightarrow{\xi\eta}, \eta)$ は, $(\mathcal{S} \times \mathcal{Q})_0$ と点付き直線の空間

$$\mathcal{L} = \{(l, \eta) : \eta \in \mathcal{Q} \cap l, \ l \text{ は } \mathcal{S} \text{ に接する}\}$$

の間の双有理同型を定める. 対合 τ_1, τ_2 と写像 σ を調べるにあたって, $\mathcal{L}$ は $\mathcal{M}$ のより扱いやすいモデルである. 写像 σ のダイナミクスを理解するために, τ_1 と τ_2 の両方によって不変な $\mathcal{L}$ の部分多様体を探す.

さて, 共焦理論 (confocal theory) について説明しよう. $\mathcal{S}$, $\mathcal{Q}$ に対応する二次形式をそれぞれ $s(\xi,\eta)$, $q(\xi,\eta)$ とする. すなわち,

$$\mathcal{S}=\{[\xi]\in\mathbf{P}_{n+1}:s(\xi,\xi)=0\},\quad \mathcal{Q}=\{[\xi]\in\mathbf{P}_{n+1}:q(\xi,\xi)=0\}.$$

このとき, $q(\xi,\eta)=s(B^{-1}\xi,\eta)$ によって定まる $\mathbf{C}^{n+2}$ 上の s-対称作用素 B は, 対角化可能ではない. 言い換えれば, 二つの二次形式 $s(\xi,\eta)$ と $q(\xi,\eta)$ は同時対角化可能ではない. これは, $\mathbf{R}^n$ 内の楕円体の場合と異なる点であり, 困難を引き起こす. ところが, B は特性多項式が最小多項式に一致するという性質を持っており, この場合には共焦理論がうまく展開できる. さて,

$$\mathcal{Q}_\lambda=\left\{[\xi]\in\mathbf{P}_{n+1}:q_\lambda(\xi,\xi)\equiv s\left((\lambda-B)^{-1}\xi,\xi\right)=0\right\}$$

は, λ が B の固有値でなければ $\mathbf{P}_{n+1}$ 内の二次超曲面であり, 共焦二次曲面 (confocal quadric) とよばれる. その全体を $\mathcal{Q}$ の $\mathcal{S}$ に関する共焦族 (confocal family) とよぶ. $\eta\in\mathbf{P}_{n+1}$ の共焦座標 (confocal coordinates) とは, $\eta\in\mathcal{Q}_\lambda$ となるような λ の値 $\lambda_j=\lambda_j(\eta)$ $(j=0,\ldots,n)$ のことである. また, $\xi\in\mathbf{P}_{n+1}$ に対して $x_j=q_{\lambda_j}(\xi,\eta)$ $(j=0,\ldots,n)$ とおき, (λ_j,x_j) を (ξ,η) の共焦座標対とよぶ. $\eta\in\mathcal{Q}\equiv\mathcal{Q}_0$ の場合には, $\lambda_0=0$ ととることにする.

$(l,\eta)\in\mathcal{L}$ の直線 l がある固定された超曲面に接するという条件は, 明らかに τ_1 によって不変である. 一方, 超曲面が共焦二次曲面である場合には, それに接する直線の集合は τ_2 によっても保たれる. すなわち, 次の基本的補題が成り立つ.

補題. 直線 l が共焦二次曲面 $\mathcal{Q}_\mu$ に接するという条件は, τ_1, τ_2 によって保たれる.

$\mathcal{L}$ に属する直線 l は常に $\mathcal{S}\equiv\mathcal{Q}_\infty$ に接する. これ以外に l が 接する共焦二次曲面を $\mathcal{Q}_{\mu_\alpha}$ $(\alpha=1,\ldots,n-1)$ とする. μ_α $(\alpha=1,\ldots,n,\ \mu_n=\infty)$ を l の共焦座標といい, $\overrightarrow{\mu}=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ と書く. そこで,

$$\mathcal{L}(\overrightarrow{\mu})=\{(l,\eta):\eta\in\mathcal{Q}\cap l,\ l\text{ は }\mathcal{Q}_{\mu_1},\ldots,\mathcal{Q}_{\mu_n}\text{ に接する}\}\ (\subset\mathcal{L})$$

と定義すると, これらが定理における不変多様体である. これらは τ_1, τ_2, σ によって不変であり, $\mathcal{L}$ を foliate する.

今後, $s(\eta,\eta)=1$, $s(B\xi,\xi)=1$ という正規化を採用する. Liouville と Klein による古典的な構成にしたがって, generic な対 (ξ,η) に対して, 平面代数曲線 $C_{\xi,\eta}$ を

$$\begin{aligned}C_{\xi,\eta}&=\{(\lambda,t)\in\mathbf{C}\times\mathbf{C}:q_\lambda(\zeta,\zeta)=0\},\quad \zeta=\eta+t\xi\\&=\{(\lambda,x)\in\mathbf{C}\times\mathbf{C}:x=q_\lambda(\xi,\eta+t\xi)\}\end{aligned}$$

によって対応させる. 同型を除いて, $C_{\xi,\eta}$ は明らかに直線 $l = \overrightarrow{\xi\eta}$ のみに依存し, 共焦族 Q_λ の l 上の跡を表す. 射影 $(\lambda, t) \mapsto \lambda$ は $C_{\xi,\eta}$ から $\mathbf{P}_1$ への二重分岐被覆を与えるので, $C_{\xi,\eta}$ は超楕円曲線である. そのモジュライは $\mathcal{L}(\overrightarrow{\mu})$ 上一定であること, および種数は generic に $n-1$ であることが分かる. そこで以下, $C_{\xi,\eta}$ を $C_{\overrightarrow{\mu}}$ と書く. 対応 $(\xi,\eta) \mapsto ((\lambda_j, x_j))_{j=1}^n$ (unordered) により, generic な不変多様体 $\mathcal{L}(\overrightarrow{\mu})$ を対称積 $C_{\overrightarrow{\mu}}^{(n)}$ の上に, generic に 2^{n-1} 対 1 に写像することができる.

$C_{\overrightarrow{\mu}}$ 上のある有理型微分 $\omega_1, \ldots, \omega_n$ で, Abel 和 $\sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha(\lambda_j, x_j)$ が $\mathcal{L}(\overrightarrow{\mu})$ 上の σ-不変な微分形式にリフトするようなものがある. その周期および留数によって生成される格子 Λ の階数は $2n-1$ であり, 一般化された Abel-Jacobi 写像によって, $C_{\overrightarrow{\mu}}^{(n)}$ を $\mathbf{C}^n/\Lambda$ に写像することができる. 結局, $\mathcal{L}(\overrightarrow{\mu})$ から $\mathbf{C}^n/\Lambda$ への写像が得られるが, このとき σ は $\mathbf{C}^n/\Lambda$ 上の平行移動に対応する. これにより, 定理の不変多様体の稠密な開集合上での σ の挙動が, より詳しく与えられる.

離散的な写像 σ は, ある接触形式の特性ベクトル場の連続的なフローによって補間することができ, その軌道から σ-不変な正則曲線が見つかる. これらの曲線から, 領域 D の停留曲線 K が得られるが, これらが実際に小林円板を与えることを確かめる必要がある. また, K の真に具体的なパラメーター表示を求めることも課題として残っている.

参考文献

[1] L. Lempert, La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule, Bull. Soc. Math. de France **109** (1981), 427-474.

[2] S. M. Webster, Double valued reflection in the complex plane, l'Enseign. Math. **42** (1996), 25-48.

[3] ———, A note on extremal discs and double valued reflection, AMS Contemp. Math. **205** (1997), 271-276.

[4] ———, Real ellipsoids and double valued reflection in complex space, to appear.

(納谷 信 記)