数理解析研究所講究録
1060巻 1998年 238-245

四乗数および五乗数のWaring-Goldbach問題について。

岩手大学教育学部 川田 浩一 (Koichi Kawada)

一. 序

ここに述べる結果はTrevor D. Wooley氏との共同研究のうちの一つであり，氏を通してthe David and Lucile Packard Foundationからの援助をいただいて筆者がミシガン大学に滞在させていただいた期間（1997年4月〜6月）に得られたものである。

Waring-Goldbach問題とは，端的にいえば変数を素数に限定したWaring問題のことであり，即ちいくつかの素数の巾乗の和による自然数の表現について考察するものである。通常，s個の素数のk乗の和による自然数nの表現を考える際には，次のように定義される集合$\mathcal{N}_{k,s}$に属するnに限定して考察する。

$$\mathcal{N}_{k,s}=\{n\in\mathbb{N};\ \text{任意の自然数}q\text{に対し，}q\text{と素な整数}x_1,\cdots,x_s\text{で，}n\equiv x_1^k+\cdots+x_s^k \pmod{q}\ \text{を満たすものが存在する。}\}.$$

このように自然数nを限定するのは次のような理由による。

もし自然数nが$N_{k,s}$に属さないとすると，中国の剰余定理により，ある素数pのべきqに対して，合同式$n \equiv x_1^k + \cdots + x_s^k \pmod{q}$は，解をもったとしても少なくとも一つの$x_j$は$q$と素ではない，つまり$p$の倍数でなければならない。従ってその$n$が仮りに$s$個の素数の$k$乗の和となったとすると，その$s$個の素数のうちの一つは$p$でなければならないから，問題は$n-p^k$が$(s-1)$個の素数の$k$乗の和となるかどうかに帰着される。それは$s$個の変数の問題ではなく，$(s-1)$個の$k$乗数のWaring-Goldbach問題として扱われることになる。

以上の注意のもと，Waring問題における$G(k)$に対応するものとして，華[2]に倣って記号$H(k)$を定める。即ち，「$N_{k,s}$に属する十分大きいnは必ずs個の素数のk乗の和で表せる」といえるような最小のsを$H(k)$とする。この$H(k)$の大きさについては，Hardy-Littlewood，Vinogradov，Davenport，華らの仕事によって，1940年代前半までには，

$H(2) \leq 5$，$H(3) \leq 9$，$H(4) \leq 15$，$H(5) \leq 25$，$H(6) \leq 37$，……

などが知られていた（例えば華[2]参照)。1985年になってThanigasalam[4]は5以上の指数kに対して上の評価を改良し

$H(5) \leq 23$，$H(6) \leq 33$，$H(7) \leq 47$，$H(8) \leq 63$，$H(9) \leq 83$，……

などを示した。(Thanigasalam[4]とVaughan[6]の仕事はほぼ同時期に独立になされたものであるが，それらの内容は近いも

のである。Vaughan[6]は$H(k)$の評価については触れてはいないが，彼の示した結果から上記の$H(k)$の評価を導くことも容易である。）

我々の結果は，$k=4$および5の場合に対する$H(k)$の評価の改良である。

$\boxed{\text{定理.}}$ $H(4)\leqq 14$, $H(5)\leqq 21$.

合同式に関する初等的な考察により（華[2] Ch.8参照），

$$N_{4,14}=\{n\in\mathbb{N};\ n\equiv 14\ (\mathrm{mod.}\ 240).\},$$

$$N_{5,21}=\{n\in\mathbb{N};\ n\equiv 1\ (\mathrm{mod.}\ 2).\}$$

であることがわかるから，上記の定理はより丁寧には

「240を法として14と合同な十分大きい自然数は，14個の素数の4乗の和で表せる」，

「十分大きい奇数は21個の素数の5乗の和で表せる」

と述べることができる。

我々の方法はすべての指数kに対して（形式的には）応用することが可能であるが，既に知られている$H(k)$の評価を改良できるのは今のところ定理で述べた$k=4$および5の場合のみである。

二. 証明の要点

我々の証明は円周法（サークル・メソッド）を基にしており，その方面に関して既に知られている技術にも，もちろん深く依存している（例えば華[2], Thanigasalam [5], Vaughan [6], [7] などを参照）。我々の新しい工夫は劣弧（マイナー・アーク）上の指数和の評価に関するものであり，ここではその点について述べることにしたい。

以後文字 p は常に素数を表すとし，$e(x)=e^{2\pi i x}$ とする。さらに，

$$f(\alpha)=\sum_{P<p\leq 2P} e(p^k\alpha)$$

とおき，その絶対値を上から抑えることを考える。素数の理論に於てよく知られている通り，そのような和の評価は，

$$\sum_{P<l\leq 2P} \Lambda(l)\, e(l^k\alpha)$$

という，von Mangoldt 関数 $\Lambda(l)$ を重みに付加した和の評価に帰着することができる。さらに，von Mangoldt 関数に対する Vaughan の恒等式（Davenport [1], Ch. 24）によってその和は，

$$\sum_{m\leq M} a_m \sum_{\frac{P}{m}<n\leq\frac{2P}{m}} e((mn)^k\alpha) \qquad (|a_m|\leq\tau(m))$$

および

$$\sum_{M<m\leq 2M} a_m \sum_{\frac{P}{m}<n\leq\frac{2P}{m}} b_n\, e((mn)^k\alpha) \qquad (|a_m|\leq\tau(m),\ |b_n|\leq\log n)$$

といった形の和に分解することができる。(ここで $\tau(m)$ は約数関数を表す。) 前者の形であれば，内側の和に Waring 問題の研究の中で知られている結果 (Vaughan [7], Lemma 2.4, Theorem 4.1 など) を使うことで抑えることができる。後者に対しても，Cauchy の不等式を用いて

$$\left|\sum_{M<m\le 2M} a_m \sum_{\frac{P}{m}<n\le\frac{2P}{m}} b_n e((mn)^k\alpha)\right|^2 \le \left(\sum_m |a_m|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_m\left|\sum_n b_n e((mn)^k\alpha)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ll \left(M(\log M)^3 \sum\sum_{\frac{P}{2M}<n_1,n_2\le\frac{P}{M}} |b_{n_1}b_{n_2}| \left|\sum_{\substack{M<m\le 2M\\ \frac{P}{\min\{n_1,n_2\}}<m\le\frac{2P}{\max\{n_1,n_2\}}}} e((n_1^k-n_2^k)m^k\alpha)\right|\right)^{\frac{1}{2}}$$

と変形することで同様の議論にもちこむことができる。

このような道筋によって我々は $|f(\alpha)|$ の評価を得ることができるが，その結果を述べるにはいくつかの記号を導入することが必要となる。まず，$\kappa(q)=\kappa(q;k)$ を次式で決定される q についての乗法的関数とする；

$$\kappa(p^{ku+v}) = \begin{cases} k p^{-u-\frac{1}{2}} & (u\ge 0,\ v=1), \\ p^{-u-1} & (u\ge 0,\ 2\le v\le k). \end{cases}$$

次に σ_k を次の性質をもつ $0<\sigma_k\le\frac{1}{4}$ なる実数とする；

$\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\le q^{-2}$, $(q,a)=1$, $X\le q\le X^{k-1}$ ならば，$\displaystyle\sum_{X<m\le 2X} e(m^k\alpha)\ll X^{1-\sigma_k}$.

例えば，Weyl の不等式 ([7], Lemma 2.4) によって，任意の正数 ε に対して，$\sigma_4=\frac{1}{8}-\varepsilon$, $\sigma_5=\frac{1}{16}-\varepsilon$ ととることができる。

これらの記号の下に，我々は次の補題を示すことができる。

$\boxed{\text{補題}}$ $k \geq 4$ とし，実数 α と整数 q，a に対して，

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \left(qP^{k/2}\right)^{-1}, \quad (q, a) = 1, \quad 1 \leq q \leq P^{k/2}$$

とする。このとき任意の正数 ε に対して，

$$(1) \qquad f(\alpha) \ll_{\varepsilon, k} P^{1 - \frac{\sigma_k}{3} + \varepsilon} + K(q)^{\frac{1}{2}} q^{\varepsilon} \frac{P(\log P)^5}{(1 + P^k|\alpha - a/q|)^{\frac{1}{2}}}.$$

さて，我々は等差数列中の素数の分布に関して Siegel-Walfisz の定理を実質的に改良することができないでいるので，円周法の応用上補題中の q，a について，

$$q \geq (\log P)^A \quad \text{または} \quad \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \geq P^{-k}(\log P)^A \quad (A\text{は適当な定数})$$

となる α 全体の集合を劣弧として扱わざるを得ない。すると，この劣弧上の α に対して，補題は

$$(2) \qquad f(\alpha) \ll_k P(\log P)^{-A/5 + 5}$$

といった形の評価を与える。このような，自明な評価($f(\alpha) \ll P$)から $\log P$ のべきの分だけへこんだ形の評価は，Waring-Goldbach 問題の研究にあたり以前から使われてきたものと全く同じであり，1937年の Vinogradov の三素数定理の証明以来知られていたものといえる。ところが，(1)の右辺第二項の形であれば，応用上問題なく扱うことができ，その寄与は無視できる誤差となるのである。その計算は煩雑ではあるが，本質的な

困難はない。この意味で，非常に雑な言い方をすれば，上の補題は劣弧上のαに対して

(3) $$f(\alpha) \ll P^{1-\sigma_k/3+\varepsilon}$$

という評価を実質的に与えることになるということができる。この(2)と(3)との差が，我々が従来の結果を（$k=4,5$の場合のみではあるが）改良できる理由に他ならない。

$H(k)$の評価に際してこれまでに構築されていた議論の中に上の補題を組み入れることで我々の定理が証明されるのであるが，さらなる証明の細部についてはプレプリント[3]を参照されたい。

参考文献

[1] Davenport, "Multiplicative Number Theory" (2nd. ed., revised by Montgomery), Graduate Texts in Math. 74, Berlin, Springer-Verlag, 1980.

[2] Hua, "Additive Theory of Prime Numbers", Providence, Rhode Island, American Math. Soc., 1965.

[3] Kawada and Wooley, "On the Waring-Goldbach problem for 4th and 5th powers", preprint.

[4] Thanigasalam, "Improvement on Davenport's iterative method and new results in additive number theory, I", Acta Arith. 46, pp. 1-31, 1985.

[5] Thanigasalam, "On addmisible exponents for k-th powers," Bull. Calcutta Math. Soc. 86, pp. 175–178, 1994.

[6] Vaughan, "On Waring's problem for smaller exponents," Proc. London Math. Soc. (3) 52, pp. 445–463, 1986.

[7] Vaughan, "The Hardy–Littlewood Method", (2nd ed.) Cambridge Tracts in Math. 125, Cambridge University Press, 1997.