数理解析研究所講究録
1060 巻 1998 年 210-219

On Wirsing's Approximation

平田典子
NORIKO HIRATA-KOHNO
日本大学理工学部数学科
Dept. of Math.,
Nihon University
email hirata@math.cst.nihon-u.ac.jp

1955年に K. F. Roth は下記の著名な結果を出版した。

Th (Roth) Let $\delta > 0$, $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}$.

Then the inequality $\left| \alpha - \dfrac{x}{y} \right| < \dfrac{1}{y^{2+\delta}}$

has finitely many solutions in $\dfrac{x}{y} \in \mathbb{Q}$.

同じ1955年に Davenport-Roth がこの有限個の解の個数の評価を上から explicit におこなった。ちなみにこれら有限個の解の高さの評価は極めて難しい未解決問題である。

Davenport - Roth による個数の上からの評価はその後 M. Mignotte, E. Bombieri, A. van der Poorten らによって改良された。また Roth の定理の高次元版ともいえる部分空間定理は W. M. Schmidt によって確立された。その定量化および拡張、改良等は W. M. Schmidt, H.P. Schlickewei, J. H. Evertse らによって得られている。

さてこの Roth の定理における不定不等式を次のように拡張したものを考える。

Let $t \in \mathbb{Z}$, $t > 0$, $\varkappa > 0$, $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$.
Consider the following inequality

$$\circledast \quad |\alpha - \xi| < \frac{1}{M(\xi)^{\varkappa}} \quad \text{in unknowns}$$

$\xi \in \overline{\mathbb{Q}}$ of degree t.

ここで $M(\xi)$ とは Mahler measure

$M(\xi) := |a_0| \prod_{j=1}^{t} \max(1, |\xi^{(i)}|)$ when

minimal polynomial of ξ over $\mathbb{Z}$ $= a_0 \prod (X - \xi^{(i)})$.

C. L. Siegel はこの ㊥ の解きが有限個であることを「$\varkappa$ > t と $\deg\alpha$ による関数」の条件下で示した。

E. Wirsing は 1971 年に ㊥ が $\varkappa > 2t$ の条件下で解が有限個であることを示した。

Schmidt は Wirsing とは独立に (1970年出版) ㊥ が $\varkappa > t+1$ の条件下で解が有限個であることを示した。Schmidt の Lecture Note に記されているように [Sch 1] これは best possible である。また $t = 1$ のときは Roth の定理に相当するがこの場合は Wirsing の条件 $\varkappa > 2t$ も同じく Roth に対応し best possible となっている。

1997年にこの Wirsing の定理の定量化を Evertse がおこなった。具体的には下の定理となる。

<u>Th</u> (Evertse)

Let $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ of degree r.

Let t be an integer ≥ 1. $\varkappa = 2t + \delta$ with $0 < \delta < 1$.

Then the inequality ㊥ has

at most $2 \cdot 10^7 \cdot t^7 \cdot \delta^{-4} \cdot \log(4r) \log\log(4r)$
solutions ξ with $M(\xi) \geq \max\left(4^{\frac{t(t+1)}{\delta}}, M(\alpha)\right)$,
and ⊛ has at most

$$2^{(t+3)^2} \delta^{-1} \log(2+\delta^{-1}) + t^2 \delta^{-1} \log\log(4M(\alpha))$$

solutions ξ with $M(\xi) < \max\left(4^{\frac{t(t+1)}{\delta}}, M(\alpha)\right)$.

この定理の証明は彼自身による Gap Principle と Wirsing の議論（初等的確率論の知識を用いる）を組み合わせたものにいくつかの組み合わせ論的アイデアを付加して成されている。
以下にのべるもう1つの Evertse の定理とともに証明は [E2] にある。

ここではこの⊛を更に一般化した不定不等式を考えよう。

For $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}$ of degree t, we fix an ordering $\xi^{(1)} = \xi, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(t)}$.
Let $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \overline{\mathbb{Q}}$,
$\varphi_1, \ldots, \varphi_t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

We consider the inequalities

$$\text{(**)} \quad |\alpha_i - \xi^{(i)}| < \frac{1}{M(\xi)^{\varphi_i}} \qquad (i = 1, \dots, t)$$

in unknowns ξ.

この (**) に対する有限性の十分条件としては Winsing の与えた次の定理がある.(次の定理と以前にのべた結果の両方とも Winsing の定理は [W] に証明されている)

Th (Winsing)

(**) have finitely many solutions

$$\text{if} \quad \max_I (\# I)^2 \frac{1}{\sum_{i \in I} \frac{1}{\varphi_i}} > 2t,$$

where I runs over all non empty subset of $\{ i \in \{1, \dots, t\} : \varphi_i \neq 0 \}$.

ここで我々は $\max_I (\# I)^2 \frac{1}{\sum_{i \in I} \frac{1}{\varphi_i}} > 2t$ を

Wirsing's condition と呼ぶことにしよう。

$\varphi_1 = \mathcal{H}$, $\varphi_2 = \cdots = \varphi_t = 0$ のときはこの

Wirsing's condition は $\mathcal{H} > 2t$ に相当

している。

この ＊＊ についても Evertse が定量的な

結果を示しているのでそれを次に述べる.

Th (Evertse)

Let $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \overline{\mathbb{Q}}$ with

$\max_{1 \le i \le t} M(\alpha_i) = M$, $[\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) : \mathbb{Q}] = r$.

Let $\varphi_1, \ldots, \varphi_t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ We assume

that the condition

$$\max_I (\# I)^2 \frac{1}{\sum_{i \in I} \frac{1}{\varphi_i}} \geqq 2t + \delta \quad \text{with}$$

$0 < \delta < 1$ holds.

Put $\mathcal{H} = \varphi_1 + \cdots + \varphi_t$. Then the

inequalities ＊＊ have at most

$$2\cdot 10^7 \cdot t^7 \cdot \delta^{-4} \cdot \log(4r) \log\log(4r)$$

solutions with $M(\xi) \geq \max(4^{\frac{t(t+1)}{\varkappa-2t}}, M)$

and at most

$$2^{t^2+t+\varkappa+4}\left(1+\frac{\log\left(2+\frac{1}{\varkappa-2t}\right)}{\log\left(1+\frac{\varkappa-2t}{t}\right)}\right)+t\,\frac{\log\log 4M}{\log\left(1+\frac{\varkappa-2t}{t}\right)}$$

solutions with $M(\xi) < \max(4^{\frac{t(t+1)}{\varkappa-2t}}, M)$.

実際には[E2]においては上述の定理の証明とそのResultant不定不等式への応用（これはWirsingらによっても導かれている）がなされており、さきの1つの不定不等式の場合の結果はその系として示されている。

ところでこのWirsing's Conditionに現われる数であるが、常に $\varphi_1+\cdots+\varphi_t \geq \max_I (\# I)^2 \cdot \dfrac{1}{\sum_{i\in I}\frac{1}{\varphi_i}}$ が成立することがわかる。これは

次のようにして簡単に証明できることを A. Schinzel 氏に remark して頂いた。

$\varphi_1 \neq 0, \ldots, \varphi_t \neq 0$ としておくと 相加平均 ≧ 相乗平均より

$$\sqrt[t]{\varphi_1 \cdots \cdot \varphi_t} \leq \frac{\varphi_1 + \cdots + \varphi_t}{t}$$

および

$$\sqrt[t]{\frac{1}{\varphi_1 \cdot \cdots \cdot \varphi_t}} \leq \frac{\frac{1}{\varphi_1} + \cdots + \frac{1}{\varphi_t}}{t}$$

が得られる.

この二つを結びつければ

$$\varphi_1 + \cdots + \varphi_t \geqslant t^2 \frac{1}{\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{\varphi_i}}$$

となる.

これより $=$ は $\varphi_1 = \cdots = \varphi_t$ のときのみ成立することもわかる.

<u>Remark</u> Thus the condition

$$\varphi_1 + \cdots + \varphi_t > 2t$$

is weaker than Wirsing's condition.

我々の結果はこの弱い条件下でも定量的な結果を得ることができるということである.

Th Let $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \overline{\mathbb{Q}}$ with

$\max_{1 \le i \le t} M(\alpha_i) = M$, $[\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_t) : \mathbb{Q}] = r$.

Let $\varphi_1, \ldots, \varphi_t \in \mathbb{R}_{\ge 0}$, with

$\varphi_1 + \cdots + \varphi_t = 2t + \delta$, $0 < \delta < 1$.

Then

the inequalities (**) have at most

$$2^{80(t+3)^2} \delta^{-6} \log((2\delta+1)\delta^{-1})(\log(4r) \cdot$$

$$\log\log(4r+1) + \log\log 4(M+1)))$$

solutions in ξ.

この評価そのものは Evertse のものよりずっと悪いことは見ての通りである。

Wirsing の方法はここには使えないのでもう1度定量的部分空間定理にもどってこの方法と Evertse の Gap Principle を用いて示す。

References

[E1] J.-H. Evertse An improvement of the quantitative Subspace theorem, Compositio Math., 101 (1996) 225–311.

[E2] — The number of algebraic numbers of given degree approximating a given algebraic number, in Analytic Number Theory, London Math. Soc. Lec. Note Series 247, (1997) pp.53–83, Cambridge.

[Sch1] W. M. Schmidt Simultaneous approximation to algebraic numbers by ratinals, Acta Math., 125 (1970) 189–201.

[Sch2] — Diophantine Approximation. Lec. Notes in Math., 785 (1980) Springer.

[W] E. Wirsing On approximations of algebraic numbers by algebraic numbers of bounded degree. Proc. Symp. Pure Math., 20 AMS (1971) pp. 213–248.