

Estermann ゼータ関数のある二乗平均について

名大多元数理 神谷 諭一 (Yuichi Kamiya)

複素変数  $s$  を  $s = \sigma + it$  とおく. 自然数  $q$  を法とする Dirichlet 指標を  $\chi$  とし, 対応する Dirichlet  $L$  関数を  $L(s, \chi)$  と記す.  $L(s, \chi)$  の critical line, 即ち  $\sigma = 1/2$  上における挙動について多くの結果が示されているが, ここでは Montgomery による四乗平均に関する結果に注目することとする. Montgomery は [10] において

$$\sum_{\chi}^* \int_{-T}^T |L(\sigma + it, \chi)|^4 dt \ll \phi(q)T(\log(qT))^4 \tag{1}$$

が  $T \geq 2$  なる  $T$  と  $q$  と  $1/2 - 1/\log(qT) \leq \sigma \leq 1/2 + 1/\log(qT)$  なる  $\sigma$  に関して一様に成り立つことを示した. 但し,  $\phi$  は Euler 関数とし  $\sum_{\chi}^*$  は法  $q$  の原始指標全てをわたる和を意味することとする. この評価は, Lavrik [9] による Dirichlet  $L$  関数の近似関数等式を用いて (1) の左辺を Dirichlet 多項式の四乗平均の評価に帰着させることによって証明される. 詳しくは Montgomery [10] の chapter 10 を参照されたい. (1) の左辺は  $L^2(s, \chi)$  の二乗平均と見ることも出来る.  $L^2(s, \chi)$  は約数関数を  $d(n)$  と記せば  $\sigma > 1$  においては

$$L^2(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)d(n)}{n^s}$$

と表されることに注意する.

$k$  は自然数とし  $h$  は  $k$  と互いに素な自然数とする.  $e(x) = \exp(2\pi ix)$  と記す. Estermann ゼータ関数は  $\sigma > 1$  において

$$E(s; h/k) = \sum_{n=1}^{\infty} e\left(\frac{hn}{k}\right) \frac{d(n)}{n^s}$$

で定義される. Estermann [1] において,  $E(s; h/k)$  は  $s = 1$  における 2 位の極を除いて正則に解析接続され, 関数等式

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-s} \Gamma(s)E(s; h/k) &= \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{s-1} \Gamma(1-s) \\ &\times \left\{ \frac{E(1-s; \bar{h}/k)}{\sin(\pi s)} - \frac{\cos(\pi s)}{\sin(\pi s)} E(1-s; -\bar{h}/k) \right\} \end{aligned}$$

を満たすことが証明された. 但し,  $\bar{h}$  は  $h\bar{h} \equiv 1 \pmod{k}$  を満たす剰余類とする.

Estermann ゼータ関数は, Jutila [4] [5], Kiuchi [8] での研究において重要な役割を果たしている. また, その  $s = 0$  における値の性質については Ishibashi [3] において深く調べられている. Jutila and Motohashi [6] では, Estermann ゼータ関数の二乗平均がスペクトル理論の方法から研究されている.

今回, 次の様な評価を得ることができた.

**Theorem 1**  $A > 49$  とする. このとき,  $k$  について一様に

$$\sum_{h=1}^k \int_{[-T, T] - [-A, A]} |E(1/2 + it; h/k)|^2 dt \ll kT(\log(kT))^4, \quad T \rightarrow \infty,$$

が成り立つ. 但し  $\sum_{h=1}^k$  は  $k$  と互いに素な  $h$  についての和を意味する.

この評価は, ある意味で Dirichlet  $L$  関数に関する (1) の評価に対応すると言えよう.

Theorem 1 を証明するために, 先ず  $E(s; h/k)$  の近似関数等式を構成する. その構成は Good [2] による方法に基づく. Good は [2] において cusp form に付随する  $L$  関数の近似関数等式を作り, それを二乗平均の評価に応用している. 筆者は Good の方法は他の  $L$  関数にも応用できると感じ, [7] において原始指標で twist した  $L$  関数の二乗平均の評価を得た. 今回,  $E(s; h/k)$  に Good の方法を用いたわけだが, 異なる点について述べよう. 第一に,  $E(s; h/k)$  が極を持つことによる複雑化がある. 第二に, Theorem 1 において  $k$  に制限が付かないよう工夫する必要がある. 前者については, 後で定義する  $g(s)$  なる関数の導入により多少計算が楽になる. 後者については, Good の用いた積分路を新しく取り直すという議論をする.

さて, 必要な記号を定義しよう.

$\varphi(\rho)$  は  $[0, \infty)$  上の実数値関数で  $C^\infty$  級であり, かつ,  $0 \leq \rho \leq 1/2$  に対しては  $\varphi(\rho) = 1$  を満たし,  $\rho \geq 2$  に対しては  $\varphi(\rho) = 0$  を満たすものとする. このような  $\varphi$  の集合を  $\mathcal{K}$  で表す.  $\varphi_0(\rho) = 1 - \varphi(1/\rho)$  とおけば  $\varphi_0$  は  $\mathcal{K}$  に属することが分かる.  $\varphi^{(j)}$  は  $\varphi$  を  $j$  回微分したものとす.  $\tau > 0$  とし,  $t$  は十分大きな  $C$  に対し  $|t| > C$  を満たすとし,  $j = 0, 1, 2, \dots$  は  $j^2 < |t|$  を満たすとす. このような  $\tau, t, j$  に対し  $\gamma_{1,j}(s, \tau), \gamma_{2,j}(s, \tau)$  を

$$\gamma_{1,j}(s, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{F}} \frac{g(s+w)\Gamma(s+w)}{g(s)\Gamma(s)} \frac{\tau^w \exp\left(-i\frac{\pi}{2}w \operatorname{sgn}(t)\right)}{w \cdots (w+j)} dw$$

$$\gamma_{2,j}(s, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\sin(\pi s)}{\cos(\pi s)} \int_{\mathcal{F}} \frac{g(1-s-w)\Gamma(s+w)}{g(1-s)\Gamma(s)} \frac{\cos(\pi(s+w))}{\sin(\pi(s+w))} \frac{\tau^w \exp\left(-i\frac{\pi}{2}w \operatorname{sgn}(t)\right)}{w \cdots (w+j)} dw$$

で定義する. 但し,  $g(s) = (s+1)s(s-1)^2$ ,  $\operatorname{sgn}(t) = t/|t|$  とおき,  $\mathcal{F}$  は  $|w| = \sqrt{|t|}$  で定義される積分路とする.

Good の方法を用いて、次の様な  $E(s; h/k)$  の近似関数等式を得た。

**Theorem 2**  $l$  は  $l \geq 7$  なる整数とする。  $0 \leq \sigma \leq 1$ ,  $|t| > l^2$  とし  $y = k|t|/(2\pi)$  とおく。このとき、固定した  $\varphi \in \mathcal{K}$  に対して

$$\begin{aligned} E(s; h/k) = & \sum_{n \leq 2y} e\left(\frac{hn}{k}\right) \frac{d(n)}{n^s} \sum_{j=0}^l \varphi^{(j)}\left(\frac{n}{y}\right) \left(-\frac{n}{y}\right)^j \gamma_{1,j}(s, |t|^{-1}) \\ & - \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{2s-1} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)} \frac{\cos(\pi s)}{\sin(\pi s)} \sum_{n \leq 2y} e\left(\frac{-\bar{h}n}{k}\right) \frac{d(n)}{n^{1-s}} \\ & \quad \times \sum_{j=0}^l \varphi_0^{(j)}\left(\frac{n}{y}\right) \left(-\frac{n}{y}\right)^j \gamma_{2,j}(1-s, |t|^{-1}) \\ & + \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{2s-1} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)} \frac{1}{\sin(\pi s)} \sum_{n \leq 2y} e\left(\frac{\bar{h}n}{k}\right) \frac{d(n)}{n^{1-s}} \varphi_0\left(\frac{n}{y}\right) \\ & + R(s) \end{aligned}$$

とかけ、 $\sigma$  と  $k$  に対し一様に

$$\sum_{h=1}^k |R(s)|^2 \ll k|t|^{1-l} y^{1-2\sigma} (\log y)^3, \quad |t| \rightarrow \infty,$$

が成り立つ。

さて  $\gamma_{a,j}$  ( $a = 1, 2$ ) について、次の様な性質を示すことができる。

(a)  $|t| > C$  のとき

$$\gamma_{a,0}(s, \tau) \equiv 1$$

となる。

(b)  $0 \leq \sigma \leq 1$  なる  $\sigma$  に対して一様に

$$\gamma_{a,j}(s, |t|^{-1}) \ll \begin{cases} |t|^{-(j+1)/2} & \text{for odd } j, \\ |t|^{-j/2} & \text{for even } j \end{cases}$$

となる。

これらの性質を Theorem 2 の公式の右辺に代入して計算すると、次の corollary を導くことができる。

**Corollary 1**  $0 \leq \sigma \leq 1$ ,  $|t| > 49$  とし  $y = k|t|/(2\pi)$  とおく. 固定した  $\varphi \in \mathcal{K}$  に対して

$$\begin{aligned} E(s; h/k) &= \sum_{n \leq 2y} e\left(\frac{hn}{k}\right) \frac{d(n)}{n^s} \varphi\left(\frac{n}{y}\right) \\ &\quad - \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{2s-1} \frac{\Gamma(1-s) \cos(\pi s)}{\Gamma(s) \sin(\pi s)} \sum_{n \leq 2y} e\left(\frac{-\bar{h}n}{k}\right) \frac{d(n)}{n^{1-s}} \varphi_0\left(\frac{n}{y}\right) \\ &\quad + \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{2s-1} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s) \sin(\pi s)} \frac{1}{\sin(\pi s)} \sum_{n \leq 2y} e\left(\frac{\bar{h}n}{k}\right) \frac{d(n)}{n^{1-s}} \varphi_0\left(\frac{n}{y}\right) \\ &\quad + F(s) \end{aligned}$$

とかけ,  $\sigma$  と  $k$  に対し一様に

$$\sum_{h=1}^k |F(s)|^2 \ll k|t|^{-1} y^{1-2\sigma} (\log y)^3, \quad |t| \rightarrow \infty,$$

が成り立つ.

Corollary 1 の右辺の第 3 項は,  $1/\sin(\pi s)$  の性質から,  $|t|$  を大きくするとき指数関数の order で減少する. このことに注意し, Corollary 1 で  $s$  を  $1/2 + it$  に制限すれば次の corollary を得る.

**Corollary 2**  $|t| > 49$  とする.  $\kappa = 2\pi/k$  とおく. 固定した  $\varphi \in \mathcal{K}$  に対して

$$\begin{aligned} E(1/2 + it; h/k) &= \sum_{n \leq 2|t|/\kappa} e\left(\frac{hn}{k}\right) \frac{d(n)}{n^{1/2+it}} \varphi\left(\frac{\kappa n}{|t|}\right) \\ &\quad + i\kappa^{2it} \frac{\Gamma(1/2 - it) \sinh(\pi t)}{\Gamma(1/2 + it) \cosh(\pi t)} \sum_{n \leq 2|t|/\kappa} e\left(\frac{-\bar{h}n}{k}\right) \frac{d(n)}{n^{1/2-it}} \varphi_0\left(\frac{\kappa n}{|t|}\right) \\ &\quad + G(1/2 + it) \end{aligned}$$

とかけ,  $k$  に対し一様に

$$\sum_{h=1}^k |G(1/2 + it)|^2 \ll k|t|^{-1} (\log(k|t|))^4, \quad |t| \rightarrow \infty,$$

が成り立つ.

ここで, Good の方法の利点についていくつか述べてみよう. 第一に, 適応範囲が広いことが挙げられる. 第二に, 重み  $\varphi, \varphi_0$  をつけることにより誤差項の  $|t|$  に関する order を小さくできるという利点がある. これは Corollary 2 において  $G(1/2 + it)$  が  $|t|$  の負巾の order となっていることからみとれる. 第三に, 誤差項は, 複雑ではあるが, ある積分で

表示できることが挙げられる. これにより Theorem 2 において  $\sum_{h=1}^{*k} |R(s)|^2$  を  $k$  について一様に評価することができる.

Corollary 2 によって Theorem 1 の左辺は Dirichlet 多項式の二乗平均に帰着された. あとは  $\varphi$  の積分に関する若干の lemma を用いて計算すれば (この計算は [7] での方法と同じである) Theorem 1 が得られる.

**Remark** 1997 年 11 月に京都大学の数理科学研究所で開かれた整数論のシンポジウムで, 筆者がこの内容について話したとき, 富山大学の江上繁樹先生に,  $k$  が素数のときは Theorem 1 における評価は (1) と Riemann  $\zeta$  関数  $\zeta(s)$  の 4 乗平均の評価から導くことができる, という助言をいただきました. 実際,  $p$  を素数とし  $W(\chi)$  を Gauss 和とすると

$$E(s; h/p) = \frac{1}{\phi(p)} \sum_{\chi(\bmod p)} \chi(h) L^2(s, \chi) W(\bar{\chi}) + \frac{1}{p^s} \left(2 - \frac{1}{p^s}\right) \zeta^2(s) \quad (2)$$

とかけるので

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^p \int_{-T}^T |E(1/2 + it; h/p)|^2 dt &\ll \frac{p}{\phi(p)} \sum_{\chi(\bmod p)} \int_{-T}^T |L(1/2 + it, \chi)|^4 dt \\ &\quad + \int_{-T}^T |\zeta(1/2 + it)|^4 dt \\ &\ll pT(\log(pT))^4 \end{aligned}$$

を得る.  $k$  が一般の合成数である場合, (2) に対応する  $E(s; h/k)$  の表示は非常に複雑になるので, 上記の方法で Theorem 1 の様な評価を得るのは難しいと感ずる.

**Acknowledgements** この問題は, 山口大学の木内功先生からいただきました. また, 木内先生にはたくさんの助言, 激励をいただきました. 木内先生に深く感謝いたします. 名古屋大学の谷川好男先生, 松本耕二先生にもたくさんの助言, 激励をいただきました. 両先生に深く感謝いたします.

## 参考文献

- [1] T. Estermann, On the representation of a number as the sum of two products, Proc. London Math. Soc. (2) **31** (1930), 123–133.
- [2] A. Good, Approximative Funktionalgleichungen und Mittelwertsätze für Dirichletreihen, die Spitzenformen assoziiert sind, Comment. Math. Helvetici **50** (1975), 327–361.

- [3] M. Ishibashi, The value of the Estermann zeta functions at  $s = 0$ , *Acta Arith.* **73** (1995), 357–361.
- [4] M. Jutila, On exponential sums involving the divisor function, *J. Reine Angew. Math.* **355** (1985), 173–190.
- [5] ———, Lectures on a method in the theory of exponential sums, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1987.
- [6] M. Jutila and Y. Motohashi, Mean value estimates for exponential sums and  $L$ -functions : a spectral theoretic approach, *J. Reine Angew. Math.* **459** (1995), 61–87.
- [7] Y. Kamiya, Zero density estimates of  $L$ -functions associated with cusp forms, (Submitted for publication).
- [8] I. Kiuchi, On an exponential sum involving the arithmetic function  $\sigma_a(n)$ , *Math. J. Okayama Univ.* **29** (1987), 193–205.
- [9] A. F. Lavrik, An approximate functional equation for the Dirichlet  $L$ -function, *Trans. Moscow Math. Soc.* **18** (1968), 101–115.
- [10] H. L. Montgomery, Topics in multiplicative number theory, LNM 227, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971.

Graduate School of Mathematics

Nagoya University

Chikusa-ku, Nagoya 464-01

Japan