数理解析研究所講究録
1059巻 1998年 36-39

ウェーブレット変換と調和解析（球面上の場合）

奈良女子大学理学部数学科　森藤紳哉 (SHINYA MORITOH)

以下は Professor Boris Rubin (Hebrew University) との共同研究である。$\mathbb{R}^n$ 上の Riesz potential of order α を想起する。

$$(1)\qquad (I^{\alpha}\phi)(x) = 1/\gamma_n(\alpha)\int_{\mathbb{R}^n}\phi(y)|x-y|^{\alpha-n}dy,\ x\in\mathbb{R}^n,\ 0<Re\alpha<n$$

ここで $\gamma_n(\alpha)=\pi^{n/2}2^{\alpha}\Gamma(\alpha/2)/\Gamma((n-\alpha)/2)$. $Y_{j,k}(j=0,1,2,...,\ k=1,2,...,d_n(j))$ を球面調和多項式、$d_n(j)$ を次数 j の球面調和多項式 $Y_{j,k}$ の個数とする。すると $\{Y_{j,k}|j=0,1,2,...,\ k=1,2,...,d_n(j)\}$ は $L_2(S^n)$ の完全正規直交系をなす。単位球面 S^n 上の Riesz potential of order α は次のように定義され展開される。

$$(2)\qquad (I^{\alpha}\phi)(x) = c_{n,\alpha}\int_{S^n}(1-x\cdot y)^{(\alpha-n)/2}\phi(y)dy,\ x\in S^n,\ 0<Re\alpha<n,$$

$$c_{n,\alpha}=\pi^{-n/2}2^{-(n+\alpha)/2}\Gamma((n-\alpha)/2)/\Gamma(\alpha/2).$$

$$I^{\alpha}\phi\sim\sum_{j,k}m_j(\alpha)\phi_{j,k}Y_{j,k},$$

$$m_j(\alpha)=\Gamma(j+(n-\alpha)/2)/\Gamma(j+(n+\alpha)/2).$$

作用素 (2) に付随した球面上のウェーブレット変換の自然な構成を得たい。

Definition 1. 区間 $(0,\infty)$ 上の函数 w が

$$c_{\alpha,w}\equiv\int_0^{\infty}w(s)s^{-1+(n-\alpha)/2}ds\neq 0$$

を満たすとすると函数 ϕ の球面上のウェーブレット変換は

$$(W\phi)(x,t)=t^{-n/2}\int_{S^n}w((1-x\cdot y)/t)\phi(y)dy,\ x\in S^n,\ t>0$$

で定義される。函数 w をウェーブレットと呼ぶ。

すると

(3) $$(I^\alpha \phi)(x) = c_{n,\alpha}/c_{\alpha,w} \int_0^\infty (W\phi)(x,t)dt/t^{1-\alpha/2},\ x \in S^n.$$

次が成立することが期待される。

(4) $$\phi(x) = a_1 \int_0^\infty (W\phi)(x,t)dt/t,\ x \in S^n,$$

(5) $$(I^\alpha)^{-1} f(x) \equiv a_2 \int_0^\infty (Wf)(x,t)dt/t^{1+\alpha/2}dt = \phi(x),\ x \in S^n \text{ for } f = I^\alpha \phi.$$

(4) は $\mathbb{R}^n$ 上の Calderón の再生公式の類似であり、(5) は fractional integral $f = I^\alpha \phi$ の逆である。我々の第一の問題は (4) と (5) の L_p-空間 $(1 \leqq p \leqq \infty)$ のコンテキストでの正当化である。

Definition 2.

$$(I^\alpha_{0+} f)(x) = 1/\Gamma(\alpha) \int_0^x (x-y)^{\alpha-1} f(y)dy,$$
$$(I^\alpha_{+} f)(x) = 1/\Gamma(\alpha) \int_{-\infty}^x (x-y)^{\alpha-1} f(y)dy$$

を 1 次元 fractional integral operators とする。(5) の truncated integral を

$$(T^\alpha_\epsilon f)(x) = a_2 \int_\epsilon^\infty (Wf)(x,t)dt/t^{1+\alpha/2}$$

で定義する。

Theorem 1. 区間 $(0,\infty)$ 上の函数 w が次の条件 (C) を満たすとする。

(C) $$\left\{ \begin{array}{l} c_{\alpha,w} \equiv \int_0^\infty w(s) s^{-1+(n-\alpha)/2} ds \neq 0, \\ 1/s(I^{\alpha/2+1}_{0+} \tilde{w})(s) \in L_1(0,\infty),\ \text{ここで}\ \tilde{w}(s) \equiv s^{n/2-1} w(s). \end{array} \right\}$$

すると

$$T^\alpha_\epsilon (I^\alpha \phi) \to \phi \text{ in } L_p \text{ as } \epsilon \to 0.$$

更に次の条件 (C') から 条件 (C) が導かれる。

(C') $$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^\infty s^\beta |\tilde{w}(s)| ds < \infty \text{ for some } \beta > 1/2 Re\alpha\ \text{そして} \\ \int_0^\infty s^j \tilde{w}(s) ds = 0 \text{ for } j = 0,1,2,...,[1/2 Re\alpha]. \end{array} \right\}$$

球面上のソボレフ空間の特徴付けは次の通り。

Theorem 2. $0 < \alpha < n$ そして $1 \leqq p \leqq \infty$ とする。次は同値。

1) $f \in W_p^\alpha(S^n)$,

2) $f = I^\alpha \phi$ *for some* $\phi \in L_p(S^n)$,

3) $\sup_{\epsilon > 0} \| \int_\epsilon^\infty (Wf)(x,t) dt / t^{1+\alpha/2} \|_{L_p(S^n)} < \infty$.

これらの定理の証明の概略を述べる。

Lemma 1. $\phi \in C(S^n)$ とし $(1-t^2)^{n/2-1} a(t) \in L_1(-1,1)$ とする。すると

$$\int_{S^n} a(x \cdot y) \phi(y) dy = \sigma_{n-1} \int_{-1}^1 a(\tau)(M_\tau^0 \phi)(x)(1-\tau^2)^{n/2-1} d\tau,$$

ここで $\sigma_{n-1} = |S^{n-1}| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ そして $(M_t^0 \phi)(x) = (1-t^2)^{(1-n)/2}/\sigma_{n-1} \cdot \int_{x \cdot y = t} \phi(y) dy$.

このレンマは spherical convolution type の積分を区間 $[-1,1]$ 上の 1 次元の積分として表現するのに用いられる。球面上のウェーブレット変換は spherical convolution type の積分として定義されたことを想起する。

Lemma 2.

$$(M_t^0 \phi)(x) = \sum_{j,k} j! \Gamma(n/2)/\Gamma(j+n/2) P_j^{(n/2-1,n/2-1)}(t) \phi_{j,k} Y_{j,k}(x) \ \mathit{in}\ L_2(S^n),$$

ここで $P_\cdot^{(\cdot,\cdot)}$ は *Jacobi* 多項式を表す。

Definition 3. 作用素 M_t^0 を拡張して

$$(M_t^\gamma \phi)(x) = \sum_{j,k} j! \Gamma(n/2+\gamma)/\Gamma(j+n/2+\gamma) P_j^{(n/2+\gamma-1,n/2-\gamma-1)}(t) \phi_{j,k} Y_{j,k}(x),$$

ここで $t \in [-1,1]$ そして $Re\gamma > -n/2$. これは $t \to 1$ の時 approximate identity とみなすことができる。

鍵になるレンマは次の通り。

Lemma 3. $0 < Re\alpha < n$, $1 \leqq p \leqq \infty$ そして $\phi \in L_p(S^n)$ に対して $f = I^\alpha \phi$ とする。この時

$$(1+\tau)^{n/2-1}(M_\tau^0 f)(x) = (I_+^{\alpha/2} h_{x,\phi})(\tau),$$

ここで $h_{x,\phi}(t) = (\Gamma(n/2)/\Gamma((n+\alpha)/2))(t+1)^{(n-\alpha)/2-1}(M_t^{\alpha/2}\phi)(x)$.

Theorem 1 の証明は本質的にはこのレンマを用いて遂行される。条件 (C') から条件 (C) が従うことは fractional integral の一般論から分かる。

Remark 1. $\mathbb{R}^n$ 上の *Calderón* の再生公式を想起する。$u \in L_1(\mathbb{R}^n)$ を *radial* な実数値函数とし、条件$\int_0^\infty [\hat{u}(t\xi)]^2 dt/t = 1$, $\xi \neq 0$ を満たすとすると、

$$f(x) = \int_0^\infty (f * u_t * u_t)(x) dt/t \ in \ L_2(\mathbb{R}^n),$$

ここで $u_t(x) = (1/t^n)u(x/t)$ とし、記号 $*$ は *convolution* を表す。*Calderón* の再生公式を用いて種々の函数空間のアトム分解が得られる。

次の文献表は完全からほど遠い。文献 1, 2, 3, 4 は本稿と密接な繋がりがある。文献 5 では超局所解析的な視点のもとにユークリッド空間上のウェーブレット変換が定義されている。文献 6, 7 では本稿とは異なった観点から球面上のウェーブレットが考察されている。

References

1. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some properties of fractional integrals, I*, Math. Z. **27** (1928), 565–606.
2. M. Taibleson, *On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-space, I*, J. Math. Mech. **13** (1964), 407–480.
3. H. C. Greenwald, *Lipschitz spaces of distributions on the surface of unit sphere in Euclidean n-space*, Pacific J. Math. **70** (1977), 163–176.
4. B. Rubin, *Fractional integrals and potentials*, Addison Wesley Longman, Essex, England, 1996.
5. S. Moritoh, *Wavelet transforms in Euclidean spaces — their relation with wave front sets and Besov, Triebel-Lizorkin spaces —*, Tôhoku Mathematical Journal **47** (1995), 555–565.
6. S. Dahlke, *Multiresolution Analysis, Haar Bases and Wavelets on Riemannian Manifolds*, Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications (C. K. Chui, L. Montefusco, and L. Puccio, eds.), Academic Press, 1994.
7. S. Dahlke and P. Maass, *Continuous Wavelet transforms with applications to analyzing functions on spheres*, The Journal of Fourier Analysis and Applications **2** (1996), 379–396.