数理解析研究所講究録
1058巻 1998年 48-59

Regularity for pseudoconvex domains and CR manifolds

J. J. Kohn

1. Ω は $\mathbb{C}^n$ の擬凸有界領域であり、その境界 $b\Omega$ は C^∞ 級の実超曲面であるものとする。$L_2(\Omega)$ を Ω 上の複素数値二乗可積分関数全体のなす Hilbert 空間とし、

$$\mathcal{H} = \{ h \in L_2(\Omega) \mid \bar{\partial} h = 0 \}$$

とおく。$\mathcal{H}$ は $L_2(\Omega)$ の閉部分空間である。直交射影

$$B : L_2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}$$

を Ω 上の Bergman 射影という。$f \in L_2(\Omega)$ に対し

$$Bf = f - u$$

$\Longleftrightarrow$ $u \perp \mathcal{H}$ かつ超関数の意味で $\bar{\partial} u = \bar{\partial} f$

である。Bergman 射影の多変数関数論における一つの位置づけが Levi 問題との関連によって与えられる。実際、$x \in b\Omega$ に対し、x で特異点をもつ正則関数を Ω 上に作るには、x の十分小さな近傍 U に対して $\Omega \cap U$ 上で正則で x を越えて解析接続でき

ないΩ上の関数fで$\bar\partial f$が$\bar\Omega$上でC^∞級であるものをとり、方程式$\bar\partial u = \bar\partial f$の解$u$で$\mathcal{H}$に直交するものを求めてから$g = f - u$とおけばよい。

上のuをfで表すには以下のようにする。(もちろん$u = f - Bf$以外の表し方が問題である。)

まず２階の楕円型微分方程式

$$\Box\varphi := \bar\partial\bar\partial^*\varphi + \bar\partial^*\bar\partial\varphi = \alpha$$

を考える。ただし$\varphi, \alpha \in C^{0,1}(\bar\Omega) := \{\bar\Omega$上の$C^\infty$級$(0,1)$形式$\}$で、方程式は$\alpha$に対して$b\Omega$上で$\bar\partial$-Neumann条件

$$\begin{cases} \varphi \wedge \bar{*}\bar\partial r = 0 \\ \bar\partial\varphi \wedge \bar{*}(\bar\partial r \wedge d\bar z_i) = 0 \quad \forall i \end{cases}$$

(ただしrはΩの定義関数)をみたす解$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i d\bar z_i$を求める問題である。

$\Box\varphi = \alpha$であれば、二次形式

$$Q(\tilde\varphi, \tilde\psi) := (\bar\partial\tilde\varphi, \bar\partial\tilde\psi) + (\bar\partial^*\tilde\varphi, \bar\partial^*\tilde\psi)$$

に対し

$$Q(\varphi, \psi) = (\alpha, \psi) \quad \forall\psi \in \mathcal{D}om\,\bar\partial^* \cap C^{0,1}(\bar\Omega)$$

が成立する。Ωの有界性と擬凸性から

$$\|\tilde{\varphi}\|^2 \leq CQ(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) \qquad C\text{は定数}$$

が従い. これより Hilbert 空間

$$L_2^{0,1}(\Omega) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i d\bar{z}_i \;\middle|\; f_i \in L_2(\Omega) \right\}$$

上の作用素として $\Box$ の逆にあたるノイマン作用素 N が定義される。

$\alpha = \bar\partial f$ のときには、$u = \bar\partial^* N\alpha$ とおくと

$$u \perp \mathcal{H} \quad \text{かつ} \quad \bar\partial u = \Box N\alpha = \bar\partial f$$

だから、$Bf = f - \bar\partial^* N \bar\partial f$ となる。

Q に関する一定の条件の下で $\bar\partial^* N \bar\partial f$ が C^∞ 級であることを示すことができる。いわゆる楕円性条件

$$\|\varphi\|_1 \leq CQ(\varphi, \varphi) \qquad \forall\varphi \in \mathrm{Dom}\,\bar\partial^* \cap C^{0,1}(\bar\Omega)$$

は $n=1$ と同値なのでつまらない。従って Q の条件としては

$$\|\varphi\|_\varepsilon \leq CQ(\varphi, \varphi) \qquad (0 < \varepsilon < 1)$$

なる形のものが問題になる。周知の如くこのとき $\bar\partial^* N \bar\partial f$ は C^∞ 級で、

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \iff \Omega\text{は強擬凸}$$

である。$b\Omega$ が複素曲線片を含む場合は上の評価式が成り立つような ε は存在しない。

pをΩの境界点とする。$\mathbb{C}^n$におけるpのある近傍Uとある正数ε, Cに対し

$$\|\varphi\|_\varepsilon^2 \le C Q(\varphi,\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathrm{Dom}\,\bar\partial^* \cap C_0^{0,1}(U)$$

が成り立つとき、pにおいて（$\bar\partial$作用素に対する）劣楕円型評価が成立するという。劣楕円型評価の成立条件を幾何学的に述べることができる。それはD'Angeloの意味の型（タイプ）によるものである。

<u>定義</u>　Vをpを通る複素曲線片とするとき、

$$I_p(V, b\Omega) := \sup\{ \eta \mid \exists C' \text{ s.t. } \forall q\in V \ \ |r(q)| \le C'|p-q|^\eta \}$$

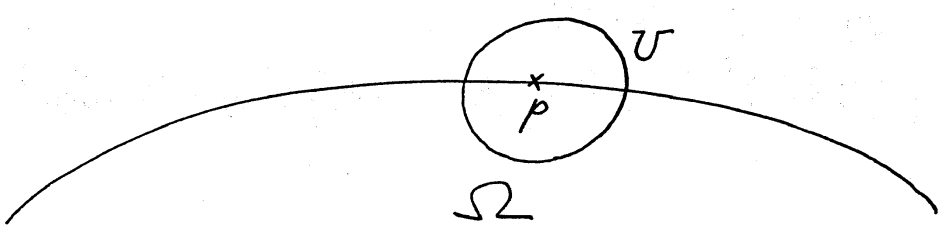
をpにおけるVと$b\Omega$の接触次数といい、

$$\sup\{ I_p(V, b\Omega) \mid V \text{は} p \text{を通る複素曲線片} \} < \infty$$

のときpは（D'Angeloの意味で）Ωの有限型の境界点であるという。

<u>定理1.</u>（D. Catlin）

pが有限型 $\Longleftrightarrow$ pにおいて劣楕円型評価が成立



乗数イデアル（multiplier ideal）

劣楕円型評価の代数的な成立条件を述べたい。そのために点 $p \in b\Omega$ における乗数イデアル $\mathcal{I}\ (= \mathcal{I}_p)$ を

$$\mathcal{I} = \{ f \mid f \text{ は } p \text{ における } C^\infty \text{ 級関数芽であり,}$$

$$\exists U \underset{nbd}{\ni} p,\ \exists \varepsilon > 0,\ \exists C > 0 \quad s.t.$$

$$\| f\varphi \|_\varepsilon^2 \le C Q(\varphi, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathrm{Dom}\,\bar\partial^* \cap C_0^{0,1}(U) \}$$

により定義する。

予想（または理想）

$$p \text{ において劣楕円型評価が成立} \iff 1 \in \mathcal{I}$$

定理 2.　$\mathcal{I}$ は以下の性質をもつ.

(1)　$r \in \mathcal{I}$ かつ $\mathrm{coeff.}((\partial\bar\partial r)^{n-1} \wedge \partial r \wedge \bar\partial r) \in \mathcal{I}$

(2)　$\sqrt[\mathbb{R}]{\mathcal{I}} = \mathcal{I}$．ただし "$g \in \sqrt[\mathbb{R}]{\mathcal{I}} \iff \exists f \in \mathcal{I}$ $\exists m > 0$ s.t. $|g|^m \le |f|$."

(3)　$f_1, \cdots, f_j \in \mathcal{I}$ ならば
$\mathrm{coeff.} \{ (\partial\bar\partial r)^{n-j-1} \partial f_1 \wedge \bar\partial f_1 \wedge \cdots \wedge \partial f_j \wedge \bar\partial f_j \wedge \partial r \wedge \bar\partial r \} \in \mathcal{I}$

$$I_0 = \sqrt[\mathbb{R}]{(r,\ \mathrm{coeff.}\{\partial r \wedge \bar\partial r \wedge (\partial\bar\partial r)^{n-1}\})}$$

$$I_k = \sqrt[\mathbb{R}]{(I_{k-1},\ \mathrm{coeff.}\{\partial f_1 \wedge \cdots \wedge \partial f_j \wedge \partial r \wedge \bar\partial r \wedge (\partial\bar\partial r)^{n-j}\})}$$

(ただし $f_1, \cdots, f_j$ は I_{k-1} を動く)

とおくと、

$$1 \in I_k \quad \underset{?}{\overset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow}} \quad \text{劣楕円型評価}$$

(ただし $b\Omega \in C^\omega$ ならOK)

であることが知られている。(Acta Math. 142, Ann. Math. 107)

2. $\bar\partial$-Neumann 問題の局所正則性に関する最近の進展状況を説明しよう。

<u>定理 3</u> (M. Christ)

$\Omega \subset \mathbb{C}^2$ とする。$b\Omega$ に含まれる総実な曲面 M で $M \supset b\Omega \setminus \{$強擬凸境界点$\}$ であり、かつ $b\Omega$ の Levi 形式 $\lambda(x)$ に対して

$$\lim_{x \to M} \mathrm{dist}(x, M) \log \lambda(x) = 0$$

であるものが存在すれば Neumann 作用素は局所正則である。(すなわち α が p の近傍で C^∞ 級ならば $N\alpha$ も p の近傍で C^∞ 級である。)

一般にもこれに類した制約の下でNeumann作用素の局所正則性が期待できる。

<u>予想</u>：$b\Omega \subset \mathbb{C}^n$ とし、

$$\{p \in b\Omega \mid p \text{ は有限型でない}\} \subset \text{可微分曲線} C$$

かつ C は $b\Omega$ の接ベクトル束の複素部分と横断的に交わるとする。（すなわち $\forall p \in C$ に対し、p における C の接線を含む複素直線は p で $b\Omega$ に接しないとする。）
このとき Neumann 作用素の局所正則性が成り立つ。

3. L^2 標準解の滑らかさについては、$\bar{\partial}$ 方程式だけでなく、接Cauchy-Riemann方程式に対しても研究がなされている。

<u>定義</u>　$2n-1$ 次元の C^∞ 級可微分多様体 M 上の CR 構造とは、M の接ベクトル束の複素化 $\mathbb{C}T_M$ の部分束 $T_M^{1,0}$ で以下の条件をみたすものをいう。

(i) $\operatorname{rank} T_M^{1,0} = n-1$

(ii) $T_M^{1,0} \cap \overline{T_M^{1,0}} = \{0\}$ （$:= \mathbb{C}T_M$ の零断面）

(iii) $\Gamma(T_M^{1,0})$ を $T_M^{1,0}$ の C^∞ 級断面の集合とすると、
$s, s' \in \Gamma(T_M^{1,0}) \Longrightarrow [s, s'] \in \Gamma(T_M^{1,0})$.
ただし $[s, s']$ は Lie 括弧積を表す。

CR構造が(一つ)与えられた多様体をCR多様体という。向きづけ可能なCR多様体Mに対し、ある$\zeta \in \Gamma(T_M)$が存在して

$$\mathbb{C}T_M = T_M^{1,0} + \overline{T_M^{1,0}} + \mathbb{C}\cdot\zeta$$

となるから、$T_{M,x}^{1,0}$上の二次形式$E = E_x$を

$$\begin{array}{ccc} T_{M,x}^{1,0} \times T_{M,x}^{1,0} & \xrightarrow{E} & \mathbb{C} \\ \Psi & & \Psi \\ (\xi, \eta) & \longmapsto & \sqrt{-1}\,[\tilde{\xi}, \bar{\tilde{\eta}}](x) \text{の}\zeta\text{成分} \end{array}$$

によって定義することができる。ここに$\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$はそれぞれξ, ηのxの近傍上への滑らかな拡張である。(ζ又は$-\zeta$に対して)EがM上いたる所正定値(または半正定値)であるとき、Mは強擬凸な(または擬凸な)CR多様体であるという。CR多様体上の接Cauchy-Riemann作用素を

$$\begin{array}{ccc} \bar{\partial}_b : C^\infty(M) & \longrightarrow & \Gamma(\overline{T_M^{1,0}}^*) \\ \Psi & & \Psi \\ u & \longmapsto & du|\overline{T_M^{1,0}} \end{array}$$

により定義する。$\bar{\partial}_b u = 0$をみたす関数をCR関数という。与えられたCR多様体上にCR関数がどれだけ多く存在するかを知ることは、多変数関数論においてLevi問題と同様の意味で重要な問題である。これに関してはBoutet de Monvelの埋め込み定理などが有名である。

定理4.（Boutet de Monvel）5次元以上のコンパクトな強擬凸CR多様体Mに対し、M上のC^∞級CR関数$u_1, \cdots, u_N$が存在して、写像$(u_1, \cdots, u_N)$はMを$\mathbb{C}^N$に埋め込む。

$\dim M = 3$のときはRossiによる反例がある。

Rossiの反例：（Proc. Conf. Complex Analysis 1965）

$$M = S^3 = \{ z \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = 1 \} \text{ に対し}$$

$$L_t := \bar{z}_2 \frac{\partial}{\partial z_1} - \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial z_2} + t \left(z_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - z_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \right)$$

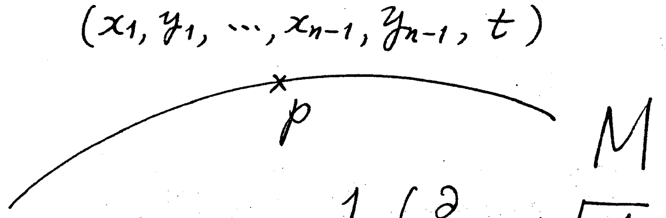
によって生成されるCR構造は、$t \neq 0$のとき$\mathbb{C}^N$に埋め込むことはできない。（∵ CR関数の対蹠点における値が同じになってしまう）

一方では次の埋め込み定理がある。（Proc. Symp. 43, 1985）

定理5. Mをコンパクトな3次元強擬凸多様体とする。$\bar{\partial}_b$の$L_2(M)$における閉拡張の値域が閉集合であれば、Mは$\mathbb{C}^N$に埋め込める。

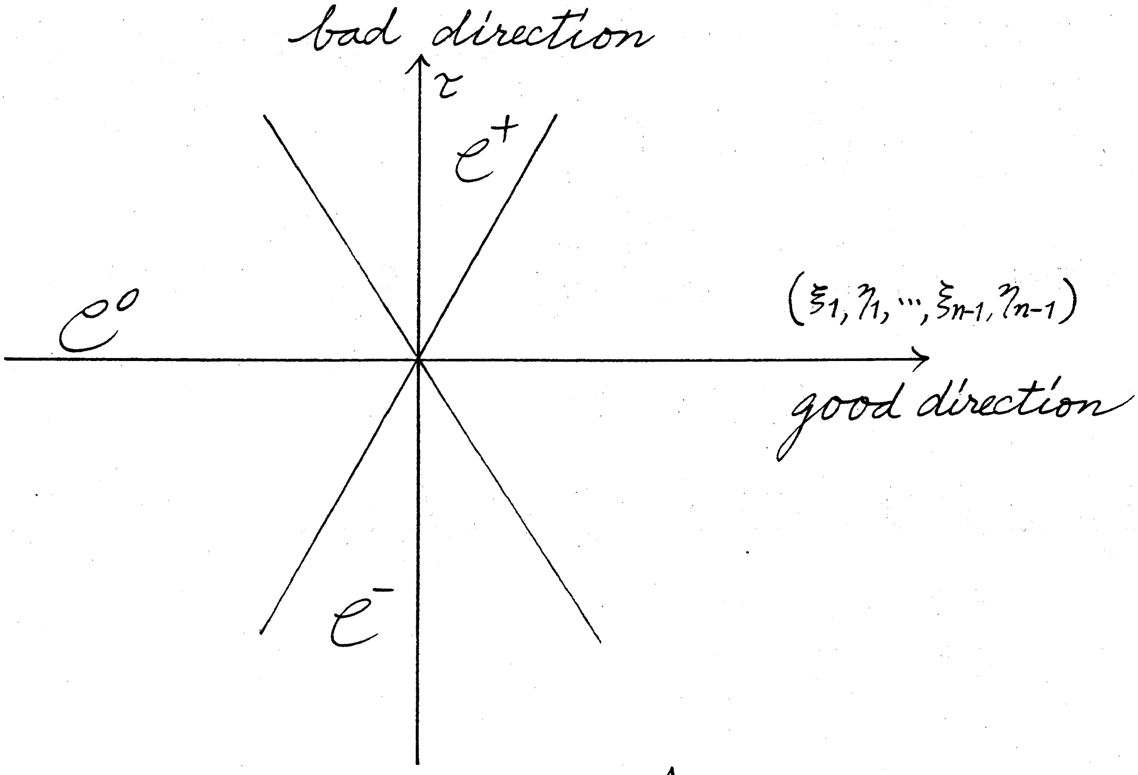
定理5の証明は$\bar{\partial}_b$に対するノイマン作用素の局所正則性に帰着するが、それを実行するには超局所解析の方法が有効である。その理由は大略、$\bar{\partial}_b$作用素が二種類の方向の微分を含むからである。一つは$T_M^{1,0} + \overline{T_M^{1,0}}$方向で、$\bar{\partial}_b$は超局所的にはこの部分空間を含む錐体上で楕円

型である。これはいわば'良い方向'である。言いかえれば $T_M^{1,0}+\overline{T_M^{1,0}}$ の零化空間である一次元の余接方向（=:悪い方向）以外では $\bar\partial_b$ は楕円型である。



$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y_j}\right)\Big|_p \in T^{1,0}_{M,p}$$

$$\Downarrow$$



$$u \sim u^0 + u^+ + u^-, \quad \operatorname{supp}\widehat{u^\pm} \subset \mathcal{C}^\pm$$
$$\widehat{u^0}\,\big|\,\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^- = 0$$

上図の如く悪い方向を正負に分解して考え、$\mathcal{J}$と同様の方法で（すなわち $\|f\varphi\|_\varepsilon$ の代りに $\|f^{\pm}\varphi\|_\varepsilon$ が評価されるという条件によって）符号つき乗数イデアル $\mathcal{J}^{\pm}$ を定義する。$\mathcal{J}^{\pm}$ の基本的性質は以下の通りである。

$\mathcal{J}^+$ ： $\sqrt[\mathbb{R}]{\mathcal{J}^+} = \mathcal{J}^+$

（M上の任意のRiemann計量に対して）

$$\det E \in \mathcal{J}^+$$

Eに付随する$(1,1)$形式を $\sum c_{ij}\,\omega_i \wedge \overline{\omega_j}$ とすると、

$f_1, \cdots, f_p \in \mathcal{J}^+$ ならば

$$\mathrm{coeff.}\left(\partial_b f_1 \wedge \cdots \wedge \partial_b f_p \wedge \left(\sum c_{ij}\,\omega_i \wedge \overline{\omega_j}\right)^{n-p-1}\right) \in \mathcal{J}^+.$$

$\mathcal{J}^-$ ： $\sqrt[\mathbb{R}]{\mathcal{J}^-} = \mathcal{J}^-$

$$d_{ij} = \left(\sum_{k \neq i} c_{kk}\right)\delta_{ij} - c_{ij}$$ とおくと

$$\det(d_{ij}) \in \mathcal{J}^-$$

I_k と同様の方法で $I_k^{\pm}$ を定義すると、（$I_k^{\pm} = I_k^{\pm}(x),\ x \in M$）

$$\begin{array}{ccc} I_0^+ & \subset & I_0^- \\ \vdots & & \vdots \\ I_k^+ & \subset & I_k^- \end{array}$$

である。

ϑ^+ と ϑ^- は互に双対的であり、ϑ^+ の零点集合が曲線ならば ϑ^- の零点集合は $n-2$ 次元である。

以下の諸結果はこれらの方向ごとの滑らかさを継ぎあわせることによって得られたものである。(Proc. Symp. 43, '85, Duke M. J. 53, '86)

<u>定理6.</u> M を5次元以上のコンパクトな擬凸CR多様体とする。このとき

$$\exists k \in \mathbb{Z}^+ \text{ s.t. } \forall x \in M \quad 1 \in I_k^+(x) \implies \exists \varepsilon, C > 0 \text{ s.t.}$$

$$\forall \varphi \in \Gamma(\overline{T_M^{1,0}}^{*}) \quad \|\varphi\|_\varepsilon^2 \le C\left(\|\bar\partial_b \varphi\|^2 + \|\bar\partial_b^* \varphi\|^2 + \|\varphi\|^2\right).$$

<u>定理7.</u> 擬凸なCR多様体 M に対し、以下を仮定する。

(a) $\bar\partial_b$ の値域は閉集合である。

(b) ある点 $x_0 \in M$ に対し、$1 \in I_k(x_0)$ なる k が存在する。

このとき x_0 の近傍 U と正数 ε が存在して、

'$\zeta, \zeta' \in C_0^\infty(U)$, $\operatorname{supp}\zeta$ の近傍で $\zeta' = 1$

$u \perp \operatorname{Ker} \bar\partial_b$, $\zeta' \bar\partial_b u \in H_s$'

ならば $u \in H_{s+\varepsilon}$ であり、

$$\|\zeta u\|_{s+\varepsilon} \le C_s \left(\|\zeta' \bar\partial_b u\|_s + \|\bar\partial_b u\|\right)$$

が成り立つ。ただし H_s は Sobolev 空間、$\| \ \|_s$ は Sobolev ノルムを表す。

<u>定理8.</u> $M \subset \mathbb{C}^N$ が解析集合の境界をなすコンパクト擬凸CR多様体(C^∞級)ならば $\bar\partial_b$ は閉じた値域($\subset L^2$)をもつ。