数理解析研究所講究録
1058巻 1998年 44-47

BLASCHKE 予想への複素解析的アプローチ (PROGRESS REPORT)

小林亮一

名古屋大学大学院・多元数理科学研究科

境界のないコンパクト Riemann 多様体 M が Blaschke 多様体であるとは, すべての点 $m \in M$ に対して, その cut locus から任意の点 n をとったとき, m を出発する測地線で n を通るものの n における速度ベクトル全体のなす集合 (それをリンク $\Lambda(m,n)$ という) が n における単位接球面の大球面になっていることをいう. この定義は, 古典的な再会曲面の定義を高次元の抽象的多様体に一般化したものである. 以下, Blaschke 多様体 M の次元は n とする. Blaschke 多様体の測地線はすべて閉じていて長さが同じであり, ある正の整数 k が存在して, すべての点 m に対してその cut locus Cut_m は $(n-k)$-次元の滑らかな部分多様体で, リンク $\Lambda(m,n)$ は cut locus Cut_m の接空間の直交補空間であることが知られている. すべての階数1のコンパクト対称空間は Blaschke 多様体の例である. Blaschke 予想は、逆に次を主張する:

予想. Blaschke 多様体は階数1のコンパクト対称空間に限る.

1921年、Blaschke は $\mathbf{R}^3$ の再会曲面は標準的球面に限るかどうかを問題にした. この問題は本質的に多様体とその接空間の幾何学に関わっており, 1961年における L.Green による Blaschke の問題の解決は, 近代幾何学の概念的側面の大きな成果と考えられる. Green は, $\mathbf{R}^3$ に埋め込まれた曲面とは限らない, 抽象的な再会曲面は標準的球面と実射影平面に限ることを示したのである. ちなみに, Green の証明は2次元特有ではあるが, Twistor 幾何学で本質的な **Radon 変換**の方法を用いていると考えられる. 本講演では一般の Blaschke 予想に複素幾何学の立ち場から挑戦を試みる. 私は Green の方法を詳しく研究したわけではないが, 本講演で導入する方法は, 以下で説明されるように, ふたたび Radon 変換に基づくものである. まだ論文が完成していないので本講演は Progress report でしかないが, Radon 変換の方法はいろいろな場面で応用できそうなアイディアが含まれているものと期待している.

Green のあと, Blaschke の問題自体の研究は, それを高次元化する試みに移った. Green の方法は2次元であることを本質的に使っていて, そのままでは高次元化できない. まず, 1978年に Berger と Kazdan は球面と実射影空間の Blaschke 構造は標準的なものに限ることを証明した. 彼らの方法は巧みな幾何学的不等式によっていて, 一般の Blaschke 多様体へは一般化できない. 一方, Blaschke 構造に強い局所的条件を付加した条件である, 調和多様体の概念[1] が見い出され, その強い条件のもとで Szabó は1990年 (J. Diff. Geom.) に次の決定的定理を示した.

[1] リーマン多様体が調和多様体であるとは, 測地的正規座標で書いた体積形式の密度関数が中心からの距離のみによる関数であることをいう. そのほかにいろいろな特徴づけがあるが詳しくは Besse の本を見ていただきたい.

定理 1 (Szabó). 有限の基本群をもつコンパクト調和多様体は階数 1 の対称空間である.

なお, [Besse, p.195] には, Bott/Samelson の定理から導かれる結論として, 等質的 Blaschke 多様体は階数 1 の対称空間に限ることが示されている. したがって, **Riemann 多様体として 等質的な Blaschke 多様体に対する Blaschke 予想は正しい.**

本講演では, 本来の Blaschke 予想への複素解析的方法アプローチの可能性について考察する. ここで導入する方法は Szabó のものとは全く異なり, むしろ問題を複素幾何学に変換してから, M の測地線の moduli 空間を複素化して得られるサイクル空間の幾何学を見るという, Radon 変換のアイディアが本質的である.

Blaschke 予想の複素解析的な問題への変換は, Lempert-Szöke, Guillemin-Stenzel (Math. Ann. 1990; J. Diff. Geom. 1990) の**適合的複素構造**の理論に基づく.

定義 1 (Lempert-Szöke, Guillemin-Stenzel). 適合的複素構造とは, 与えられた Riemann 多様体の接束の複素構造で, 測地線の微分写像 $d\exp$ が正則写像になることで特徴づけられる複素構造である.

この複素構造は, 一般にゼロ切断の近傍でしか定義されない. また, その定義域は曲率の挙動によって完全に決まるものである. 本アプローチは、Blaschke 条件のもとで適合的複素構造が接束 TM 全体で大域的に定義され, 無限遠における漸近挙動が良い評価をもつことを証明することから始まる. これができた場合, Blaschke 多様体が**複素化**されたと考えられる. Blaschke 多様体を特徴づける条件から, 適合的複素構造は接束上である種の**解析的非線形波動方程式**を満たすことが示される. この方程式を, 適当に変数に虚数を導入して楕円型方程式にかきかえて, 逐次近似により解の評価を行ない虚数パラメタを上半平面にそって解析接続してやれば, 適合的複素構造が大域的に存在することがわかる.

このようにして Blaschke 多様体が複素化されて, Blaschke 予想への複素解析的アプローチが可能になる. 以下, 複素幾何学を駆使して Blaschke 予想にせまってみよう.

第一段階：Blaschke 多様体の接束上に大域的に定義される適合的複素構造は次の意味で良い漸近的挙動をもつ: Blaschke 多様体の複素化 (TM, J) はコンパクト化可能で, ある Fano 多様体（第一チャーン類が正であるような複素射影的代数多様体）から非特異因子 D を除いた空間と代数的に同型である. ここで, D は $c_1(X) = \alpha[D]$ $(\alpha > 1)$ を満たす X の非特異因子である. D は M の向きづけられた測地線全体のなすモジュライ空間と同一視される. M の閉測地線 γ の複素化は $\gamma^{\mathbf{C}}$ は $\mathbf{C}^*$ であり, そのコンパクト化は因子 D と 2 点で横断的に交わり, X の全実部分多様体 M とは閉測地線 γ にそって交わる X の有理曲線である. また, このプロセスを階数 1 のコンパクト Riemann 対称空間 $M = G/K$ に適用すると, 群論的な複素化 $G^{\mathbf{C}}/K^{\mathbf{C}}$ と自然な G-同変的コンパクト化を得る. なお, 作り方から, M の測地線の向きを反対にすることにより定義される反正則な対合 (anti-holomorphic involution) σ が X 上定義されることに注意する. $\sigma(D) = D$ であり, ひとつの点 $x \in D$ を与えるとただひとつ M の測地線 γ が定まり, 有理曲線 $\overline{\gamma^{\mathbf{C}}}$ は D と 2 点 $x, \sigma(x)$ と交わる.

第二段階：第二段階はもっとも謎に満ちたところである. ここでは超 Kähler 構造を応用してベクトル場を作ろうというアイディアを提案したい. Blaschke 条件と, 適合複素構造がよい漸近挙動をもつことから, D は複素解析的なベクトル場をたくさんもつことがわかる, ということを示すのが目標である. このようなベクトル場を D 上

に見つけるために, M の閉測地線全体のなすモジュライ空間である D を, M の閉測地線の複素化として現れる有理曲線を含む X の Chow variety $\mathcal{M}_X$ の全実部分多様体[2] $\mathcal{M}_X^{\mathbf{R}}$ として埋め込めること, すなわち, $\mathcal{M}_X = (\mathcal{M}_X^{\mathbf{R}})^{\mathbf{C}} = D^{\mathbf{C}}$ であることに着目する. このことは

$$\begin{aligned}&\dim_{\mathbf{R}}\{\text{normal Jacobi fields along } \gamma\}\\ &\qquad = \dim_{\mathbf{C}}\{\text{the connected component of the Chow variety containing a } \overline{\gamma^{\mathbf{C}}}\}\end{aligned}$$

であること, および, $\mathcal{M}_X^{\mathbf{R}}$ は反正則対合 σ が $\mathcal{M}_X^{\mathbf{C}}$ にひきおこす[3] 反正則対合の固定点として特徴づけられることから従う. 具体的には, M の測地線のモジュライ空間は, Chow variety の中でその解析的閉包をとって得られる複素部分多様体の通常の意味の全実部分多様体として実現される. この複素部分多様体は $D \times D$ と双有理同型である. M の測地線のモジュライ空間 D は反正則対合 σ の $D \times D$ におけるグラフとして実現される. D に正則ベクトル場がたくさん存在することを示したいのであるが, これには実は既にモデルが存在する. コンパクト Hermite 対称空間の正則余接束には超 Kähler 構造が入ることが Dancer-Szöke によって知られている[4]. これを等長変形するとゼロ切断を全実にできる. Hermite 対称空間にたくさんのベクトル場があることは, 正則余接束においてゼロ切断が ($\mathbb{P}_n(\mathbf{C})$ 以外の場合は他の部分もいっしょにであるが) ブローダウンできることの帰結である. ここでこのモデルと同様のことが成り立つことを言いたいのだが, 実はまだ完全に確かめられたわけではない. まず D の正則余接束に完備 Ricci-flat Kähler 計量を入れて T^*D に超 Kähler 構造を入れる. このとき Sobolev 不等式がこわれるような状況で Ricci-flat 方程式の解の存在を示さなければならない. このような試みは成功例があるが, この場合の問題点はすでにある成功例とは少し異なるようである. これが成功したら, 次にこれを等長変形する. そうすると $D \times D$ の Zariski 開集合を得るであろう. ここもどのように正当化するべきかまだよくわからないところである. もしそれもわかれば $D \times D$ は Fano 多様体であり問題の Zariski 開集合は正則 2-形式の定義域だから反標準因子の α^{-1} $(\alpha > 1)$ 倍を実現する超曲面の補集合である. したがってアファイン代数多様体である. 等長変形を外の空間で実現して（これは可能と思われる）T^*D まで変形するとゼロ切断は完全にブローダウンされるはずである. こうして, 発見的議論ではあるが, D の接束は開集合上で正則ベクトル場で張られることがわかる. D は Fano 多様体であったから, 結局, D **は有理等質多様体**でなければならないことがわかる.

第三段階： 第三段階は, Kähler-Einstein 計量の応用である.

定理 2(板東-小林 [B-K]). *X を Fano 多様体, D を非特異因子で $c_1(X) = \alpha[D]$ $(\alpha > 1)$ を満たすとする. このとき, もし D が Kähler-Einstein 計量を許容するなら, $X - D$ には D 上与えられた Kähler-Einstein 計量を漸近的境界条件にもつ完備 Ricci-flat Kähler 計量が存在する.*

この定理により,

---

[2]"全実" というのは正確ではない. 通常の全実の条件を, 半分次元ということ以外は満たす. 適当な言葉を知らないので全実という言葉を使った.

[3]σ は $\mathcal{M}_X^{\mathbf{R}}$ に属する有理曲線を $\mathcal{M}_X^{\mathbf{R}}$ に属する有理曲線にうつすから, $\mathcal{M}_X$ の反正則対合をひきおこす.

[4]Azad と筆者は, 一般のコンパクト Riemann 対称空間の複素化（これは接束と標準的に不変な意味で微分同相である）が完備 Ricci-flat Kähler 計量を許容することを示した. とくに Hermite 対称空間に対してはこの計量は超 Kähler 構造を与える.

命題 1. 漸近的境界条件として D 上の反正則対合不変 σ で不変な Kähler-Einstein 計量をもつような, $X-D$ 上定義された完備 Ricci-flat Kähler 計量が存在する.

一方, 内部の条件から Ricci-flat Kähle 計量を探す試みに対しては次の結果を示した.

定理 3. 上の定理で, D に Kähler-Einstein 計量が存在するという条件をはずしても $X-D$ は完備 Ricci-flat Kähler 計量を許容する.

ただし証明ははるかに解析的に複雑で, Monge-Ampère 方程式の非有界解の増大度評価が必要になる. それでも, この定理の系として, 次がわかる:

命題 2. M の Blaschke 計量を初期条件とする $X-D$ の完備 Ricci-flat Kähler 計量が存在する.

$(TM, J) = X-D$ 上存在するこれらの完備 Ricci-flat Kähler 計量はともに最大の体積増大度をもち Sobolev 不等式を満たす. このような完備 Ricci-flat Kähler 計量の Kähler ポテンシャルはある種の Monge-Ampère 方程式の解である. この Monge-Ampère 方程式の解は, 計量の無限遠方における漸近的挙動によって完全にコントロールされることが定理 2,3 の証明からわかる. この意味で, 定理 2,3 における解の一意性がいえる. この意味の解の一意性から次を得る:

命題 3. 命題 1,2 におけるふたつの $X-D$ 上の完備 Ricci-flat Kähler 計量は一致する.

結局, M の Blaschke 計量と, D の反正則対合不変 σ で不変な Kähler-Einstein 計量は, $X-D$ 上の完備 Ricci-flat Kähler 計量により**補間**されることがわかる.

第四段階： D の半正則対合 σ で不変な Kähler-Einstein 計量を境界条件として同次 Monge-Ampère 方程式を解く. Lempert-Szöke あるいは Guillemin-Stenzel により, 解の 2 乗は強多重劣調和関数である. D の反正則対合不変な Kähler-Einstein 計量に関する Killing ベクトル場は σ で不変である[5]. したがって, 複素化された測地線の変分をひきおこすので, $X-M$ の解析的ベクトル場 V を定義する. このベクトル場 V は, 上の同次 Monge-Ampère 方程式の解の 2 乗を Kähler potential とする Kähler 計量に関して等長的である. したがって, V は M まで滑らかにのびて, X 全体で定義される解析的ベクトル場になり, M 上では M に接するベクトル場である[6]. このベクトル場は D の Killing ベクトル場だから, 正則ベクトル場 V は命題 1 の完備 Ricci-flat Kähler 計量に関して Killing ベクトル場である. 一方, 命題 3 から, V は命題 2 の完備 Ricci-flat Kähler 計量に関しても Killing ベクトル場でなければならない. したがって V は M の Killing ベクトル場を誘導する.

こうして, Blaschke 多様体 M がたくさんの Killing ベクトル場をもつことが結論される. 等質的 Blaschke 多様体に対する Blaschke 予想はわかっているから, 結局以上の議論により, 一般的 Blaschke 予想の肯定的解決にいたる.

[5] 反正則対合 σ で不変な Killing ベクトル場は複素化された測地線を複素化された測地線にうつす.

[6] M は X に全実に埋め込まれているから, Cauchy の積分公式から V は自動的に M まで正則にのびるといってもよいが, Monge-Ampère 方程式の解をこのように用いるのが面白いのでわざとこのような議論を行なった.