数理解析研究所講究録
1060巻 1998年 185-209

類体論の源流

三宅克哉（東京都立大学理学研究科）

§1　源流クロネッカー（1823 - 1891）

類体論の直接の源流はクロネッカーである．彼は特にアーベルとクムマーの影響下で2種類の問題を提示した：「アーベル多項式の特徴付け」と，いわゆる「単項化定理」である．

1853年，29歳のクロネッカーは短い論文 [Kr-1853] で次の主張を提示した．

クロネッカー－ヴェーバーの定理：有理整数係数のアーベル方程式の根は必ず1の冪乗根の有理整数係数の有理関数として表される．

ただし，この時点では，クロネッカーはガロア群が巡回群であるような代数方程式を「アーベル方程式」と呼んでおり，後に [Kr-1877] ではこれを「単純アーベル方程式」，またガロア群が可換群であるものを「アーベル方程式」と呼ぶことにした．この論文で説明されているように，どちらの定義を取ってもこの定理の含むところは変わらない．彼はこの定理を "Satz" と呼んでいるが，証明は結局はヴェーバーの論文 [We-1887] を待つことになる．

また [Kr-1853] では，$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ に係数を持つアーベル方程式の根はレムニスケートの等分によって同様に扱うことが出来る，と述べ，さらなる一般化をも示唆している．しかし，この時点で果たしてクロネッカーがどれほど踏み込んだ考察を行っていたかは不明である．しかし1857年になると，短いが一段と楕円関数に踏み込んだ論文『虚数乗法が生じる楕円関数について』（[Kr-1857a]）を著している．これと，この年にディリシュレに宛てた手紙 [Kr-1857b] からみて，いわゆる「クロネッカーの青春の夢」がこの頃に描かれたものと思われる．数学上の予想ないし研究課題としての「クロネッカーの青春の夢」は，彼がデデキントに宛てた1880年の手紙（[Kr-1880b]）のなかで，彼が「私のいちばんのお気に入りの青春の夢」〈... um meinen liebsten Jugendtraum, ...〉と呼んだ，おおむね次のような数学の問題（予想）を指す：

クロネッカーの青春の夢：虚2次体上のアーベル多項式の根は，その2次体を虚数乗法に持つ楕円関数の「特異モデュライ」と周期の等分点での値ですべて与えられる．

虚数乗法についてはワイエルシュトラスの $\wp$ 関数に基づく説明を次の節で簡単に与える．ここではアーベルやクロネッカー [Kr-1857a] が扱った楕円関数とそのモデュライに触れておく．

アーベルは，まず楕円積分が特に対数関数で積分されてしまう場合を連分数に基づく手法で決定した（[Ab-1826b]）が，次の瞬間には，素直に楕円積分の逆関数に注目し，またコーシーが展開していた複素線積分を取り入れ，たちまち「楕円関数論」を構築し

てしまう．論文 [Ab-1827] で彼はそれを次のように定義している：

$$\alpha = \int \frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}}, \qquad x = \varphi\alpha = \sin\theta .$$

このとき

$$\alpha = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

であり，c がこの楕円関数の「モデュラス（母数）」である．そして彼は特に次を見いだした：x と y が「微分方程式」

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-b^2y^2)}} = a\cdot\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

の「代数的解」である，すなわち，この全微分等式を与えるような代数的な関係式を満たすならば，a は，有理数 μ と μ', $\mu \geq 0$, によって

$$a = \mu' + \sqrt{-\mu}$$

と表されなければならない；しかも $\mu \neq 0$ ならば b^2 も c^2 も a とかかわる特殊な数でなければならない．また他のいくつかとともに次の例がアーベルによって与えられている：

$$a = \sqrt{-5}, \qquad b^2 = c^2 = -(2+\sqrt{5}+2\sqrt{2+\sqrt{5}})^2$$

（[Ab-1828] も参照のこと）．

一般に $\mu \neq 0$，$b^2 = c^2$ である場合に，対応する楕円関数は「虚数乗法を持つ」といわれる（後にクロネッカーが命名したものと思われる）．アーベルは，この楕円関数については，円関数（複素指数関数ないしは三角関数）と同様に，周期の「等分方程式」が根号で解けることを示した．また，アーベルも，後にクロネッカーも，この例の場合に $b^2 = c^2$ が「根号で得られる」ことに強く興味をひかれた；ガウスも示唆していない新しいものである！（この c がクロネッカーがいうところの $a = \sqrt{-5}$ に対する「特異モデュラス」である．）

一方，クロネッカーはヤコビ [Ja-1829] の記号を利用して，単に関数記号 $\sin am\,(u, \kappa)$ を用い，$n > 0$ に対して $\sin^2 am\,(\sqrt{-n}\cdot u, \kappa)$ が $\sin^2 am\,(u, \kappa)$ の有理関数である場合に，それが $\sqrt{-n}$ による虚数乗法を持つとした．このとき，κ がこの楕円関数のクロネッカーの「（特異）モデュラス」である．現在では「モデュラス」としては j 不変量をとる．クロネッカーの観察では，特に $k = \kappa^2$ が重要であり，k は体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-n}, j)$ 上6次の代数方定式の根である．また上記のアーベルの定義と対比すれば，

$$u = \alpha, \quad \kappa = c, \quad x = \varphi u = \sin am\,(u, \kappa)$$

である．

さて，クムマーは冪剰余の相互法則の自然な領域として円分体をとり，そこに「理想数」を導入して因子論を展開した．彼はこの理論が数学的に整合的に展開されることに全く疑いを持っていなかった．たとえば [Ku-1845] では，「このような理想複素数の導入は．．．ガウスが4次剰余を研究するに際し，$a+b\sqrt{-1}$ という形式の複素数を最初に導入したのと同じ，必然的な必要性でもある」と述べ，さらに [Ku-1847] では，当時周期律によって存在が予定されていたがまだ析出されていなかった元素の弗素を引き合いに出し，「いまだ析出されてはいないが，にもかかわらず元素に算入されている弗素は理想因数の類似となりえよう」と述べている（足立 [Ad-1984] を参照）．

一方，クロネッカーは，師でもあったクムマーとは異なった強固な数学観を持っていた．彼は理想数のような重要な概念に対しては「明確な数学的表現」を与えるべきであると考えた．そして 1857 年には，一般の有限次代数的数体における明快な因子論を多元斉次多項式を用いて展開していたようである（[Kr-1857b]；クムマーの証言が [Ku-1859, p.57] にある）．ただし，クロネッカーは，遅れて 1882 年になってようやくこれを出版した（[Kr-1882]；高木 [T-1948] の附録（三）に解説がある）．遅れた理由の1つに「単項化定理」〈die Frage der *zu associirenden Gattungen*〉を一般的に定式化するのに手間取ったとしている．これについては，まず虚2次体に関して著しい現象が観察された．彼は，論文 [Kr-1857a] とディリシュレへの手紙 [Kr-1857b] によって，虚数乗法が生じる楕円関数に基づいた分析結果を報告している．判り易く書かれている手紙 [Kr-1857b] によれば，後の展開から見れば必ずしも数学的に正確であるとはいえないが，彼の「発見」は次のようである：虚2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ の整数を虚数乗法に持つ楕円関数の（特異）モデュライ（の平方）を k とし，判別式が $-D$ である2元2次形式の類数（$\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ のイデアル類数）を H とするとき，

1．k は $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 上 H 次（[Kr-1857a] では正しく $6H$ 次としている）の冪根で解ける方程式の根である；

2．この方程式はアーベルが扱った性質を持つ：どの根を取っても，他の根はすべてその有理式で表され，ガロア群は可換である；

3．H 個のモデュライ k は判別式が $-D$ である2次形式の H 個の各類の2次形式と対応する；

4．無理数 k のある有理関数は，対応する2次形式に代わる「理想数」と見なせる；

等々．（これらについては，k の代わりに j-不変量を取るべきである．）

また論文 [Kr-1862] ではこのアーベル方程式の根の差積を検討し，後の不分岐性につながる考察を行っている．最終的には高木類体論によって，代数的数体の最大不分岐アーベル拡大がヒルベルトの類体と一致することが示されるが，これによって単項化定理は次のように述べられる：

単項化定理：有限次代数的数体のイデアルは，そのヒルベルト類体にまで持ち上げれば必ず単項イデアルになり，ヒルベルト類体の数によって表現される．

「クロネッカーの青春の夢」は最終的には高木 [T-1920a] によって類体論の応用として証明される．また「単項化定理」はアルティンが彼の「一般相互法則」（[Ar-1927]）を用いて群論化し（[Ar-1930]），それを受けて，フルトヴェングラー [Fu-1930] によって証明された．

ここで，まだ未解決の問題をひとつ提示しておこう．

問題：虚2次体 K に対し，そのヒルベルト類体の真に小さい部分体で，K のすべてのイデアルが単項化するもの存在するか？

最後にクロネッカーの「数学的な業績」について1点の注意を与えておく．一般的にいえば，何らかの業績が数学的なものとして評価されるためには，それが数学的に明確に定式化され，数学的な証明を具えなければならない．しかし，クロネッカーが書き残したものでこの節で触れたものの大半は，必ずしも数学的に明確に定式化されてはおらず，またそれに近い時点で彼によって数学的な証明が提示されたわけではない．したがって，何を彼の数学的な業績とするかは，場合によっては論議を呼ぶかも知れない．この節であげた3つの主張，「クロネッカー－ヴェーバーの定理」，「クロネッカーの青春の夢」および「単項化定理」は，いずれをとっても，結局は他の人達によって多くの時の積み重ねののちに証明された．これをもって「クロネッカーは幸運であった」というのも1つの評価であろう．しかし一方では，これら3つの主張のいずれもが，彼の先達の数学から，いわば「時代の声」として自然に浮かび上がるものであるとは思えない．例えば，それがクロネッカーの「数学的な未熟さ」ないしは「楽観主義」のもたらしたものであるとすることもできるだろう．それにしても，彼がこれらの数学的な現象のいかほどを，いかように見ていたのか，実に興味深いものがある．高木はクロネッカーを「預言者」と呼んでいる（[T-1948] の p.261 の脚註）．

§2　楕円関数の虚数乗法

この節では，歴史的な展開を離れ，ヴァイエルシュトラスの $\wp$ 関数を用いて楕円関数と虚数乗法を簡単に解説する．

2－1．楕円関数と周期の加群

楕円関数 $\varphi = \varphi(z)$ は全複素平面 $\mathbb{C}$ 上で有理型であって，$\mathbb{R}$ 上独立な2つの周期 ω_1 と ω_2 を持つ関数である；$\varphi(z) = \varphi(z+\omega_1) = \varphi(z+\omega_2)$，$\omega_1$，$\omega_2 \in \mathbb{C}^\times$，$\omega_2 \notin \mathbb{R}\omega_1$．このとき，各 $\omega \in \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ に対して $\varphi(z) = \varphi(z+\omega)$ となる．通常，必要なら ω_1 と ω_2 を取り換えて，$\tau = \omega_1/\omega_2$ の虚数部分 $\mathrm{Im}\,\tau$ が $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ となるように取っておく．楕円関数 φ が定数でない限り，その周期全体は適当な ω_1 と ω_2 によって $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ の形に表される．

逆に ω_1，$\omega_2 \in \mathbb{C}^\times$，$\omega_2 \notin \mathbb{R}\omega_1$，に対し，周期全体が丁度 $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ である楕

円関数が必ず存在する：

$$\wp(z) = \wp(z\,;\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} + \frac{1}{\omega^2}\right)\ ;$$

しかも，その導関数

$$\wp'(z) = -2\sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

も同じ周期を持つ楕円関数であり，両者の間に関係式

$$\wp'(z)^2 = 4\,\wp(z)^3 - g_2\,\wp(z) - g_3, \qquad g_2 = 60\sum_{\omega\in\Omega}{}' \frac{1}{\omega^4},\quad g_3 = 140\sum_{\omega\in\Omega}{}' \frac{1}{\omega^6}$$

が成り立つ；また，この３次式の判別式 $g_2{}^3 - 27\,g_3{}^2$ は０でない．さらに，ω_1 と ω_2 を周期に持つ楕円関数は，すべてこれら $\wp(z)$ と $\wp'(z)$ の有理式として表される．楕円関数とその周期全体の $\mathbb{Z}$ 加群 $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ とが見事に対応するわけである．

このように，楕円関数はその周期の $\mathbb{Z}$ 加群 Ω を定め，そのリーマン面は複素トーラス $\mathbb{C}/\Omega$ であり，コムパクトである；それはまた，自然なアーベル群の構造を持っている；Ω を周期に持つ楕円関数は自然に $\mathbb{C}/\Omega$ 上の有理型関数とみなされ，その全体は，対応するヴァイエルシュトラスの $\wp$ 関数により，$\wp(z)$ と $\wp'(z)$ の有理式の体 $\mathbb{C}(\wp, \wp')$ として与えられる．これが周期加群 Ω に対する楕円関数体である．

２－２．楕円関数体のモデュラス

上記のように周期を生成する ω_1 と ω_2 から定まる g_2 と g_3 を，それぞれ $g_2(\omega_1,\omega_2)$, $g_3(\omega_1,\omega_2)$ と書くとき，$\lambda\in\mathbb{C}$ に対して

$$g_2(\lambda\omega_1,\lambda\omega_2) = \lambda^4\,g_2(\omega_1,\omega_2), \qquad g_3(\lambda\omega_1,\lambda\omega_2) = \lambda^6\,g_3(\omega_1,\omega_2)$$

である．従って，$j(\omega_1,\omega_2) := g_2{}^3/(g_2{}^3 - 27\,g_3{}^2)$ については

$$j(\lambda\omega_1,\lambda\omega_2) = j(\omega_1,\omega_2)$$

となっている．よって特に $\lambda = 1/\omega_2$ と取れば，この $j(\tau,1) =: j(\tau)$ は $\tau = \omega_1/\omega_2$ の関数，すなわち複素上半平面上の関数とみなせる．しかもその値は $\mathbb{Z}$ 加群 Ω によって確定し，その生成元 ω_1, ω_2 の取り方にはよらない．従って，$SL_2(\mathbb{Z})$ の元 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ad - cd =1, が定める τ に対する１次分数変換 $A(\tau) = (a\tau+b)/(c\tau+d)$ によって $j(\tau)$ は不変である：$j(A(\tau)) = j(\tau)$, $A\in SL_2(\mathbb{Z})$．この値 $j(\tau)$ が楕円関数体 $\mathbb{C}(\wp, \wp')$ の不変量（母数，モデュラス）であり，この複素上半平面上の関数 $j(\tau)$ は楕円モデュラー関数と呼ばれる．

2－3．楕円関数体の同型

周期加群 Ω と Ω' に対応する楕円関数体を，それぞれ $\mathfrak{K}(\Omega)$, $\mathfrak{K}(\Omega')$ しよう．これらはコムパクトなリーマン面 $\mathbb{C}/\Omega$, $\mathbb{C}/\Omega'$ 上の有理型関数全体である．従って，２つの体 $\mathfrak{K}(\Omega)$ と $\mathfrak{K}(\Omega')$ の間の代数的な $\mathbb{C}$ 上の同型写像は２つのリーマン面 $\mathbb{C}/\Omega$, $\mathbb{C}/\Omega'$ の間の解析的な同型写像と対応する．このような同型写像 $f: \mathbb{C}/\Omega \to \mathbb{C}/\Omega'$ が与えられたとする；このとき，像の複素トーラス上のアーベル群の構造を用いて $-f(0)$ による平行移動をこれと結合して f と取り換えれば，結局は $f(0) = 0$ であるような同型写像が与えられたとしてよい．そこでこの f がこれら２つのリーマン面の０のおける接平面に引き起こす解析的な同型写像を考える．これは複素平面 $\mathbb{C}$ の自分自身への解析的な同型写像であり，しかも０を０に写すことから，定数倍 $z \mapsto \lambda z$, $(\lambda \in \mathbb{C}^\times)$ でなければならない．また特に $\lambda\Omega = \Omega'$ となっていなければならない．逆に，このような λ による定数倍 $z \mapsto \lambda z$ が２つの複素トーラスの０を０に写す解析的な同型写像を与えることは明らかである．（このとき，f は自動的にアーベル群としての同型写像にもなっている．）これらの周期加群 Ω と $\Omega' = \lambda\Omega$ に対応する前記の j の値を $j(\Omega)$, $j(\Omega')$ と書けば，明らかに $j(\Omega) = j(\Omega')$ となっている．このように，楕円関数体の j の値は同型な体に対して同一の値をとる．逆に $j(\Omega) = j(\Omega')$ となるときには，２つの体 $\mathfrak{K}(\Omega)$ と $\mathfrak{K}(\Omega')$ の間に代数的な $\mathbb{C}$ 上の同型写像が存在する．（例えば，岩澤 [Iw-1952] 参照のこと．）

2－4．虚数乗法

まず，ある楕円関数 $\varphi = \varphi(z)$ がある $\mathbb{Z}$ 加群 Ω に対する $\wp$, $\wp'$ と代数的な関係を持つとしよう．言い換えれば，φ は関数体 $\mathbb{C}(\wp, \wp')$ の上のある多項式 $F(X)$ に対して $F(\varphi) = 0$ となっている．そこで $\omega \in \Omega$ に対して，$F(\varphi)$ の係数に現れる $\wp$, $\wp'$ および φ の変数 z を一斉に $z + \omega$ で置き換える．このとき，係数に現れる $\wp$, $\wp'$ は変化しない．すなわち，関数 $\varphi(z + \omega)$ は再び方程式 $F(X) = 0$ の根となる．複素平面上の有理型関数全体は自然に（可換な）体となるから，方程式 $F(X) = 0$ のこのような根は有限個（$F(X)$ の次数以下）しか存在しない．そこで，１つの $\omega \in \Omega$ に対してこの操作を繰り返せば，ある自然数の組 $m, n\ (m < n)$ に対して，関数として $\varphi(z + m\omega) = \varphi(z + n\omega)$ となる．そこで $N = n - m$ と置き，改めて $z + m\omega$ を変数 z で置き換えれば，$\varphi(z + N\omega) = \varphi(z)$ でなければならない．そこで特に ω_1 と ω_2 に対してこのような N_1 と N_2 とを取り，それらの最小公倍数を改めて N とすれば，すべての $\omega \in \Omega$ に対して $\varphi(z + N\omega) = \varphi(z)$ が成り立っている．従って，z の関数 $\varphi(Nz)$ はすべての $\omega \in \Omega$ を周期に持ち，関数体 $\mathbb{C}(\wp, \wp')$ に含まれる．

さて，ある複素数 $\mu \notin \mathbb{Q}$ に対して $\varphi(z) := \wp(\mu z)$ とする．そしてこの φ が $\wp$, $\wp'$ と代数的な関係を持つとしよう．このとき，実は μ は虚２次体に属する複素数であり，楕円関数 $\wp$ は（μ による）虚数乗法を持つといわれる．以下にこれを見る．

上に見たように，ある自然数 N に対して z の関数 $\wp(N\mu z)$ は Ω を周期に持つ．簡潔に $\alpha := N\mu$ と表す．そうすれば各 $\omega \in \Omega$ に対して $\wp(\alpha(z + \omega)) = \wp(\alpha z)$ であり，

$$\wp(\alpha z + \alpha\omega) = \wp(\alpha z)$$

がすべての z に対して成り立つ．従って，$\alpha\omega\in\Omega$ である；すなわち

$$\alpha\Omega=\{\alpha\omega\,|\,\omega\in\Omega\}\subset\Omega$$

である．従って，

$$\alpha\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\ c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}a&b\\ c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$$

となる．すなわち，α は $\begin{pmatrix}a&b\\ c&d\end{pmatrix}$ の固有値であり，2 次体の数である．しかもこれから直ちに $\alpha\tau=a\tau+b\ \ (a,b\in\mathbb{Z})$ が得られ，$\mathrm{Im}\,\tau>0$ であるから $\mathbb{Q}(\alpha)$ は虚 2 次体である；しかも $\mathbb{Q}(\alpha)=\mathbb{Q}(\tau)$ となっている．特に関数 $\wp(z)$ のかわりに z の関数 $\wp(\omega_2 z)$ を取れば，その周期は $\mathfrak{m}=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$ で与えられる．このとき，$\mathfrak{M}$ は虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\tau)$ に含まれる有限生成の $\mathbb{Z}$ 加群であり，しかも $\mathbb{Q}\mathfrak{m}=\mathbb{Q}(\tau)$ である．これがデデキントによって代数体のモデュールと名付けられたものの原形である．

さらに

$$\mathfrak{O}(\mathfrak{m}):=\{\alpha\in\mathbb{Q}(\tau)\,|\,\alpha\,\mathfrak{m}\subset\mathfrak{m}\}$$

と置くとき，これは $\mathbb{Q}(\tau)$ の部分環である．しかも各 $\alpha\in\mathfrak{O}(\mathfrak{m})$ は，ある $\begin{pmatrix}a&b\\ c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ の固有値であって，固有方程式 $X^2-(a+d)X+(ad-bc)=0$ の根であり，代数的整数である．デデキントはこのような環をモデュール $\mathfrak{m}$ が属するオーダーと呼んだ．代数体 K のオーダーはすべてその整数全体の環 $\mathfrak{o}_K$ に含まれ，この $\mathfrak{o}_K$ が K の最大のオーダーである．特に $\mathfrak{o}_K$ に属するモデュール $\mathfrak{m}$ が K の分数イデアルであり，適当な自然数 m によって $m\mathfrak{m}\subset\mathfrak{o}_K$ となる．一般に，$\mathfrak{o}_K$ に含まれ，しかもそれに属するモデュールが $\mathfrak{o}_K$（ないし K）の（整）イデアルである．

高木貞治は「特殊から一般へ」と強調した．デデキントの代数的数論に関する仕事を見るとき，特にこれを実感する．

2－5．虚 2 体のイデアル類群と楕円関数

虚 2 次体 K を与え，その分数イデアル $\mathfrak{a}$ をとれば，$\mathbb{Z}$ 加群として $\mathfrak{a}=\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$，$\omega_1,\omega_2\in\mathfrak{a}$，と表される．（$\mathfrak{a}$ は K の最大のオーダー $\mathfrak{o}_K$ に属する．）このとき，$\mathfrak{a}$ を周期加群とする楕円関数体が存在する．上記の考察から，次の事柄が了解されるであろう：2 つの分数イデアル $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ に対して，対応する楕円関数体が同型であるための必要十分条件は $\mathfrak{b}=\lambda\mathfrak{a}$，$(\lambda\in K^{\times})$ である．そこで K のイデアル類群を $\mathrm{Cl}(K)$ と表せば，楕円モデュラー関数 $j(\tau)=j(\tau,1)=j(\omega_1,\omega_2)$ は有限アーベル群 $\mathrm{Cl}(K)$ 上の関数，いわゆる類関数を与える．そしてその値 $j(\mathfrak{a}):=j(\omega_1,\omega_2)$ は K のヒルベルト類体，すなわち，最大不分岐アーベル拡大を生成する．従って，ガロア群 $\mathrm{Gal}(K(j(\mathfrak{a}))/K)$ は $\mathrm{Cl}(K)$ と同型であり，アルティンの相互法則が，フロベニウス自己同型写像を用いて，それらに自然な同型写像を与える．定理として記しておこう（志村 [Sh-1971], Th.5.7 参照）．

定理：状況と記号を上のように設定する．このとき，どの分数イデアル $\mathfrak{a}$ に対しても $K(j(\mathfrak{a}))/K$ は K の最大不分岐アーベル拡大となる．また，K の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し，$K(j(\mathfrak{a}))/K$ におけるそのフロベニウス写像を $\sigma(\mathfrak{p})$ とするとき，$j(\mathfrak{a})^{\sigma(\mathfrak{p})} = j(\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a})$ となっている．さらに，アルティン対応 $\mathfrak{p} \mapsto \sigma(\mathfrak{p})$ によってイデアル類群 $Cl(K)$ からガロア群 $Gal(K(j(\mathfrak{a}))/K)$ への同型写像が自然に定まる．

クロネッカーが [K-1857a, -1857b] で主張した事柄は，70 年を経て結局はこのような形に仕上がった．また虚 2 次体に限れば，「単項化定理」，すなわち，K のイデアル（理想数）がすべて $K(j(\mathfrak{a}))$ に属する数により単項イデアルとして表現されることは，1908 年にヴェーバーによってデデキントの η 関数を用いて証明された（[Wb-1908]）．

§3　デデキント（1831 - 1916）

デデキントとフロベニウスは類体論に関して直接的な寄与をなしたというわけではない．しかし，代数的数論の順調な展開という点では，デデキントを欠くわけにはいかない．資料となるものは全くといっていいほど見出されていないが，彼がヴェーバーに与えた影響は並々ならぬものがあると思われる．また，アルティンの L 関数について，たとえば群指標の理論に注目するだけでも，デデキントとフロベニウスの影響を見過ごすわけにはいかない．さらにアルティンの相互法則には「フロベニウス自己同型写像」が不可欠であるし，その証明にはチェボタリョフの「密度定理」，すなわち「フロベニウス予想」の証明の方法が直接に役立った．実はこの「フロベニウス予想」に対しても，クロネッカーがその端緒を開いている．前節の最後で触れた高木の「預言者」クロネッカーについての言及も，これに関してのものである．この節ではこのような歴史的背景の一端を見ることにする．

ランダウはデデキントの追悼講演 [L-1917] のなかで，次の三つを彼の主要な業績として上げている：『連続性と無理数』（[De-1872]），『数は何であり何であるべきか？』（[De-1888]）および『ディリシュレの数論講義への補足』（[De-1871, -1879, -1893] 等）．これらはすべて「数」に関するものである；また前二者は独創性において，「イデアル論」で代表される最後のものを確かに凌駕する．しかしここでは，デデキントの「代数的数論」における業績について，それも高木－アルティンの類体論に直接に関連する文脈にあるものを述べるにとどめる．従って，例えば [De-1892] での η 関数の考察に現われる「デデキント和」についても，またヴェーバーとの共著になる「代数関数」についての興味深い論文 [DW-1882] にも触れない．

デデキントに関してここで指摘すべき事柄は次の 5 点である：

1．代数的数論の基本概念の整備と「イデアル」による一般の代数体の因子論，
2．デデキントのゼータ関数，
3．デデキントの判別定理，
4．群指標の理論等に関するフロベニウスへの影響，
5．アルティンに対する影響．

ただし，第4項については次節に譲る．

デデキントは，ガウスに倣ったわけでもないのだろうが，理論的な枠組みが明快になるまでは不用意な公表をひかえていたように見受けられる．この点は「預言者」と呼ばれたクロネッカーと著しく異なっている．したがって彼が実際に何を見，何を意図していたのかを，整った論文のなかに見いだすことは容易ではない．第1項については，特に『ディリシュレの数論講義への補足』の最終版 [De-1893] の完成度が高い；しかも [De-1871]，[De-1877a]，[De-1879]，[De-1893] と順を追って成熟していく様子が見られる．このようなことから，[De-1893] こそが彼の最終目的であったと見做されるかもしれない．しかし，彼の代数的数論における「研究計画」は，必ずしも「代数的整数」，「モデュール」，「オーダー」，「イデアル」等の概念の抽出とか，それらによる代数的数論の骨格の基礎づけに最大の主眼があったわけではなかった．彼にはもっと明確な数論らしい問題意識があった．純3次体に対する類数公式の探求が彼を強く動機づけていたものと思われる．

デデキントが26歳のときの論文 [De-1857] は，有限素体上の一変数多項式環における因子論である．彼はガウス全集の編纂に関わったが，この研究はガウスの [Ga-1801*] に影響を受けたものと思われる．これは1863年に出版されたガウス全集IIに手書き遺稿のひとつとして収められ，デデキントの注釈が添えられている；『数論研究』の一部として用意されたものが結局は割愛されてしまった．実際，セクション番号は冒頭が330から始まり，375で**終わっている**．デデキントはこれについて，ガウス全集IIの出版に先だって，すでに [De-1857] の脚注で言及している．ガウスはここで，有限素体上の多項式の根を，いわゆるフロベニウス同型写像との関連から考察している．一方デデキントの [De-1857] では，有限素体上の一変数多項式環が**有理整数環とのアナロジー**を明確に意識して取り扱われており，多項式を法とする合同関係が主題となっている．特に「素多項式 (eine (irreduktibel Function oder) Primfunktion)」による合同関係から素体の有限次拡大が得られ，フェルマの小定理の拡張が示される；またこの環における「平方剰余の相互法則」が2次拡大を用いて示されている．これは60余年の空白を経て，若きコルンブルム [Ko-1919] とアルティンの学位論文 [Ar-1924a] に引き継がれる．因みに，このアルティンの学位論文は有限素体上の有理関数体の2次拡大体の数論が主題であり，第1部の「算術の部」では平方剰余の相互法則までを，第2部の「解析の部」では合同ゼータ関数を扱っている．

論文 [De-1857] では有限素体上の一変数多項式環における因子論を展開しているというものの，デデキントはクムマーの理想数についての仕事（[Ku-1845, -1847]）には全く触れていない．しかし代数的数論に関しての10年余の沈黙ののち，彼は，ディリシュレの『数論講義』第2版への補足の5節 [De-1871] を書き，イデアルによってクムマーの円分体における因子論を一気に一般の代数的数体にまで拡大した．この補足Xを構成する5つの節の内容は次の通りである：

§159.　Endliche Körper ;

§160.　Ganze Algebraische Zahlen ;

§161.　Theorie der Moduln ;

§162.　Ganze Zahlen eines endlichen Körpers ;

§163.　Theorie der Ideale eines endlichen Körpers.

ここでいう 'Endliche Körper' は有理数体上有限次の代数的数体のことである．代数体の「モデュール」とその「オーダー」については，その雛型が虚 2 次体にある；前節でも見たように，楕円関数の虚数乗法から自然にもたらされる．

デデキント自身の言によるならば，この 1871 年頃には，純 3 次体（とそのガロア閉包）についての踏み込んだ研究を行なっており，諸結果は遥かに遅れて [De-1900] として出版されることになる．彼の直接の問題意識は類数公式にあった．しかしそこから，一般の代数体に対するデデキントのゼータ関数，代数的数体の判別式（Grundzahl ないし Discriminante），ガロア拡大におけるイデアルの分解理論，等を抽出したものと思われる（[De-1877b]，[De-1882]，[De-1894]，[De-1900] の序文を参照）．彼が純 3 次体を取り上げた動機については不明であるが，これが彼を非アーベル的な方向へ誘ったことは確かであろう；あるいは，単なる仮説に過ぎないが，クムマー，クロネッカーに対向して意識的に非アーベル的なものを目指したのかも知れない．

デデキントが純 3 次体 K についてはっきりと書き上げたかったもののひとつは，ディリシュレ [Di-1838, -1839, -1842] にならった類数公式であった．そのために K のゼータ関数 $\zeta_K(s)$ を導入し，その $s=1$ での留数を求め，それが類数，判別式，単数規準等で表示されることを見た（[De-1877b] では一般の代数体の一般のオーダーの類数等が扱われている）．そこからさらに進んで有限の形の類数公式を得るためには，まず $\zeta_K(s)$ をリーマンのゼータ関数と何らかの「L 関数」の積として表す必要がある．しかし，後に出版された [De-1900] に見るかぎり，デデキント自身が自分で納得できる一般性を抽出していたとは思えない．ゼータ関数についての論文 [De-1877b] のあと，[De-1878] では，特に代数体の判別式について，一般にその素因数全体がちょうどその体で分岐する素数の全体と一致すること，即ち「デデキントの判別定理」を言明する．そしてその証明は [De-1882] で与えられる．高木類対論にとって欠かすことができない要点である．

しかし 1882 年に書き上げられていたイデアルの分解理論 [De-1894] は，なぜかその時点では発表されなかった．

§4　フロベニウス（1849 - 1917）

1880 年，デデキントの友人フロベニウスはクロネッカーの論文 [Kr-1880a] に興味を惹かれ，代数体におけるイデアルの「クロネッカー式密度」に関する論文 [Fr-1896a] の草稿をまとめ，「フロベニウス予想」（後の「チェボタリョフの密度定理」）を盛り込んだ．そしてそれとともに，その基礎として展開する必要があったイデアルの分解理論に関して，耳にしていたデデキントの論文について問いあわせた．フロベニウスの手元にデデキントからの草稿 [De-1894] が届いたのは 1882 年であった．しかしこの [De-1894] が公刊されたのは，遥かに遅れて 1894 年であった．フロベニウスもこの出版を待ったものか，[Fr-1896a] の出版は 1896 年まで据え置かれた．デデキントが [De-1894] の出版を遅らせた理由は不明である．（また彼がイデアルの分岐理論，いわゆるヒルベルト理

論，に手を付けた形跡が見当たらないことも，今から見れば奇妙に思われる．）

それにもかかわらず，このあともデデキントとフロベニウスは文通を重ね，前節で述べた意味でデデキントにとって好ましい「L 関数」を得るためには不可欠と思われる，非可換ガロア群の群指標が探求される．ここで求められたものは群指標の「直交関係」であった．フロベニウスは「群行列式」を用いて群指標の理論（[Fr-1896b]）を 1896 年に確立する．（この時点では，群の線型表現は群指標の理論においてはまったく現れていなかった．）これについてのフロベニウスに対するデデキントの影響はホーキンス [H-1970, -1974] に詳しいのでここでは立ち入らない．（[M-1989b] も参照のこと．）かくして「L 関数」に関しては若きアルティンが時を得てその才能の翼をのびやかに拡げるのを待つばかりとなる．

なおデデキントはリーマン全集を編集する際にヴェーバーと親交を結び，以来科学上の交遊を保ち，それは，例えば [DW-1882] に結実する．ヴェーバーの数論に関する興味はデデキントによってもたらされたものと見てよい（フライ [F-1989] を参照のこと）；しかしデデキントのヴェーバーへの書簡は十分には残されておらず，ヴェーバーの類体論に関する仕事へのデデキントの影響を知る方途は，エミー・ネターの嘆息（デデキント全集 [De-1930], II, p.400）以降も見いだされていない．

フロベニウスに関してここで指摘すべき事柄は

1．群指標の理論，

2．「フロベニウスの予想」（＝「チェボタリョフの密度定理」），

である．第 1 項については，すでに述べたことのみに止め，以下はさらに第 2 項について考察する．

代数体の「フロベニウス自己同型写像」という名称は，ハセに起因し，彼が高木－アルティンの類体論を詳細に解説した『報文』[Ha-1930] で名付けた「フロベニウス記号」と呼応している．これはアルティンの相互法則（[Ar-1924b]）にとって本質的なものである．さらに言えば，チェボタリョフによる「フロベニウスの予想」（＝「チェボタリョフの密度定理」）の証明（[Ts-1926]）の方法がアルティンの相互法則の証明（[Ar-1927]）を産み出したのであった．ハセがフロベニウスの名を採ったのもまさにここに起因する．しかし，「フロベニウス自己同型写像」そのものは，円分体に関してはすでにクムマー [Ku-1846] が遥かに先んじてそれを取りだしており，デデキントは（絶対）ガロア拡大におけるイデアルの分解理論（[De-1894]）によってその正体を取り出していた．問題のフロベニウスの仕事 [Fr-1896a] はこの分解理論に本質的に依拠している．ここでは高木－アルティンの類体論との関わりから，「フロベニウスの予想」が提示されるまでの道筋のいくらかを辿ってみる．

フロベニウスはクロネッカーの論文 [Kr-1880a] を契機にして群論へと引き込れていった．彼は [Fr-1896a] の冒頭でその主定理を引用している．

定理（クロネッカー）：整数係数の多項式 $F(x)$ に対して，素数 p を法とする合同式 $F(x) \equiv 0 \mod p$ の（重複度をこめた）根の個数を ν_p とするとき，すべての素数 p に

わたる級数

$$\sum \nu_p \cdot p^{-1-w}$$

の和の w の値が正で無限に小さくなるときの極限値は $\log(1/w)$ の極限値と比例し，丁度 $\log(1/w)$ に $F(x)$ の既約因子の個数を掛けたものと一致する．

各整数 k，$0 \leq k \leq n = \deg F$，に対して $F(x) \equiv 0 \mod p$ が丁度 k 個の根を持つ素数を p_k と表わすことにすれば，上の級数は

$$\sum k \cdot \sum p_k^{-1-w}$$

となる．そこで次の極限が存在すると**仮定する**：

$$D_k = \lim_{w \to 0+} \frac{\sum p_k^{-1-w}}{\log(1/w)} = \lim_{w \to 0+} \frac{\sum p_k^{-1-w}}{\sum p^{-1-w}}$$

ここで最後の項の分母はすべての素数にわたる和である．このとき，もし定理を**認めるとすれば**，等式

$$\sum k \cdot D_k = 1$$

が得られる．この等式こそがフロベニウスを捉えてしまったものであった．

現代の学生，あるいは数学者でさえ，果たして何人がここに群論に踏み込む着想を得るだろうか？　じっくりと腰を据えて考察を展開しよう．

さて，多項式の $\mathrm{mod}\, p$ での根について本格的な考察を最初に出版したのはガロアである．もっともガウスはすでに彼の『数論研究』の草稿として有限素体の代数拡大の考察を用意していたが，出版に際してこれを割愛したようである（[Ga-1801*]；これについては上のデデキントの節でも触れた）．後に彼の全集のなかに出版されるが，出版の時期からいえばこれはガロアに遅れることになる．もちろんガロアはこのガウスの仕事をまったく知ることはなかったろう．しかしさすがにガウスである；標数 p の有限素体 $\mathrm{GF}(p)$ の有限次拡大に対して，p 乗自己同型写像を導入し，基本的なことをすべて押さえている．ただし，彼の場合は抽象的な有限体の認識を表に出さず，（有理）整数係数の多項式を $\mathrm{mod}\, p$ のみならず，「素」多項式による合同関係によって考察している．

一方ガロア [Gl-1962] はまったく現代風であって，旗色鮮明である；学術論文として時間を費やして練りあげたものでないだけに，彼がかかる対象をどのように認識していたかが直接に現われている．彼にとってはもとより有限素体 $\mathrm{GF}(p)$ の真の有限次拡大が問題であり，$\mathrm{GF}(p)$ 上の高次既約多項式とその根が問題である．まず，有理整数の間での $\mathrm{mod}\, p$ の合同関係については，混乱を避けてガウスの『数論研究』流の記号「$\equiv$」を退け，等号「$=$」のみを用いる．そして与えられた $\mathrm{GF}(p)$ 上の高次既約多項式 $Fx = 0$ の「根」を，複素数の虚数単位の場合にならって「思考上の記号の類として」〈comme des espéces de symboles imaginaires〉認識し，そのひとつを i と書き，それが $\mathrm{GF}(p)$ 上

に生成する拡大体を考察している．例えば既約多項式 Fx の次数を ν とするとき，この拡大体の要素が，有理整数の（mod p の）代表系から $a, a_1, a_2, ..., a_{\nu-1}$ を取って

$$a + a_1 i + a_2 i^2 + ... + a_{\nu-1} i^{\nu-1}$$

の形に一意的に表わされることを示している．当然 p 乗自己同型写像が本質的に利用されており，フェルマの小定理の拡張を与え，この拡大体の0でない要素がすべて1の $p^\nu-1$ 乗根であることを見ている；従って拡大体が次数 ν のみによること，および各 ν に対して ν 次の拡大体 $\mathrm{GF}(p^\nu)$ が存在することが結論づけられる．

シェネマン [So-1846] が同じころに「高次合同関係」を考察している．しかしこれは（有理）整数環を素数の高い冪を法にして考察したものであって，一般の有限体の研究ではない；ベルヌーイ数についてのクムマーの一連の仕事ほどには直接の影響はなかったにしても，p-進数への先駆のひとつと見てもよかろう．

いよいよフロベニウス自己同型写像に移ろう．

有限次代数体のガロア拡大 K/k が与えられたとし，そのガロア群を G とする；また K および k の全整数の環を $\mathfrak{O}$，$\mathfrak{o}$ と表わす．体 K の素イデアル $\mathfrak{P}$ に対して $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{o}$ は k の素イデアルであり，剰余体 $\mathfrak{K} = \mathfrak{O}/\mathfrak{P}$，$\mathfrak{k} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ は有限体である；これら $\mathfrak{P}$，$\mathfrak{p}$ の下にある（で割り切れる）有理素数を p とすれば，$\mathfrak{k}$ の標数は p であり，位数 $q = |\mathfrak{k}|$ は p の冪である．さらに $f = [\mathfrak{K} : \mathfrak{k}]$ を拡大次数とすれば，$\mathfrak{K}/\mathfrak{k}$ のガロア群は $\mathfrak{K}$ の q 乗自己同型写像で生成される位数 f の巡回群である．

もとのガロア拡大 K/k に戻る．ガロア群 G の部分群 $\mathrm{Z}(\mathfrak{P}) = \{\sigma \in G \mid \mathfrak{P}^\sigma = \mathfrak{P}\}$ を $\mathfrak{P}$ の分解群という．部分群 $\mathrm{Z}(\mathfrak{P})$ の各要素は明らかに $\mathfrak{K}/\mathfrak{k}$ の同型写像を引き起こすが，この対応で $\mathrm{Z}(\mathfrak{P})$ からガロア群 $\mathrm{Gal}(\mathfrak{K}/\mathfrak{k})$ への準同型写像が得られ，K/k の生成元を $\mathfrak{O}$ から選べばわかるように，これは上への写像である．ここで特に $\mathfrak{K}$ の q 乗自己同型写像に写されるものを $\mathfrak{P}$ のフロベニウス自己同型写像と呼ぶ．一般的にはこれは $\mathfrak{P}$ に対してただ一つ確定するわけではない；この準同型写像の核を $\mathrm{V}(\mathfrak{P})$ とすれば，それは $\mathrm{Z}(\mathfrak{P})$ における $\mathrm{V}(\mathfrak{P})$ の剰余類として確定する．（定義から自然な同型写像 $\mathrm{Z}(\mathfrak{P})/\mathrm{V}(\mathfrak{P}) \simeq \mathrm{Gal}(\mathfrak{K}/\mathfrak{k})$ がある．この $\mathrm{V}(\mathfrak{P})$ が $\mathfrak{P}$ の惰性群である．）しかし K/k で分岐する有限個の $\mathfrak{P}$ を除けば $\mathrm{V}(\mathfrak{P}) = 1$ となる．実際，拡大 K/k における素イデアル $\mathfrak{p}$ の分解は，$\mathfrak{p} = (\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\cdots\mathfrak{P}_g)^e$，$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}$，$g = [G : \mathrm{Z}(\mathfrak{P})]$，$e = |\mathrm{V}(\mathfrak{P})|$，であり，$\mathrm{V}(\mathfrak{P})$ の位数 e が $\mathfrak{p}$ の分岐指数である；また $\mathfrak{p}^\sigma = \mathfrak{p}$ であるから，$\{\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_g\} = \{\mathfrak{P}^\sigma \mid \sigma \in G\}$ である；よって，$g = [G : \mathrm{Z}(\mathfrak{P})]$ である．また $f = [\mathfrak{K} : \mathfrak{k}] = [\mathrm{Z}(\mathfrak{P}) : \mathrm{V}(\mathfrak{P})]$ であり，K/k での $\mathfrak{P}$ のノルムは $\mathrm{N}_{K/k}(\mathfrak{P}) = \prod_{\sigma \in G} \mathfrak{P}^\sigma = \mathfrak{p}^f$ で与えられる．

これらのことは，特に K と k が共に有理数体上のガロア拡大である場合にデデキント [De-1882, -1894] に見られる；群論的なイデアルの分解法則に関する部分は1894年に [De-1894] として出版された；しかし，その最後に付けられた日付は1882年6月8日である．序文には，1882年6月3日のフロベニウスからの問い合わせに対して，この日付にこの内容をそのまま送付したものとある；フロベニウスは，デデキントが1877年

の論文 [De-1877b] の§27 Examples empruntés á la division du cercle で例示した事柄について，利用できそうな一般論を彼に求めたようである．またヒルベルトがこの内容を含む論文 [Hi-1894] を 1894 年 7 月 7 日付けで発表するというので公表することにした旨が書かれている．フロベニウスもそのいきさつを，我々の焦点である [Fr-1896a] の序文で証言している．デデキントの 1878 年の [De-1878] では，「フロベニウス自己同型写像」はまったく表にはあらわれていないが，有理素数が代数体でどのように分解・分岐するかが説明されてある；また，序文と二箇所の脚注に，理想数に関する「ゾロタリョフの理論」についての 1874 年と 1877 年のゾロタリョフの報告へのコメントがある．ただしゾロタリョフが自分の理論の全体像を公表したものは 1880 年の [Zo-1880] であるようである；彼のこの理論への動機が楕円積分の計算（[Zo-1874]）とその一般化を図るところから来ている，とある．（この楕円積分の計算というのは，アーベル [Ab-1826b] の結果を有界な有限回の手順で行うためのチェビシェフ [Tc-1861] のアイデアに基づく．）

もう少し数学に立ち入って「フロベニウス予想」（[Fr-1896a]）の内容を見よう．

上記の記号に戻る．体 k の素イデアル $\mathfrak{p}$ から見る場合，もし最初に取った $\mathfrak{P}$ のかわりに他の $\mathfrak{P}_i=\mathfrak{P}^{\sigma}$，$\sigma\in G$，を取ったなら，$\mathrm{Z}(\mathfrak{P})$ は $\sigma^{-1}\,\mathrm{Z}(\mathfrak{P})\,\sigma$ で置き換えられる；従って K/k で分岐しない $\mathfrak{p}$ に対しては，その上にある K の各素イデアルのフロベニウス自己同型写像全体が G のひとつの共役類となって確定して対応する．（特に K/k がアーベル拡大，すなわち G がアーベル群であれば，これらのフロベニウス自己同型写像はすべて一致し，$\mathfrak{p}$ に対して唯一つ確定する．この両者の対応がアルティンの相互法則の本質であった．）このように，基礎の数体 k の数論的な要素である素イデアルが，ガロア群として与えられた有限群 G の代数的な構造のみで決まってしまう共役類と対応づけられる．ここではこれを「フロベニウス対応」と言うことにしよう．

数論的な要員をさらに整備する．体 k の素イデアルの集合 M に対して次の極限値 $\Delta(M)$ が存在する場合にこれを M の「（クロネッカー式）密度」という：

$$\Delta(M)=\lim_{s\to 1+0}\frac{\displaystyle\sum_{\mathfrak{p}\in M}\frac{1}{\mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}\mathfrak{p}^{s}}}{\log\dfrac{1}{s-1}}$$

もちろん一般の M について密度 $\Delta(M)$ が存在するはずもない．特に k のすべての素イデアルの集合 $S(k)$ については $\Delta(S(k))=1$ となる；これは k のデデキントのゼータ関数 $\zeta_k(s)$ が $s=1$ で 1 位の極を持つことから従う．

定理（チェボタリョフ）：有限次代数的数体のガロア拡大 K/k のガロア群を G とする．群 G の共役類 C に対し，それとフロベニウス対応する k の素イデアル全体の集合を $M(C)$ とすると，その密度は必ず存在して $\Delta(M(C))=|C|/|G|$ で与えられる．

すなわち数論的な密度 $\Delta(M(C))$ が完全に代数的に，いわば共役類 C の群 G 内での「群

論的な密度」として確定する．

この定理は実に強力である；例えばGの要素σを与えたとき，Gの巡回部分群〈σ〉に対応するKの部分体をFとし，K/kに代えてK/Fに定理を適用すれば，σそのものをフロベニウス自己同型写像にもつKの素イデアルが存在する；のみならず，そのような素イデアル全体のKでの密度の存在も，密度そのもの決定される．

密度定理とクロネッカーが主張した「定理」との関連を見るために，特別な場合を考察する；$k=\mathbb{Q}$とし，$K/\mathbb{Q}$を有限次ガロア拡大とする．

さて，$K=\mathbb{Q}(\theta)$となる代数的整数をとり，θの$\mathbb{Q}$上での最小多項式を$F(x)$としよう．このとき，素数pのガロア拡大$K/\mathbb{Q}$での分解様式は$F(x)$の$\mathrm{mod}(p)$での因子分解で決定される．すなわち，Kにおけるイデアルによって素数pが$p=(\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\cdots\mathfrak{P}_g)^e$，$N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{P})=p^f$，と分解されることは，$F(x)$の$\mathrm{mod}(p)$での因子分解が次数$f$の$g$個の互いに素な既約多項式の$e$乗の積であることと対応している．従ってこの場合，$\mathbb{Z} \bmod p$で$F(x) \equiv 0 \mod p$が根を持つための必要十分条件は，相対次数$f$が1であることである．しかもこの場合，根の個数は重複をこめれば必ず$[K:\mathbb{Q}]$である．従って，$\mathbb{Z} \bmod p$で$F(x) \equiv 0 \mod p$が根を持つようなpの集合をXとし，それが丁度$[K:\mathbb{Q}]$個の根をもつpの集合を$X([K:\mathbb{Q}])$とすれば，$X=X([K:\mathbb{Q}])$である．しかも，このようなpのなかで$e>1$であるものは$K/\mathbb{Q}$で分岐するものと一致し，有限個である．そこで，密度の検討には，これらを考慮のそとに置いてもさしつかえない．よって，我々の素数の集合Xの密度$\Delta(X)$は$f=e=1$となる素数p全体の集合の密度，すなわち，フロベニウス対応で$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$の単位元に対応する素数全体の集合の密度であって，チェボタリョフの定理の$\Delta(M(\{1\}))$と一致する．従ってこれは存在し，$\Delta(X)=1/[K:\mathbb{Q}]$である．よってこの場合は，確かに関係式

$$[K:\mathbb{Q}]\cdot\lim_{w\to 0+}\frac{\sum_p' \frac{1}{p^{1+w}}}{\log(1/w)} = 1$$

が成り立ち，特殊な場合ではあるが，クロネッカーが主張した「定理」が得られる．

始めに触れたように，チェボタリョフによるこの定理の証明の方法が，シュライヤー[Sr-1927]による分析の助けをも得て，アルティンの相互法則の証明（[Ar-1927]）に大きく寄与した．しかし，高木－アルティンの類体論は直接この定理には拠らずに証明でき，さらに類体論（によるアーベル拡大の存在とその特徴づけ）の簡単な応用としてこの定理を証明することができる．ただしこのとき，チェボタリョフの方法から抽出されたものが形をかえて類体論の証明のなかに折り込みずみであるとも言える．

我々は上で素イデアルの集合の密度を，高木[T-1948]に倣って「（クロネッカー式）密度」と呼んだ．これは，上の形に定理を定式化したフロベニウスのそもそもの出発点に起因する．フロベニウスは1880年のクロネッカー[Kr-1880a]の問題提起によって着想を得て以来，この定式化を1896年の[Fr-1896a]によって公表するまでに16年を費や

した．（チェボタリョフ [Ts-1926] によって証明が得られるまでになんとさらに30年が必要であった．）歴史を見る場合の常道ではあるが，これを理解するに当たって，我々は当時の数学界の状況を想像を逞しくして捉えておかなければなかろう．たとえガロアの理論がすでに当時十分の認知を得るに至っていたとしても，有限群論はまだまだ幼なかった；たとえば，体論抜きでガロアの理論を書き上げたジョルダンの『置換論』（[Jo-1870]）の出版は 1870 年のことであり，シローの定理（[Sy-1872]）が出たのはようやく 1872 年であった．はたして当時の誰が，深い数論的現象を記述するに際して有限群が本質的に有効であると考え得たろう．ガロアの理論からさらに数論的な現象の深部にまで踏み込んだところにある事象が，ガロア群の代数的構造を用いて簡明かつ明快に記述されてしまうなどと，一体誰が予期していたろう．

フロベニウスはこのあと，上で述べたように 1882 年にデデキントからイデアルの分解法則に関しての群論的な分析のノート（[De-1894]）を得たあと，1887 年には，副産物（?!）のシローの定理の別証明 [Fr-1887a] とともに，まず群論的な部分 [Fr-1887b] を公表する．これについても，さらにフロベニウスが群指標の理論を独創するに至った背景にあるディリシュレ [Di-1838, -1839, -1842] に発する数論的な問題意識，特に群指標の直交関係，についても，すでにで述べた（[M-1989b] 参照）；群指標の理論の独創に関してのデデキントの影響についてはホウキンス [Hk-1970, -1974] が興味深い．

§5　クロネッカーの仕事について

最初の節の終わりでクロネッカーの仕事についての高木のコメントを引いた．誤解があるやも知れないので，少し言葉を補っておく．数学における「定理」は厳密な証明が付けられて始めて「定理」であり，そこで始めて「数学的な言明」，あるいは端的に，「数学」になる，とする観点から見れば，このコメントは，まさに見事に，的確にクロネッカーの仕事の本質を衝いている．高木は，必ずしもガウス流を唯一尊んだ訳ではないだろうが，数学者としての自分自身をこの意味で非常に厳密に律していたものと思われる．しかも，例の彼の「高木節」とでも言うような語り口の背景に，今日の並の「数学者」には想像もつかないほどの深く広い数学的教養を身に付けていた．彼の常識は，我々のものとはまったく異なっているのだ．そう単純に「ヤマ」などという言葉づかいに乗ってしまうわけには行かない．

また数学史からの観点からすれば，そのように端的に切り捨てるわけには行かない．例えば「厳密な証明」にしても，それは当然その時点での数学界のレヴェルと相対的でしかありえない．高木も「この予言者の名を冠して『クロネッケル』式密度の称呼を用いたのであ」り，クロネッカーを単に「数学」の観点からアッサリと切り捨てられるわけではなかった．

とはいえ，クロネッカーの論文の多くは，特に彼がその構築をライフワークとした代数的数論に関するものについては，現代から見れば，十分に「数学的」に書かれていると言えるものではないかもしれない；恐らく当時の常識からしても．しかし，例えば現代の物理学者達の論文と対比して見ればわかりやすい．クロネッカーは，いまだ定義も，

概念すらはっきりとはしていない，しかし彼にとって現代の物理学者達の見るものよりも遥かに厳然，確固として存在する「数学的な事実」を発見し，それを報告しようとした．彼が見たもの自体は，例えば「一般的な関数」，「一般的な無限級数」と言ったあやふやな，捉え所のない新参者とは異なり，新しいとはいえ，どこから見ても伝統的で歴とした数学であった．彼はそこに新しく驚嘆すべきものを発見し，それを，書き方としては「数学的」ではなかったにせよ，なんとか報告したのであった．そこに自身の数学者としての全身の重みをかけていた．

例えば，有理数体上のアーベル多項式の根が1の冪乗根の有理整数係数の有理式として表わされることを「発見」して，躊躇わずにそれを「定理〈Satz〉」として報告した（[Kr-1853]）．有限体の扱い方を例にとれば，彼は決してガロア流を採らず，あくまでもガウス流にこだわり続けたろう．それは，彼の代数体における因子論（[Kr-1882]；高木 [T-1948]，附録（三）参照）からも想像がつく．例えば彼は，師でもあったクムマーの理想数の与え方（[Ku-1845, -1847]）に満足せず，そのように本質的なものは「明確な数学的なもの」によって表示すべきであるとした；（そしてその嗅覚は確かであった）；まず虚2次体について，それを虚数乗法として持つ楕円関数の「特異モデュライ」から得られる**本物の数として**虚2次体の理想数を具現すること，および，それらの数による虚2次体の拡大が不分岐であること，を発見した（[Kr-1857a, -1862]）；さらに「単項化定理」に基づく「類体」の存在を信じて彼の代数的数論構築ひとつの大きな指針とし，一般の代数的数体に対して「単項化定理」を彼の流儀で定式化した（[Kr-1882]）．クロネッカーは，デデキントに比べれば，たしかに明晰さにおいて遅れをとる．しかし，ヒルベルトがそこから出発して彼の類体論の構想へと進んだことは明らかである．しかもまた，ヴェーバーも高木も，先ず「クロネッカーの青春の夢」に惹付けられたのであった（[M-1994]）．

文 献

[Ab-1826] N. H. Abel. Sur l'intégration de la formule différentielle $\frac{\rho\, dx}{\sqrt{R}}$, R et ρ étant des fonctions entières, Jour. reine angew. Math. Bd.1 (1826), 185-221 (in German) ; Œuvres complètes I, 104-144 (in French).

[Ab-1827] _____. Recherches sur les fonctions elliptiques, Jour. reine angew. Math. Bd.2 (1827), 101-181, Bd.3 (1828), 160-190; Œuvres complètes I, 263-388.

[Ab-1828] _____. Solution d'un probléme général concernant la transformation des fonctions elliptiques, Astronomische Nachr. Bd.6 (1828); Œuvres complètes I, 403-428. Addition au mémoire précédent, Astronomische Nachr. Bd.7 (1829); Œuvres complètes I, 429-443.

[Ab-1881] _____. Œuvres complètes I, II, Christiania, 1881; Reprint from Johnson Reprint, New York, 1965.

[Ad-1984] 足立恒雄. フェルマーの大定理, 日本評論社, 1984 ; 第 3 版, 1994.

[Ar-1923] E. Artin. Über die Zetafunctionen gewieser algebraischer Zahlkörper, Math. Ann. 89 (1923), 147-156; Collected Papers, 95-104.

[Ar-1924a] _____. Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen I, II, Math. Zeitschrift 19 (1924), 153-246; Collected Papers, 1-94.

[Ar-1924b] _____. Über eine neue Art von L-Reihen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 3 (1924), 89-108; Collected Papers, 105-124.

[Ar-1927] _____. Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 5 (1927), 353-363; Collected Papers, 131-141.

[Ar-1930] _____. Idealklassen in Oberkörpern und allgemeines Reziprozitätsgesetz, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 7 (1930), 46-51; Collected Papers, 159-164.

[Ar-1931] _____. Zur Theorie der L-Reihen mit allgemeinen Gruppencharakteren, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 8 (1931), 292-306 ; Collected Papers, 165-179.

[Ar-1965] _____. The Collected Papers, Addison Wesley, 1965.

[De-1872] R. Dedekind. Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig, 1872 ; Aufl.2., 1892; Aufl.3., 1905.

[De-1888] _____. Was sind und was sollen die Zahlen ?, Braunschweig, 1888 ; Aufl.2., 1893; Aufl.3., 1911.

[De-1871] _____. Supplement X. Über die Komposition der binären quadratischen Formen, von Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune Dirichlet (2.Auflage), 423-462, (1871); Werke III, 223-261.

[De-1879] _____. Supplement XI. Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen, von Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune Dirichlet (3. Auflage), 515-530, (1879); Werke III, 297-313.

[De-1893] _____. Supplement XI. Ueber die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen, von Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune Dirichlet (4. Auflage), 434-657, (1893). Reprint from Chelsea, New York, 1968.

[De-1857] _____. Abriß einer Theorie der höheren Kongruenzen in bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus, Jour. reine angew. Math., Bd.54 (1857), 1-26; Werke I, 40-66.

[De-1877a] _____. Sur la Théorie des Nombres entiers algébriques, Paris, Gauthier-Villars, 1877, 1-121, Bulletin des Sci. math. astron., 1er érrie, t. XI, 2e érrie, t. I, 1876, 1877; Werke III, 262-296.

[De-1877b] _____. Über die Anzahl der Ideal-Klasse in den verschiedenen Ordnungen eines endlichen Körpers, Festschrift Techn. Hochschule Braunschweig zur Säkkularfeier des Geburtstages von C. F. Gauß, Braunschweig, 1877, 1-55; Werke I, 105-157.

[De-1878] _____. Über den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Kongruenzen, Abhandl. kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Bd.23 (1878), 1-23; Werke I, 202- 230.

[De-1882] _____. Über die Discriminanten endlicher Körper, Abhandl. kgl. Ges. Wiss. Göttingen Bd.29 (1882), 1-56; Werke I, 351-396.

[De-1892] _____. Erläuterungen zu zwei Fragmenten von Riemann, B. Riemanns gesammelte math. Werke und wissenschaftlicher Nachlass, 2.Auflage, 1892, 466-478; Werke I, 159-172.

[De-1894] _____. Zur Theorie der Ideal, Nachr. kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1894, 272-277; Werke II, 43-48.

[De-1882*] _____. Aus Briefen von Dedekind an Frobenius, Werke II, 414-442.

[De-1900] _____. Über die Anzahl der Ideal-Klassen in reinen kubischen Zahlkörpern, Jour. reine angew. Math. Bd.121 (1900), 40-123; Werke II, 148-233.

[De-1930] _____. Gesammelte Mathematische Werke I, II, III, Braunschweig, 1930-1932; Reprint from Chelsea, New York, 1969.

[DW-1882] R. Dedekind und H. Weber. Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, Jour. reine angew. Math. Bd.92 (1882), 181-290; Werke I, 238 -349.

[Di-1837] P. G. Lejeune Dirichlet. Beweis eines Satzes über die arithmetische Progression, Bericht Verhandl. kgl. Preuss. Akad. Wiss. Jahrg. 1837, 108-110.

[Di-1837b] _____. Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganz Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält, Abhandl. kgl. Preuss. Akad. Wiss. Jahrg. 1837, 108-110.

[Di-1838] _____. Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres, Jour. reine angew. Math. Bd.18 (1838), 259-274; Werke I, 357-374.

[Di-1839] _____. Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres, Jour. reine angew. Math. Bd.19 (1839), 324-369, Bd. 21 (1840), 1-12 und 134-155; Werke I, 411-196.

[Di-1842] _____. Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indetérminées complexes, Jour. reine angew. Math. Bd. 24 (1842), 291-371; Werke I, 533 -618.

[Di-1889] _____. P. G. Lejeune Dirichlet's Werke I, II, Berlin, 1889-1897; Reprint, Chelsea, New York, 1969.

[F-1989] G. Frei. Heinrich Weber and the Emergence of Class Field Theory, in The History of Modern Mathematics, edited by D.E. Rowe and J. McCleary, Academic Press, 1989, pp.425-450.

[F-1994] _____. The Reciprocity Law from Euler to Artin, in The Intersection of History and Mathematics (ed. J. W. Dauben et al), Birkhäuser Verlag, Basel · Boston · Berlin, 1994, pp.67-88.

[F-1995] _____. Heinrich Weber (1842-1913), Jahlbuch Albertus-Univ. Königsberg/Pr., Dunker & Humbolt, Berlin, 1995, pp.509-520.

[Fr-1887a] F. G. Frobenius. Neuer Beweis des Sylowschen Satzes, Jour. reine angew. Math. Bd.100 (1887), 179-181; Gesam. Abhandl. II, 301-303.

[Fr-1887b] _____. Über die Congruenz nach einem aus zwei endlichen Gruppen gebildeten Doppelmodul, Jour. reine angew. Math. Bd.101 (1887), 273-299; Gesam. Abhandl. II, 304-330.

[Fr-1896a] _____. Über Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe, Sitzungsb. kgl. Preiss. Akad. Wiss. Berlin (1896), 689-703; Gesam. Abhandl. II, 719-733.

[Fr-1896b] _____. Über Gruppencharaktere, Sitzungsb. kgl. Preiss. Akad. Wiss. Berlin (1896), 985-1021; Gesam. Abhandl. III, 1-37.

[Fr-1968] _____. Gesammelte Abhandlungen I, II, III, Springer-Verlag, 1968.

[Fw-1904] Ph. Furtwängler. Über die Reziprozitätsgesetze zwischen l-ten Potenzresten in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet, Math. Ann. 58 (1904), 1-50.

[Fw-1907] _____. Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers, Math. Ann. 63 (1907), 1-37.

[Fw-1909] _____. Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern I, Math. Ann. 67 (1909), 1-31; II, 72 (1912), 346-386; III, 74(1913), 413-429.

[Fw-1911] _____. Allgemeiner Beweis des Zerlegungssatzes für den Klassenkörper, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1911), 293-317.

[Fw-1930] _____. Beweis des Hauptidealsatzes für Klassenkörper algebraischer Zahlkörper, Abhandl. Math. Sem. Univ. Hamburg 7 (1930), 14-36.

[Gl-1846] E. Galois. Sur la théorie des nombres, Journ. Math. pures appl. 11 (1846), 398-407; Écrite et Mémoires Mathématiques d'Évariste Galois, par R. Bourgne et J.-P. Azra, Gauthier-Villars, Paris, 1962, pp.113-127.

[Ga-1801] C. F. Gauss. Disquisitiones Arithmeticae, Leibzig, 1801; Gauss Werke I, Göttingen, 1863,

[Ga-1801*] _____. Disquisitiones Generales de Congruentiis. Analysis Residuorum Caput Octavum, Gauss Werke II, Göttingen, 1863, 212-242.

[Ga-1818] _____. Theorematis Fundamentalis in Doctora de Residuis Quadratics, Demonstrationes et Ampliationes novae, Comment. soc. reg. sci. Gottingen. 1818; Werke II, 47-64.

[Ga-1828] _____. Theoria Residuorum Biquadraticorum, Commentatio Prima, Comment. soc. reg. sci. Gottingen. 1828; Werke II, 65-92.

[Ga-1832] _____. Theoria Residuorum Biquadraticorum, Commentatio Secunda, Comment. soc. reg. sci. Gottingen. 1828; Werke II, 93-148.

[Ha-1926] H. Hasse. Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper I, Jber. Deutschen Math.-Ver. (1926); Ia, (1927), 1-134; II, (1930), 1-204.

[Hk-1970] Th. Hawkins. The origin of the theory of group characters, Arch. History Exact Sci.7 (1970/71), 142-170.

[Hk-1974] _____. New light on Frobenius' creation of the theory of group characters, Arch. History Exact Sci. 12 (1974), 217-243.

[Hi-1894] D. Hilbert. Grundzüge einer Theorie des Galoisschen Zahlkörpers, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen (1894), 224-238 ; Gesam. Abhandl. I, 13-27.

[Hi-1896] _____. Ein neuer Beweis des Kroneckerschen Fundamentalsatzes über Abelsche Zahlkörper, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen (1896), 29-39; Gesam. Abhandl. I, 53-62.

[Hi-1897] _____. Bericht : Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jber. Deutschen Math.-Ver.4 (1897), 175-546; Gesam. Abhandl. I, 63-363.

[Hi-1898] _____. Über die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen 5 (1898), 377-399 Acta Math. Stochh. 26 (1902), 99-132; Gesam. Abhandl. I, 483-509.

[Hi-1899a] _____. Über die Theorie der relativ-quadratischen Zahlkörper, Jber. Deutschen Math.-Ver.6 (1899), 88-94; Geams. Abhandl. I, 364-369.

[Hi-1899b] _____. Über die Theorie des relativ-quadratischen Zahlkörpers, Math. Ann. 51 (1899), 1-127; Gesam. Abhandl. I, 370-482.

[Hi-1900] _____. Mathematische Problem. Vortrag auf dem internationalen Mathematiker Kongresse in Paris 1900, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen 7 (1900), 253-297; Gesam. Abhandl. III, 290-329.

[Hi-1932] _____. Gesammelte Abhandlungen I, II, III, Berlin, 1932-1935; Reprint from Chelsea, New York, 1965.

[Iw-1950] K. Iwasawa. A note on L-functions, Proc. International congress of Math., 1950, p.322.

[Iw-1990] _____. On papers of Takagi in number theory, Appendix I to [T-1973, 2nd edit.] (1990), 342-351.

[Iw-1952] 岩澤健吉．代數函數論，岩波書店，1952.

[Iy-1990] S. Iyanaga. On the life and works of Teiji Takagi, Appendix III to [T-1973, 2nd edit.] (1990), 354-371.

[Iy-1969] 彌永昌吉．類体論の成立，彌永昌吉編『数論』付録２，岩波書店，東京，1969, pp.448-487 ; English translation by K. Iyanaga, North-Holland, Amsterdam·Oxford, 1975.

[Ja-1828] C. G. J. Jacobi. Theoria Residuorum Biquadraticorum Commentatio Prima, (1828), Werke II, 65-92.

[Ja-1829] _____. FUNDAMENTA NOVA THEORIAE FUNCTONUM ELLIPTICARUM, Regiomonti, 1829 ; Werke I, 49-239.

[Ja-1832] _____. Theoria Residuorum Biquadraticorum Commentatio Secunda, (1832), Werke II, 93-148.

[Ja-1846] _____. Gesammelte Werke I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, 1881 ~ 1891; Chelsea, New York, 1969.

[Jo-1870] C. Jordan. Traité des substitutions et des équations algébriques, Gauthier-Villars, Paris, 1870.

[Ko-1919] H. Kornblum. Über die Primfunktionen in einer arithmetischen Progression: [Aus dem Nachlaß herausgegeben von E.Landau.], Math. Zeitschrift Bd. 5 (1919), 100-111.

[Kr-1853] L. Kronecker. Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen, Monatsber. kgl. Preuss. Acad. Wiss. Berlin (1853), 365-374; Werke IV, 1-11.

[Kr-1857a] _____. Über die elliptische Functionen, für welche complex Multiplication stattfindet, Monatsber. kgl. Preuss. Acad. Wiss. Berlin (1857), 455-460; Werke IV, 177-183.

[Kr-1857b] _____. Brief von L. Kronecker an G. L. Dirichlet, 17. Mai 1857, Nachr. kgl. Akad. Wiss. Göttingen (1885), 253-297; Werke V, 418-421.

[Kr-1862] _____. Über die complex Multiplication der elliptischen Functionen, Monatsber. kgl. Preuss. Acad. Wiss. Berlin (1862), 363-372; Werke IV, 207-217.

[Kr-1874] _____. Über die Congruenten Transformation der Biliniear Formen, Monatsber. kgl. Preuss. Acad. Wiss. Berlin (1874), 397-447; Werke I, 423-483.

[Kr-1875] _____. Zur Geschichte des Reciprocitätsgesetzes, Gelesen in der Akad. Wiss. am 22. April 1875, Welke, II, 3-10.

[Kr-1877] _____. Über Abelsche Gleichung (Anzug aus der am 16. April 1877 gelesenen Abhandlung), Monatsber. kgl. Preuss. Acad. Wiss. Berlin (1877), 845-851; Werke IV, 63-72.

[Kr-1880a] _____. Über die Irreductibilität von Gleichungen, Monatsber. kgl. Preuss. Acad. Wiss. Berlin (1880), 155-162; Werke II, 85-93.

[Kr-1880b] _____. Auszug aus einem Briefe von L. Kronecker an R. Dedekind, 15. März, 1880, Werke V, 455-457.

[Kr-1882] _____. Grundzüge einer arithmetschen Theorie der algebraischen Grössen, Jour. reine angew. Math. Bd.92 (1882), 1-122; Werke II, 237-388.

[Kr-1895] _____. Mathematische Werke I-V, Leipzig, 1895-1930; Reprint, Chelsea, New York, 1968.

[Ku-1846] E. Kummer. Über die Divisoren gewisser Formen der Zahlen, welche aus der Theorie der Kreistheilung entstehen, Jour. reine angew. Math. Bd.30 (1846), 107-116; Collected Papers I, 193-202.

[Ku-1845] _____. Zur Theorie der complexen Zahlen, Monatsber. kgl. preuss. Wiss. Berlin (1845), 87-96 ; Jour. reine angew. Math. Bd.35 (1847), 319-326; Collected Papers I, 203-210.

[Ku-1847] _____. Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complex Zahle in ihre Primfactoren, Jour. reine angew. Math. Bd.35 (1847), 327-367; Collected Papers I, 211-251.

[Ku-1857] _____. Über die den Gaussischen Perioden der Kreistheilung entsprechenden Congruenzwurzeln, Jour. reine angew. Math. Bd.53 (1857), 142-148; Collected Papers I, 573-580.

[Ku-1856] _____. Theorie der idealen Primfactoren der complexen Zahlen, welche aus den Wurzeln der Gleichung $\omega^n = 1$ gebildet sind, wenn n eine Zusammengesetzte Zahl ist, Math. Abhandl. kgl. Akad. Wiss. Berlin (1856), 1-47; Collected Papers I, 583-629.

[Ku-1859] _____. Über die allgemeinen Reciprocitätsgesetze unter den Resten und Nichtresten der Potenzen, deren Grad eine Primzahl ist, Math. Abhandl. kgl. Akad. Wiss. Berlin (1859), 19-159; Collected Papers I, 699-839.

[Ku-1975] _____. Collected Papers I, II, Springer-Verlag, 1975.

[L-1917] E. Landau. R. Dedekind. Gedächtnisrede, gehalten in deröffentlichen Sitzung der kgl. Ges. Wiss. Göttingen am 12. Mai 1917, Göttingen Nachr. 1917, 50-70.

[M-1988] K. Miyake. The capitulation problem, Sugaku Expositions Vol.1 (1988), No.2, 175-194.

[M-1989a] _____. Algebraic Investigations of Hilbert's Theorem 94, the Principal Ideal Theorem, and the Capitulation Problem, Expo. Math. 7 (1989), 289-346.

[M-1989b] _____. A note on the arithmetic background to Frobenius' theory of group characters, Expo. Math. 7 (1989), 347-358.

[M-1994] _____. The Establishment of the Takagi-Artin Class Field Theory, in : The Intersection of History and Mathematics (ed. J. W. Dauben et al), Birkhäuser Verlag, Basel·Boston·Berlin, 1994, pp.109-128.

[So-1846] Schönemann. Gründzuge einer allgemeinen Theorie der höhern Congruenzen, deren Modul eine reelle Primzahl ist. Jour. reine angew. Math. Bd.31 (1846), 269-325; Von denjenigen Moduln, welche Potenzen von Prim-zahlen sind, Jour. reine angew. Math. Bd.32 (1846), 93-105.

[Sr-1927] O. Schreier. Über eine Arbeit von Herrn Tschebotareff, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 5 (1927), 1-6.

[Sh-1971] G. Shimura. Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions, Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press, 1971.

[Su-1991] H. Suzuki. A Generalization of Hilbert's Theorem 94, Nagoya Math. J. 121 (1991), 161-169.

[Su-1997] _____. On the Capitulation Problem, Preprint, 1997.

[Sy-1872] L. Sylow. Théorèmes sur les groups de substitutions, Math. Ann. 5 (1872), 584-594.

[T-1903] T. Takagi. Über die im Bereiche der rationalen komplexen Zahlen Abelscher Zahlkörper, J. Coll. Sci. Tokyo 19 (1903), 1-42; Collected Papers, 13-39.

[T-1915] _____. Zur Theorie der relativ-Abel'schen Zahlkörper I, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, Ser.II, 8 (1915), 154-162; II, 243-254; Collected Papers, 43-50, 51-60.

[T-1920a] _____. Ueber eine Theorie des relativ Abel'schen Zahlkörpers, J. Coll. Sci. Tokyo 41 (1920), 1-133; Collected Papers, 73-167.

[T-1920b] _____. Sur quelques théorèmes généraux de la théorie des nombres algébriques, Comptes rendus du congrès internat. math., Strasbourg (1920), 185-188; Collected Papers, 168-171.

[T-1920c] _____. Sur les corps résolubles algebriquement, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, t.171 (1920), 1202-1205; Collected Papers, 172-174.

[T-1922] _____. Ueber das Reciprocitätsgesetz in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper, J. Coll. Sci. Tokyo 44 (1922), 1-50; Collected Papers, 179-216.

[T-1927] 高木貞治. 一般の相互法則の證明（E・アルチン），日本數學物理學會誌 1 (1927), 221-223.

[T-1942] _____. 近世数学史談及雑談，共立出版社，東京，1933.

[T-1948] _____. 代数的整數論，岩波書店，東京，1948；第2版，1971.

[T-1973] _____. The Collected Papers, Iwanami Shoten, 1973 ; the 2nd edit., Springer-Verlag, 1990.

[Tn-1916] T. Takenouchi. On the relatively Abelian corpus with respect to the corpus defined by a primitive cubic root of unity, J. Coll. Sci. Tokyo 37 (1916).

[Tc-1861] M. Tchebichef. Sur l'intégration de la différentielle $\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx$, Bull. l'Acad. Impér. sci. St. Pétersbourg, T.III (1861), 1-12; Œuvres I, 517-530.

[Ts-1926] N. Tschebotareff. Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören, Math. Ann. 95 (1926), 191-228.

[Wb-1882] H. Weber. Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist, Math. Ann. 20 (1882), 301-329.

[Wb-1886] _____. Theorie der Abelschen Zahlkörper I, Acta Math. Stokh. 8 (1886), 193-263; II, 9 (1887), 105-130.

[Wb-1891] _____. Elliptische Functionen und algebraische Zahlen, Braunschweig, 1891.

[Wb-1893] _____. Leopold Kronecker, Jber. Deutschen Math.-Ver.2 (1891/92), 5-31.

[Wb-1894] _____. Lehrbuch der Algebra, Vol. I, II, Braunschweig, 1894, 1896.

[Wb-1897] _____. Über Zahlengruppen in algebraischen Körpern I, Math. Ann. 48 (1897), 433-473; II, 49 (1897), 83-100; III, 50 (1898), 1-26.

[Wb-1900] _____. Komplexe Multiplikation, in: ENCYKLOPËADIE der MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN, Leibzig, 1900-1904, I.2.C. Zahlentheorie, 6, pp.718-732.

[Wb-1908] _____. Lehrbuch der Algebra, Vol.III, Braunschweig, 1908; (the second edition of [W-1891]).

[Wb-1909] _____. Zur Theorie der zyklischen Zahlkörper (I), Math. Ann. 67 (1909), 32-60; (II), Math. Ann. 70 (1911), 459-470.

[Zo-1874] M. G. Zolotareff. Sur la Méthode d'intégration de M. Tchebichef, Journ. de Math. pures appl. 2e série, 16 (1874), 161-188.

[Zo-1880] _____. Sur la théorie des nombres complexes, Journ. de Math. pures appl. 3e série, 6 (1880), 51-84, 129-166.